ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Н. А. Крячко
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.
E-mail: babenko.vladislav@gmail.com, nadiakriachko@gmail.com

О неравенствах типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве

Отримано сiмейство точних адитивних нерiвностей типу Хардi-Лiттлвуда-Полiа для операторiв в гiльбертовому просторi.

Ключовi слова: **гiльбертiв простiр, оператор, нерiвностi типу Хардi-Лiттлвуда-Полiа.**

Получено семейство точных аддитивных неравенств типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: **гильбертово пространство, оператор, неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа.**

A family of exact additive inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's type has been received for operators in Hilbert space.

Key words: **Hilbert space, operator, inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's.**

1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ - действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. Через $L_2(\mathbb{G})$ будем обозначать пространство измеримых функций $x: \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|x\|_{L_2(\mathbb{G})} = \left(\int\limits_{\mathbb{G}} |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty,$$

$L_2^r(\mathbb{G})$, $r \in \mathbb{N}$, - пространство всех функций x, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{G})$; $L_{2,2}^r(\mathbb{G}) = L_2(\mathbb{G}) \cap L_2^r(\mathbb{G})$.

Хорошо известно (см., напр. [1]), что для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{R})$ выполняется точное неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\| x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{G})} \leq \| x \|_{L_2(\mathbb{G})}^{1-k/r} \| x^{(r)} \|_{L_2(\mathbb{G})}^{k/r}, \; r, k \in \mathbb{N}, \; k < r. \tag{1.1}$$

В случае $\mathbb{G}=\mathbb{R}$ неравенство (1.1) эквивалентно семейству аддитивных неравенств

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq A\left\|x\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2+\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2, \tag{1.2}$$

и для любого заданного $A>0$ константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$ неулучшаема [2, §5.4].

Для $\mathbb{G}=\mathbb{T}$ из неравенства (1.1) вытекает справедливость следующего аналога неравенства (1.2): для любой функции $x\in L_{2,2}^r(\mathbb{T})$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 \leq A\left\|x\right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2+\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2, \tag{1.3}$$

однако, константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$, в отличие от непериодического случая, вообще говоря, не является точной [1]. Задача отыскания неулучшаемых аддитивных неравенств для функций класса $L_{2,2}^r(\mathbb{T})$ решена в работе [2] (см. также [3, §5.4]).

Приведем некоторые результаты, связанные с обобщением неравенств Харди-Литтлвуда-Полиа на случай достаточно произвольных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, которые были получены в работе [4].

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, $\{e_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Пусть также $c_\nu=(x,e_\nu)$ - коэффициенты Фурье элемента $x\in H$ и $\sum\limits_{\nu} c_\nu e_\nu$ - его ряд Фурье.

Пусть $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ - комплекснозначные функции, заданные на множестве целых чисел и удовлетворяющие условиям:

1) $|f(\nu)|$ и $|\varphi(\nu)|$ не убывают с ростом $|\nu|$ и $|f(\nu)|=|f(-\nu)|$, $|\varphi(\nu)|=|\varphi(-\nu)|$ для любого $\nu\in\mathbb{Z}$;

2) функции $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ связанны соотношением

$$|\varphi(\nu)|^2=\alpha\left(|f(\nu)|^2\right), \tag{1.4}$$

где $\alpha(t)$, $t\geq 0$, - выпуклая вверх неубывающая функция, $\alpha(0)=0$.

Рассмотрим операторы A_f и A_φ, определенные следующим образом.

Для $x=\sum\limits_{\nu} c_\nu e_\nu$ положим

$$A_f x=\sum_{\nu} f(\nu)\, c_\nu e_\nu,\ A_\varphi x=\sum_{\nu}\varphi(\nu)\, c_\nu e_\nu,$$

$$D_{A_f}=\left\{x:\sum_{\nu}|f(\nu)|^2|c_\nu|^2<\infty\right\} \text{ и } D_{A_\varphi}=\left\{x:\sum_{\nu}|\varphi(\nu)|^2|c_\nu|^2<\infty\right\}-$$

соответственно области определения операторов A_f и A_φ. Нетрудно убедиться в том, что $D_{A_f}\subset D_{A_\varphi}$.

В работе [4] доказано, что для любого $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq \|x\|^2 \alpha \left(\frac{1}{\|x\|^2} \|A_f x\|^2 \right), \tag{1.5}$$

которое обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Неравенство (1.5) представляет собой обобщение классического неравенства Харди-Литтлвуда-Полиа. В частности, в неравенстве (1.5) содержится неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа для периодических функций.

