ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.5

С. В. Гончаров

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: sergon.public@gmail.com*

О вложении классов функций, интегрируемых с весом на отрезке и удовлетворяющих условия типа Липшица

Отримане узагальнення теореми про вкладення Харді-Літтлвуда для деяких класів функцій, інтегровних з вагою на $[-1;1]$.

Ключові слова: **інтегральна метрика, умова Ліпшица, функція ваги.**

Получено обобщение теоремы о вложении Харди-Литтлвуда для некоторых классов функций, интегрируемых с весом на $[-1;1]$.

Ключевые слова: **интегральная метрика, условие Липшица, функция веса.**

We obtain generalization of Hardy and Littlewood inclusion theorem for some classes of functions being integrable with a weight on $[-1;1]$.

Key words: **integral metric, Lipschitz condition, weight function.**

Пусть $\alpha, \beta \in (-1;0]$; $p \in [1;+\infty)$; $\nu \in (0;1]$.

Вес $w\colon [-1;+1] \to \mathbb{R}$: $w(x) = e(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где $0 < C_1 \leqslant e(x) \leqslant C_2$.

Возьмём отрезок $[a;b] \subseteq [-1;1]$. $L^p_w[a;b]$ — пространство функций $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}$:

$$\|f\|_{L^p_w[a;b]} = \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Рассмотрим функциональные классы: $K\mathcal{L}^p_w[a;b]=\big\{f\in L^p_w[a;b]\colon \|f\|_{L^p_w[a;b]} \leqslant K\big\}$,

$$M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \Big\{f \in L^p_w[a;b]\colon \forall h \in (0; \tfrac{b-a}{2})$$

$$\psi^{(p)}_-(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu},$$

$$\psi^{(p)}_+(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+h}^{b} |f(x) - f(x-h)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\Big\}$$

$$M\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \Big\{f \in L^p_w[a;b]\colon \forall h \in (0; \tfrac{b-a}{2})$$

$$\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\Big\}$$

где $\overline{\varphi}(A;B)=\frac{1}{B-A}\int\limits_A^B \varphi(t)dt$. Также $\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h)=\Big(\int\limits_{a+h}^{b} |f(x)-f(x-h)|^p\overline{w}(x-h;x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Будем обозначать $H^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \bigcup\limits_{M>0} M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ и $\overline{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \bigcup\limits_{M>0} M\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$.

Если $e(x)\equiv 1$ и $\alpha=\beta=0$, т.е. $w(x)\equiv 1$, класс $\mathcal{L}^p_w[a;b]$ обращается в $\mathcal{L}^p[a;b]$, а классы $\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ и $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ — в $\mathcal{H}^{(\nu)}_p[a;b]=Lip_{[a;b]}(\nu;p)$.

Аналогично, $\mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu;p)=\bigcup\limits_{M>0} MLip_{[a;b]}(\nu;p)$.

Класс $MLip_{[a;b]}(\nu)=\big\{f\in C_{[a;b]}\mid \forall x_1,x_2\in[a;b]\colon |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^\nu\big\}$.

Сформулируем теорему о вложении Харди и Литтлвуда, полученную в [1]:

Теорема 1. *Если $f\in\mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu;p)$, то:*

a) при $\nu p>1$ функция f эквивалентна функции $f^*\in\mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu-\frac{1}{p})$;

b) при $\nu p\leqslant 1$ функция $f\in\mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q};q)$ для $\forall q\in\big[p;\frac{p}{1-\nu p}\big)$.

Здесь мы установим некоторое обобщение этого результата на весовой случай:

Теорема 2. *Если $\alpha\in(-1;0]$, $\beta\in(-1;0]$ и $f\in K\mathcal{L}^p_w[-1;1]\cap M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$, то:*

a) при $\nu p>1$ функция f эквивалентна функции $f^*\in M^*Lip_{[-1;1]}(\nu-\frac{1}{p})$;

b) при $\nu p\leqslant 1$ функция $f\in K^*\mathcal{L}^q_w[-1;1]\cap M^*\overline{\mathcal{H}}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}_{q;w}[-1;1]$ для $\forall q\in\big[p;\frac{p}{1-\nu p}\big)$; где константы K^* и M^* зависят от K, M, α, β, p, ν (и q), но не от функции f.

Используем частично модифицированное доказательство теоремы 1 из [2].

Доказательство. Начнём с оценок, связывающих w и $\overline{w}$.

Покажем, что $\forall d\in(0;\frac{1}{2})$, $\forall x\in(-1;1-d)$: $\overline{w}(x;x+d)\leqslant C'_{\alpha;\beta}w(x)$.

