

УДК 517.5

Т. Р. Біккужина\*, В. Л. Великін\*\*

\* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,  
Дніпропетровськ 49050. E-mail: mechtatel\_t@mail.ru

\*\* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,  
Дніпропетровськ 49050. E-mail: velikiny@rambler.ru

## Точні значення взаємного відхилення деяких інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів в рівномірній і інтегральній метриках

Отримано точні значення взаємного відхилення в просторах  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів довільного порядку на класах неперервних і неперервно диференційованих функцій.

Ключові слова: сплайн, підпростір, нормований простір.

Получены точные значения взаимного уклонения в пространствах  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , интерполяционных подпространств эрмитовых сплайнов произвольного порядка на классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: сплайн, подпространство, нормированное пространство.

We obtained exact values of mutual deviation of interpolation subspaces of Hermitian splines of arbitrary orders on the classes of continuous and continuously differentiable functions in  $L_p$  spaces,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Key words: splines, subspace, normed space.

Нехай  $C^q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ ,  $C^0 = C$ , — лінійний нормований простір функцій  $f(x)$ , які мають на відрізку  $[0, 1]$   $q$  неперервних похідних, з нормою

$$\|f\|^{(q)} = \sum_{i=0}^q \|f^{(i)}\|_{C[0,1]}, \quad \|f\|^{(0)} = \|f\|.$$

Нехай ще  $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ ,  $n \geq 1$ , - довільне розбиття відрізка  $[0, 1]$ ,  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\delta_n = \max\{h_i, i = \overline{1, n}\}$ ,  $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, q}$ .

Як і в [1], кожній функції  $f(x) \in C^q$  поставимо у відповідність інтерполяційний ермітовий сплайн порядку  $2m + 1$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , виду

$$s_{r,m}(f, \Delta_n; x) = \sum_{k=0}^r f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x), \quad (1)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad r \leq q, \quad r \leq m,$$

де

$$H_{k,m}(h, t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^{k+s}. \quad (2)$$

Підпростір таких сплайнів при фіксованих  $m, r$ , і  $\Delta_n$  позначимо через  $S_{r,m}(\Delta_n)$ .

В цій роботі ми продовжили, розпочате в [2] - [5], дослідження величини

$$\Theta_{r,p}[S_{r_1,m_1}(\Delta_n), S_{r_2,m_2}(\Delta_n)] = \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \|s_{r_1,m_1}(f, \Delta_n; x) - s_{r_2,m_2}(f, \Delta_n; x)\|_p, \quad (3)$$

яка представляє собою взаємне відхилення пари підпросторів ермітових сплайнів, що є аналогом розхилу (див. [6], гл. 3, п. 39) двох підпросторів в нормованому просторі. У подальшому в цій роботі будемо позначати  $\Theta_{r,p}[S_{0,m_1}(\Delta_n), S_{0,m_2}(\Delta_n)]$  через  $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$

В [3] для будь-яких  $m \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ,  $\nu \in \mathbf{N}$ , і довільного розбиття, знайдено точні значення для  $\Theta_{0,\infty}[m+1, m, n]$ ,  $\Theta_{1,\infty}[m+1, m, n]$ ,  $\Theta_{0,1}[m+\nu, m, n]$  і  $\Theta_{1,1}[m+\nu, m, n]$  для рівномірного розбиття.

В даній роботі отримані результати по точним значенням величини  $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$  для будь-яких значень  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ , для  $r = 0, 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Нехай

$$\mathcal{A}_r(\Delta_n) := \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \max_{1 \leq i \leq n} |f_i - f_{i-1}|,$$

$$\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) := \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |f_i - f_{i-1}|^p h_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поряд з функціями

$$\varphi_m(t) = H_{0,m+1}(1, t) - H_{0,m}(1, t) = C_{2m+1}^m t^{m+1}(1-t)^{m+1}(1-2t), \quad (4)$$

з роботи [3] тут використовуються функції

$$\Phi_{m,j}(t) = H_{0,m+j+1}(1, t) - H_{0,m}(1, t).$$

Ясно, що

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t) + \varphi_{m+1}(t) + \varphi_{m+2}(t) + \dots + \varphi_{m+j}(t). \quad (5)$$

Основні результати цієї роботи базуються на лемах 1 - 4.