Также в [4] для всех $x \in D_{A_f}$ и любого $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2}\right)$ было получено семейство аддитивных неравенств вида

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq C_K \|x\|^2 + K \|A_f x\|^2 \tag{1.6}$$

и доказано, что для любого заданного $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2}\right)$ константа C_K в (1.6) неулучшаема.

В данной работе исследуется задача получения семейства аддитивных неравенств другого вида: для любого $x \in D_{A_f}$

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|x\|^2 + C_K \|A_f x\|^2, \tag{1.7}$$

когда $K \in \left[0; \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2)\right)$, точных в том смысле, что для любого заданного $K \in \left[0; \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2)\right)$ константу C_K уменьшить нельзя.

2. Другой вариант точных аддитивных неравенств типа Харди – Литтлвуда – Полиа.

В дополнение к условиям 1) и 2), наложенным в предыдущем пункте на функции f, φ и α, будем предполагать, что функция f строго возрастает, $f(0) = 0$, $\alpha(t)$– дифференцируема в любой точке $t > 0$, причем $\alpha'(t) \to 0$, если $t \to +\infty$.

Для любого $K \geq 0$ можем написать

$$\|A_\varphi x\|^2 = \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 = \sum_\nu \left(|\varphi(\nu)|^2 - K\right) |c_\nu|^2 + \sum_\nu K |c_\nu|^2 =$$

$$= \sum_\nu \frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2} |f(\nu)|^2 |c_\nu| + \sum_\nu K |c_\nu|^2 \leq K \|x\|^2 + \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2} \right) \|A_f x\|^2.$$

Для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ положим $\gamma_\nu = |f(\nu)|^2$. Последнее неравенство перепишем в виде

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K \|x\|^2 + \sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - K}{\gamma_\nu} \right) \|A_f x\|^2.$$

Положим $M = \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha\left(\gamma_\nu\right)$ и далее будем предполагать, что $K \in [0;\, M)$.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_1 = 0,\ \psi_\nu = \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}},\ \nu = 2,\, 3,\, \ldots$$

Из выпуклости функции α и теоремы Коши следует, что $\psi_\nu \to +\infty$ при $\nu \to +\infty$, $\inf\limits_{\nu} \psi_\nu = 0$.

Для $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$ рассмотрим разности

$$\delta_\nu = \frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - K}{\gamma_\nu} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu-1}\right) - K}{\gamma_{\nu-1}} = \frac{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}}\left(K - \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}}\right).$$

Пусть $K \in [0;\, M)$. Если значение $\nu_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\psi_{\nu_0} \le K \le \psi_{\nu_0+1},$$

тогда для $\nu \le \nu_0$ будет $\delta_\nu \ge 0$, а для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu < 0$. Отсюда следует, что

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - K}{\gamma_\nu}\right) = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}}.$$

Отметим, что для $K = \psi_{\nu_0}$

$$\frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0-1}\right)\gamma_{\nu_0} - \alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)\gamma_{\nu_0-1}}{\gamma_{\nu_0}\left(\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}\right)} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu_0-1}\right)}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}},$$

а при $K = \psi_{\nu_0+1}$

$$\frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)\gamma_{\nu_0+1} - \alpha\left(\gamma_{\nu_0+1}\right)\gamma_{\nu_0}}{\gamma_{\nu_0}\left(\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}\right)} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0+1}\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}.$$

Обозначим через $l\left(K\right)$ ломаную с узлами в точках ψ_ν, $\nu = 1,\, 2,\, \ldots$, которая в узлах интерполирует значения

$$\frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu-1}\right)}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях относительно функций f, φ и α для любого $K \in [0; M)$ и всех $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство*

$$\|A_\varphi x\|^2 \le K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2. \tag{2.1}$$

Покажем, что константа $l\,(K)$ для любого $K \in [0;\,M)$ неулучшаема. Возьмем произвольное $K \in [0;\,M)$ и выберем $\nu_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\psi_{\nu_0} \leqslant K \leqslant \psi_{\nu_0+1}$. Для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|A_\varphi x\|^2 &= \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi\,(\nu_0)|^2 = \alpha\left(|f\,(\nu_0)|^2\right) = \\ &= K\|e_{\nu_0}\|^2 + \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}}|f(\nu_0)|^2 = \\ &= K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2.\end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. *Харди Г. Г.* Неравенства. / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа - М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. - 456 с.
2. *Babenko V. F.*. On Exact Inequalities of Hardy-Littlewood-Polya Type / V. F. Babenko, T. M Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applications, 2000. — 245. — P. 570–593.
3. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. - К. : Наук. думка, 2003. — 590 с.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, Н.А. Крячко // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Серiя: Математика, 2013. - Т. 21, № 6/1. - С. 34-39.

Надійшла до редколегії 12.05.2014