1) $x\in(-1;0]$: $\overline{w}(x;x+d)=\frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d}w(t)dt\leqslant C^{(1)}_\alpha\frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d}(1+t)^\beta dt\leqslant C^{(1)}_\alpha(1+x)^\beta\leqslant C^{(2)}_\alpha w(x)$.

2) $x\in[0;1-d)$: $\overline{w}(x;x+d)\leqslant C^{(3)}_\beta\frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d}(1-t)^\alpha dt=C^{(4)}_{\alpha;\beta}\frac{1}{d}\big((1-x)^{1+\alpha}-(1-x-d)^{1+\alpha}\big)\overset{y=1-x}{=}$

$=C^{(4)}_{\alpha;\beta}g(z)y^\alpha$, где $z=\frac{d}{y}\in[d;1)$ и $g(z)=\frac{1-(1-z)^{1+\alpha}}{z}\in C_{[0;1]}\Rightarrow|g(z)|\leqslant C^{(5)}_\alpha$ при $z\in[0;1]$.

Отсюда $\overline{w}(x;x+d)\leqslant C^{(6)}_{\alpha;\beta}y^\alpha\leqslant C^{(7)}_{\alpha;\beta}w(x)$. В любом случае $\overline{w}(x;x+d)\leqslant C^{(8)}_{\alpha;\beta}w(x)$.

Рассмотрев $\tilde{w}(x)=w(-x)$ и $\overline{\tilde{w}}(-x-d;-x)=\overline{\tilde{w}}(-x-d;(-x-d)+d)=\overline{w}(x;x+d)$, аналогично установим, что $\overline{w}(x;x+d)\leqslant C^{(9)}_{\alpha;\beta}w(x+d)$.

Иначе говоря, $\overline{w}(A;B)\leqslant C^{(10)}_{\alpha;\beta}w(A),C^{(10)}_{\alpha;\beta}w(B)$. Далее, $\forall x\in(A;B)$:

$$\overline{w}(A;B)=\frac{1}{B-A}\int\limits_A^B w(t)dt=\frac{1}{B-A}\Big(\int\limits_A^x w(t)dt+\int\limits_x^B w(t)dt\Big)\leqslant\frac{1}{x-A}\int\limits_A^x w(t)dt+\frac{1}{B-x}\int\limits_x^B w(t)dt=$$

$$=\overline{w}(A;x)+\overline{w}(x;B)\leqslant C^{(10)}_{\alpha;\beta}w(x)+C^{(10)}_{\alpha;\beta}w(x)=C_{\alpha;\beta}w(x)\qquad(1)$$

Отсюда $\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]\subseteq C'''\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$, то есть $H^{(\nu)}_{p;w}[a;b]\subseteq\overline{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ (2)

(пусть $f\in\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$, тогда $\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h)=\Big(\int\limits_a^{b-h}\big|f(x+h)-f(x)\big|\overline{w}(x;x+h)dx^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant$

$$\leqslant C'''\Big(\int\limits_a^{b-h}\big|...\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}=C'''\psi^{(p)}_-(f;a;b;h)\leqslant C'''h^\nu$$

так что $f\in C'''\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$). Кроме того, если отрезок $[A';B']\subseteq[A;B]$, то

$$\overline{w}(A;B)=\frac{1}{B'-A'}\int\limits_{A'}^{B'}\overline{w}(A;B)dx\leqslant C_{\alpha;\beta}\frac{1}{B'-A'}\int\limits_{A'}^{B'}w(x)dx=C_{\alpha;\beta}\overline{w}(A';B')\qquad(3)$$

С другой стороны, $\forall d \in (0; \frac{1}{2})$, $\forall x \in [-1+d; 1-d]$: $w(x) \leqslant C^{(11)}\overline{w}(x; x+d)$ (4)

$x \leqslant 0$: $w(x)\big[\overline{w}(x; x+d)\big]^{-1} \leqslant C^{(12)}(1+x)^{\beta}\big[\frac{1}{d}\int\limits_{x}^{x+d}(1+t)^{\beta}dt\big]^{-1} \leqslant C^{(12)}(1+\frac{d}{1+x})^{-\beta} \leqslant C^{(13)}$;

$x \geqslant 0$: $w(x)\big[\overline{w}(x; x+d)\big]^{-1} \leqslant C^{(14)}(1-x)^{\alpha}\big[\frac{1}{d}\int\limits_{x}^{x+d}(1-t)^{\alpha}\big]^{-1} \leqslant C^{(14)}(1-x)^{\alpha-\alpha} = C^{(14)}$;

в любом случае (4) имеет место. Аналогично $w(x) \leqslant C^{(15)}\overline{w}(x-d; x)$.

. . . .