**Лема 1.** Для будь-яких  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $j \in \mathbf{N}$  мають місце рівності

$$\Theta_{r,\infty}[m+j, m, n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n) \|\Phi_{m,j-1}\|,$$

$$\Theta_{r,p}[m+j, m, n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \|\Phi_{m,j-1}\|_p, \quad r \in \mathbf{N}_0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

**Доведення.** Виходячи з співвідношень (3) і (1), з урахуванням тотожності

$$H_{0,m}(1, t) + H_{0,m}(1, 1 - t) \equiv 1,$$

безпосередньо маємо

$$\begin{aligned} \Theta_{r,p}[m + j, m, n] &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \|s_{0,m+j}(f, \Delta_n; x) - s_{0,m}(f, \Delta_n; x)\|_p = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \int_0^1 |s_{0,m+j}(f, \Delta_n; x) - s_{0,m}(f, \Delta_n; x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| (f_i - f_{i-1}) \Phi_{m,j-1} \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f_i - f_{i-1})|^p \left| \Phi_{m,j-1} \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |(f_i - f_{i-1})|^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \Phi_{m,j-1} \left( \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\{ t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right\} = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |(f_i - f_{i-1})|^p h_i \int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p dt \cdot \sum_{i=1}^n |(f_i - f_{i-1})|^p h_i \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\|f\|^{(r)} \leq 1} \left( \sum_{i=1}^n |(f_i - f_{i-1})|^p h_i \right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \|\Phi_{m,j-1}\|_p. \end{aligned}$$

Перша формула доводиться аналогічно. Лема доведена.

**Наслідок 1.** Для будь-яких  $m_1, m_2 \in \mathbf{N}_0$ ,  $m_1 \neq m_2$ , мають місце рівності

$$\Theta_{r,\infty}[m_1, m_2, n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n) \|\Phi_{\min\{m_1, m_2\}, |m_2 - m_1| - 1}\|,$$

$$\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \|\Phi_{\min\{m_1, m_2\}, |m_2 - m_1| - 1}\|_p, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Для подальшого відмітимо, що  $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2m+3}}$  - точка відрізка  $(0, \frac{1}{2})$ , в якій функція  $\varphi_m(t)$  досягає найбільшого значення на відріжку  $[0, 1]$ , а отже

$$\|\varphi_m(t)\| = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \cdot \frac{(m+1)^{m+1} \sqrt{2m+3}}{2^{m+1} (2m+3)^{m+2}}.$$

Також відмітимо, що з урахуванням співвідношень (4) - (5), функції  $\Phi_{m,j}(t)$  мають такі властивості:

$$1) \Phi_{m,j}(1-t) = -\Phi_{m,j}(t), \quad t \in [0, 1];$$

$$2) \Phi_{m,j}(t) > 0, \quad \Phi_{m,j}(t) > \Phi_{m+1,j}(t), \quad \Phi_{m,j+1}(t) > \Phi_{m,j}(t), \quad t \in (0, \frac{1}{2}).$$

Таким чином,

$$\|\Phi_{m,j}\| = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \Phi_{m,j}(t), \quad \int_0^1 |\Phi_{m,j}(t)|^p dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\Phi_{m,j}(t))^p dt.$$

**Лема 2.** Для норми функції  $\Phi_{m,j}(t)$  в просторі  $C$  має місце наступне співвідношення:

$$\|\Phi_{m,j}\| = C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j}} \left(1 + a_m \mathcal{N}_{m,j} + \dots + a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} \mathcal{N}_{m,j}^j\right),$$

де

$$a_m := \frac{2(2m+3)}{m+2}, \quad \mathcal{N}_{m,j} := \left( \frac{C_{2m+1}^m (m+1)}{C_{2m+2j+1}^{m+j} \cdot 2(2m+2j+3)} \right)^{\frac{1}{j+1}}.$$

**Доведення.** Нехай  $u := t(1-t)$ . Тоді  $(u')^2 = 1 - 4u$ , а  $\varphi_m(t) = C_{2m+1}^m u^{m+1} u'$ ,

$$\varphi_{m+1}(t) = C_{2m+3}^{m+1} u^{m+2} u', \quad C_{2m+3}^{m+1} = C_{2m+1}^m a_m, \quad \varphi_{m+1}(t) = a_m u \varphi_m(t),$$

$$\varphi_{m+2}(t) = a_m a_{m+1} u^2 \varphi_m(t), \quad \dots, \quad \varphi_{m+j}(t) = a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} u^j \varphi_m(t).$$