Поскольку при $\alpha, \beta \leqslant 0$ вес $w(x) \geqslant C_3 > 0$, то интегралы, указывающие на принадлежность f классам $K\mathcal{L}$ и $M\mathcal{H}$ (из определений этих классов), мажорируют аналогичные интегралы без веса с некоторой константой $C_{\alpha;\beta;p} > 0$. Значит, $f \in M_1 Lip_{[-1;1]}(\nu; p)$, поэтому в случае (a) достаточно воспроизвести рассуждения из [2] (лемма 1 и теорема 1, п. 1) и получить искомое утверждение.

Далее рассматривается случай (b); не ограничивая общности, считаем $\nu p < 1$.

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Поскольку $w(x) \geqslant C_3 > 0$, то $\forall a, b \in [-1; 1]$:

$\int\limits_{a}^{b}|f(x)|dx = \int\limits_{a}^{b}|f(x)|w^{\frac{1}{p}}(x)w^{-\frac{1}{p}}(x)dx \overset{\text{НГ}(p,p')}{\leqslant} \big(\int\limits_{a}^{b}|f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} \cdot \big(\int\limits_{a}^{b}w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$

$\leqslant C_4\big(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} = C_4\|f\|_{L^p_w[-1;1]} < \infty$, т.е. $f \in L[-1; 1]$. Следовательно, для $x \in [-1; 1)$ и $v \in (0; 1-x)$ можно определить «усредняющую» функцию

$\Phi(x; v) = \frac{1}{v}\int\limits_{x}^{x+v}f(t)dt = \frac{1}{v}\int\limits_{0}^{v}f(x+u)du = \int\limits_{0}^{1}f(x+vz)dz$, и пусть $\Phi(x; 0) := f(x)$

Тогда для $h > 0$ и $x + h < 1$, ввиду непрерывности $f(\cdot)$ на $[x; x+h]$

$$f(x) - \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}f(x+u)du = \Phi(x; 0) - \Phi(x; h) = -\int\limits_{0}^{h}\Phi'_v(x; v)dv =$$

$$= -\int\limits_{0}^{h}\big(-\frac{1}{v^2}\int\limits_{0}^{v}f(x+u)du + \frac{1}{v}f(x+v)\big)dv = -\int\limits_{0}^{h}\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_{0}^{v}\big(f(x+v) - f(x+u)\big)du\Big\}dv$$

откуда $f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}f(x+u)du - \int\limits_{0}^{h}\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_{0}^{v}\big(f(x+v) - f(x+u)\big)du\Big\}dv$ (5)

и аналогично для $x - h > -1$, взяв усреднение $\Phi(x; v) = \frac{1}{v}\int\limits_{x-v}^{x}f(t)dt$:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}f(x-u)du - \int\limits_{0}^{h}\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_{0}^{v}\big(f(x-v) - f(x-u)\big)du\Big\}dv \tag{6}$$

. . . .

Пусть $[a; b] \subset [-1; 1]$: $\exists h > 0$: $[a; b+h] \subseteq [-1; 1]$. $\|f\|_{L^q_{w[a;b]}} = \big(\int\limits_{a}^{b}|f(x)|^q w(x)dx\big)^{\frac{1}{q}} \overset{(5)}{=}$

$$= \Big(\int\limits_{a}^{b}\Big|\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h}f(x+u)du - \int\limits_{0}^{h}\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_{0}^{v}\big[f(x+v) - f(x+u)\big]du\Big\}dv\Big|^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\Big(\int\limits_{a}^{b}\Big[\int\limits_{0}^{h}\big|f(x+u)\big|du\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\Big(\int\limits_{a}^{b}\Big[\int\limits_{0}^{h}\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_{0}^{v}\big|f(x+v) - f(x+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2 \tag{7}$$

1) Оценим сверху I_1, применив для внутреннего интеграла неравенство Гёльдера с показателями p и p': $I_1 \leqslant h^{-1}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^{\frac{q}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h du\big]^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$

$$= h^{-1+\frac{1}{p'}}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p w(x+u)w^{-1}(x+u)du\big]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^1 w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_x^{x+h} |f(t)|^p w(t)dt\big]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^1 w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p w(x)du\big]dx\big)^{\frac{1}{q}} = C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \big(\int\limits_0^h \big[\int\limits_a^b (...)dx\big]^{\frac{1}{p}\cdot p} du\big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} \Big(\int\limits_0^h \Big[\underbrace{\big(\int\limits_a^b |f(x+u)-f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}}_{=\psi_-^{(p)}(f;a;b+u;u)\leqslant Mu^\nu \leqslant M} + \underbrace{\big(\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}}_{\leqslant \|f\|_{L^p_w[-1;1]} \leqslant K}\Big]^p du\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} \big(\int\limits_0^h du\big)^{\frac{1}{q}} = C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \qquad (8)$$

2) Оценим $I_2 = \big(\int\limits_a^b T^q(x)w(x)dx\big)^{\frac{1}{q}}$, где $T(x) = \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v \big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\big\}dv$.