Отже

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t) (1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \dots + a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} u^j). \quad (6)$$

Нехай

$$P(t) := 1 + \sum_{i=1}^j \left( u^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k} \right), \quad Q(t) := 1 + \sum_{i=1}^{j-1} \left( (i+1) u^i \prod_{k=1}^i a_{m+k} \right).$$

Тоді

$$P'(t) = a_m u' Q(t), \quad \Phi_{m,j}(t) = C_{2m+1}^m u^{m+1} u' P(t),$$

$$\begin{aligned} \Phi'_{m,j}(t) &= C_{2m+1}^m u^m \left( (m+1 - 4mu - 6u) P(t) + a_m u (1 - 4u) Q(t) \right) = \\ &= C_{2m+1}^m u^m \left( -4a_m u^2 Q(t) + u \left( a_m Q(t) - 2(2m+3) P(t) \right) + (m+1) P(t) \right). \end{aligned}$$

Покладемо ще

$$W(u) := \left( -4a_m u^2 Q(t) + u \left( a_m Q(t) - 2(2m+3) P(t) \right) + (m+1) P(t) \right).$$

Ясно, що

$$W(u) = b_0 + b_1u + b_2u^2 + \dots + b_ju^j + b_{j+1}u^{j+1}.$$

Обчислюючи коефіцієнти при  $u^i$ ,  $i = \overline{0, j+1}$ , знайдемо

$$b_0 = m + 1, \quad b_i = 0, \quad 1 \leq i \leq j,$$

$$b_{j+1} = -a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} \cdot 2(2m + 2j + 3),$$

а отже,

$$W(u) = m + 1 - a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} \cdot 2(2m + 2j + 3)u^{j+1}.$$

Нарешті, позначаючи

$$\omega_m = a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} \cdot 2(2m + 2j + 3) = \frac{C_{2m+2j+1}^{m+j} \cdot 2(2m + 2j + 3)}{C_{2m+1}^m},$$

будемо мати

$$\Phi'_{m,j}(t) = C_{2m+1}^m u^m (-\omega_m u^{j+1} + m + 1), \quad -\omega_m u^{j+1} + m + 1 = 0, \quad u = \mathcal{N}_{m,j},$$

де  $\mathcal{N}_{m,j} = \left(\frac{m+1}{\omega_m}\right)^{\frac{1}{j+1}}$ .

Максимум  $\Phi_{m,j}(t)$  досягається в точці  $t_{m,j} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j}}}{2}$ ,  $\|\Phi_{m,j}\| = \Phi_{m,j}(t_{m,j})$ .  
Лема 2 доведена.

Нехай далі

$$\mathcal{J}(a, b) = \int_0^{\frac{1}{2}} ((1-t)t)^a (1-2t)^b dt, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

**Лема 3.** *Має місце наступна рівність*

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a!}{2^{a+1} \prod_{i=0}^a (b + 2i + 1)}, \quad a, b \in \mathbf{N}_0.$$

**Доведення.** Дійсно,

$$\mathcal{J}(0, b) = \frac{1}{2b + 1}.$$

Для довільного  $a \in \mathbf{N}$ , застосовуючи формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a}{2(b+1)} \mathcal{J}(a-1, b+2).$$

Таким чином, для  $0 < i \leq a$ ,  $b > 1$ ,

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-j+1)}{2^i(b+1)(b+3)\dots(b+2i-1)} \mathcal{J}(a-i, b+2i),$$

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a(a-1)(a-2)\dots 1}{2^a(b+1)(b+3)\dots(b+2a-1)} \mathcal{J}(0, b+2a), \quad \mathcal{J}(0, b+2a) = \frac{1}{2(b+2a+1)},$$

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a!}{2^{a+1} \prod_{i=0}^a (b+2i+1)}.$$

Лема 3 доведена.

Інтеграл  $\mathcal{J}(a, b)$  також можна обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a! \cdot [l]!}{2^{2a+2} \cdot (a + [l] + 1)!}, \quad \text{якщо } b = 2l + 1,$$

та

$$\mathcal{J}(a, b) = \frac{a! \cdot b! \cdot (a + [l]!)}{2 \cdot [l]!(2a + b + 1)!}, \quad \text{якщо } b = 2l,$$

які доводяться аналогічно.

Розглянемо далі поліном степеня  $jp$  відносно  $u$

$$\left(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \dots + a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{m+j-1} u^j\right)^p = \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^i, \quad (7)$$

де  $a_{m,j} = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+j-1})$ , а  $\mathcal{M}_i(a_{m,j})$  - це коефіцієнт при  $u^i$ . Наприклад,

$$\left(1 + a_0 u + a_0 a_1 u^2\right)^2 = 1 + 2a_0 u + \left(a_0^2 + 2a_0 a_1\right) u^2 + 2a_0^2 a_1 u^3 + a_0^2 a_1^2 u^4.$$

Отже,

$$\mathcal{M}_0(a_0, a_1) = 1, \quad \mathcal{M}_1(a_0, a_1) = 2a_0, \quad \mathcal{M}_3(a_0, a_1) = 2a_0^2 a_1, \quad \mathcal{M}_4(a_0, a_1) = a_0^2 a_1^2.$$

**Лема 4.** Для норм функцій  $\varphi_m(t)$  і  $\Phi_{m,j}(t)$  в просторі  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , мають місце наступні співвідношення

$$\|\varphi_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\mathcal{J}(mp + p, p)\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\Phi_{m,j}\|_p = 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \mathcal{J}(mp + p + i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зокрема, для натуральних значень  $p$

$$\mathcal{J}(mp + p + i, p) = \frac{(mp + p + i)!}{2^{mp+p+i+1} \prod_{k=0}^{mp+p+i} (p + 2k + 1)}, \quad i = \overline{0, jp},$$

і тому

$$\|\varphi_m\|_p = \frac{1}{2^{m+1}} C_{2m+1}^m \left(\frac{(mp + p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p} (p + 2k + 1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\Phi_{m,j}\|_p = \frac{1}{2^{m+1}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \frac{(mp + p + i)!}{2^i \prod_{k=0}^{mp+p+i} (p + 2k + 1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

**Доведення.** В силу (6), враховуючи, що  $u = t(1 - t)$ , маємо

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{m,j}(t)\right)^p &= \left(\varphi_m(t)\right)^p \left(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \cdots + a_m a_{m+1} a_{m+2} \cdots a_{m+j-1} u^j\right)^p = \\ &= \left(C_{2m+1}^m\right)^p u^{mp+p} (u')^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^i = \left(C_{2m+1}^m\right)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^{mp+p+i} (u')^p. \\ \|\Phi_{m,j}\|_p &= \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\Phi_{m,j}(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \left(C_{2m+1}^m\right)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \int_0^{\frac{1}{2}} u^{mp+p+i} (u')^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \mathcal{J}(mp + p + i, p)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Лема 4 доведена.

З лем 1 і 2 випливає наступна теорема.

**Теорема 1.** Для будь-яких значень  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , мають місце наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \Theta_{0,\infty}[m + j, m, n] &= 2C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right), \\ \Theta_{1,\infty}[m + j, m, n] &= \frac{2\delta_n}{2 + \delta_n} C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right). \end{aligned}$$

Для  $j = 1$  ці співвідношення містяться в [3].

З лем 1 і 4 випливають наступні твердження.

**Теорема 2.** Для будь-яких значень  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $j \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$  справедливі рівності

$$\begin{aligned} \Theta_{0,p}[m + 1, m, n] &= 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\mathcal{J}(mp + p, p)\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \Theta_{0,p}[m + j, m, n] &= 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp + p + i, p)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Для будь-яких значень  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $j \in \mathbf{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$  і для рівномірного розбиття, мають місце наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \Theta_{1,p}[m + 1, m, n] &= \frac{1}{2n + 1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\mathcal{J}(mp + p, p)\right)^{\frac{1}{p}}, \\ \Theta_{1,p}[m + j, m, n] &= \frac{1}{2n + 1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp + p + i, p)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Для  $p = 1$  результати теорем 2 і 3 містяться в [3].

Зауважимо, що для натуральних значень  $p$  інтеграли  $\mathcal{J}(mp + p + i, p)$  можна обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(mp + p + i, p) = \frac{(mp + p + i)!}{2^{mp+p+i+1} \prod_{k=0}^{mp+p+i} (p + 2k + 1)},$$

$$\mathcal{J}(mp + p + i, p) = \frac{2^{-(2mp+2p+2i+2)} \cdot (mp + p + i)! \cdot [l]!}{(mp + p + i + [l] + 1)!}, \quad \text{якщо } p = 2l + 1,$$

та

$$\mathcal{J}(mp + p + i, p) = \frac{(mp + p + i)! \cdot p! \cdot (mp + p + i + [l])!}{2 \cdot [l]! \cdot (2mp + 3p + 2i + 1)!}, \quad \text{якщо } p = 2l, \quad i = \overline{0, j\bar{p}}.$$

Отже, для натуральних значень  $p$

$$\Theta_{0,p}[m + 1, m, n] = \frac{1}{2^m} C_{2m+1}^m \left( \frac{(mp + p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p} (p + 2k + 1)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{0,p}[m + j, m, n] = \frac{1}{2^m} C_{2m+1}^m \left( \sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \frac{(mp + p + i)!}{2^i \prod_{k=0}^{mp+p+i} (p + 2k + 1)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m + 1, m, n] = \frac{1}{2^m(2n + 1)} C_{2m+1}^m \left( \frac{(mp + p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p} (p + 2k + 1)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m + j, m, n] = \frac{1}{2^m(2n + 1)} C_{2m+1}^m \left( \sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \frac{(mp + p + i)!}{2^i \prod_{k=0}^{mp+p+i} (p + 2k + 1)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Наведемо деякі значення інтерполяційних розхилів, які обчислені з точністю до 0,00001. Так,

$$\Theta_{0,\infty}[17, 3, n] = 0,35790, \quad \Theta_{1,\infty}[20, 5, n] = 0,02093 \quad \text{при } \delta_n = 0,15,$$

$$\Theta_{0,5}[25, 5, n] = 0,23862, \quad \Theta_{1,5}[3, 24, 20] = 0,00731.$$

Для будь-яких чисел  $r, m_0 \in \mathbf{N}_0$ ,  $k_0 \in \mathbf{N}$  і  $1 \leq p < \infty$  виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_{0,p}[m, 0, n] = \left( \frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_{r,\infty}[m, m_0, n] = \frac{1}{2} \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_{r,p}[m, 0, n] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Theta_{r,p}[m, k_0, n] < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$



причому, границі в рівностях не досягаються.

Для  $r = 0, 1$ ,  $p = 1, \infty$  рівності отримані в [3].

Зазначимо, що

$$\mathcal{A}_{r+1}(\Delta_n) \leq \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \leq \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\overline{\Delta_n}) = \mathcal{A}_r(\overline{\Delta_n}), \quad r \in \mathbf{N}_0,$$

$$0 < \mathcal{A}_r(\Delta_n) \leq \frac{2}{3}, \quad 0 < \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \leq \frac{2}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Тому для  $m \in \mathbf{N}_0$ ,  $j \in \mathbf{N}$ ,

$$0 < \Theta_{0,p}[m+j, m, n] < 1, \quad 0 < \Theta_{r,p}[m+j, m, n] < \frac{1}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Зазначимо, нарешті, що для  $r = 0$ ,  $1 \leq p < \infty$ , мають місце двосторонні оцінки

$$\left(p!\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=0}^p (p+2i+1)\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \Theta_{0,p}[m, 0, n] < \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{2^{m_0}} C_{2^{m_0}+1}^{m_0} \left((m_0 p + p)!\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{m_0 p + p} (p+2k+1)\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \Theta_{0,p}[m, m_0, n] < \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

### Бібліографічні посилання

1. Великин В.Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Известия АН СССР, Серия математическая, 1973.– 37, С.165-185.
2. Бовдуй Е.Ю., Великин В.Л. Об интерполяционном растворе некоторых подпространств эрмитовых сплайнов // Вісник Дніпропетровського університету, 2007, №8–С.54–56.
3. Великин В.Л. Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов // Вісник Дніпропетровського університету, 2009, т. 17, №6/1, вип. 14 – С.54–56.
4. Великин В.Л. О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов // Вісник Дніпропетровського університету, 2010, №6/1, вип. 15 – С.14–16.
5. Великин В.Л. О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов по разным сеткам узлов // Вісник Дніпропетровського університету, 2011, №6/1, вип. 16 – С.32–40.
6. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: Том 1/ Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман - Харьков: Вища школа, 1977. – 316 с.

Надійшла до редколегії 05.05.2014