Вновь используя то, что из $\alpha, \beta \leqslant 0$ вытекает $f \in L^p[-1;1]$ и $f \in \mathrm{Lip}_{[-1;1]}(\nu;p)$, воспроизведём оценку $T(x)$ (и I_2) в [2, (17) – (19)]. Итак, для $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > 0$ и $\gamma = \max\big\{0; (1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) - \frac{\varepsilon}{2}\big\}$, обозначая $\mu = \varepsilon - \gamma + (1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$:

$$I_2 \leqslant C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v |f(x+v)-f(x+u)|^p du\big\}dv\Big] w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \big(\int\limits_a^b\int\limits_0^h\int\limits_0^v (...)du\,dv\,dx\big)^{\frac{1}{q}} = \big(\int\limits_0^h\int\limits_a^b\int\limits_0^v (...)du\,dx\,dv\big)^{\frac{1}{q}} = \big(\int\limits_0^h\int\limits_0^v\int\limits_a^b (...)dx\,du\,dv\big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v \big(\int\limits_a^b |f(x+v)-f(x+u)|^p w(x)dx\big)^{\frac{p}{p}} du\big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int\limits_0^v \big[\big(\int\limits_a^b |f(x+v)-f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\big(\int\limits_a^b |f(x)-f(x+u)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}\big]^p du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7' M h^\mu \big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big[\int\limits_0^v v^{\nu p}du\big]dv\big)^{\frac{1}{q}} = C_7' M h^\mu \big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q+\nu p+1}dv\big)^{\frac{1}{q}}$$

$\int\limits_0^h (...)dv$ сходится $\Leftrightarrow (-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q+\nu p+1 > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q}$; по определению γ, имеем $\frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma \leqslant \frac{2}{p}+\frac{3}{2}\varepsilon-(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. А $\frac{2}{p}+\big(\frac{3}{4}\nu-\frac{3}{4p}+\frac{3}{4q}\big)-\big(\frac{1}{p}+\nu-\frac{1}{q}-\nu\frac{p}{q}\big) < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\big(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\big) < 0$, что верно вследствие выбора q, откуда $\frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q}$. Поэтому

$$I_2 \leqslant C_8 M h^{\varepsilon-\gamma+(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon+(2+\nu p)\frac{1}{q}} = C_8 M h^{\frac{1}{p}+\nu-\frac{2}{p}+\frac{1}{q}} = C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \qquad (9)$$

Из (7), (8) и (9): $\|f\|_{L^q_w[a;b]} \leqslant C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (10)

Если взять функцию $\tilde{f}(x) = f(-x)$ и вес $\tilde{w}(x) = w(-x)$ (т.е. $w(x)$ с заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$, $e(x) \leftrightarrow e(-x)$), то легко видеть, что

$$\psi_-^{(p);w}(f;-1;1;h) = \psi_+^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f};-1;1;h) \text{ и } \psi_+^{(p);w}(f;-1;1;h) = \psi_-^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f};-1;1;h) \quad (11)$$

поэтому для $[a';b'] \subset [-1;1]$ такого, что $\exists h > 0$: $[a'-h;b'] \subseteq [-1;1]$, аналогично (10) получаем: $\|f\|_{L^q_w[a';b']} \leqslant C_9 K^{1-\frac{p}{q}}(M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{10} M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (12)

Ввиду (10) и (12): $\|f\|_{L^q_w[-1;1]} = \big(\int\limits_{-1}^{1}(...)\big)^{\frac{1}{q}} \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\Big(\big(\int\limits_{0}^{1}(...)\big)^{\frac{1}{q}} + \big(\int\limits_{-1}^{0}(...)\big)^{\frac{1}{q}}\Big) =$

$$= 2^{\frac{1}{q}}\big(\|f\|_{L^q_w[0;1]} + \|f\|_{L^q_w[-1;0]}\big) \leqslant C_{11}K^{1-\frac{p}{q}}(M+K)^{\frac{p}{q}}h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{12}Mh^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \quad (13)$$

где $h \in (0;1)$. Отсюда, в частности, $\|f\|_{L^q_w[-1;1]} < \infty$, так что $f \in K_2\mathcal{L}^q_w[-1;1]$ (14)

. . . .

Теперь рассмотрим $[a;b] \subset [-1;1]$ такой, что $\exists k > 0$: $[a;b+k] \subseteq [1;1]$, и оценим $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k)$ (при $a=-1$, $b=1-h$ и $k=h$ это будет $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h)$):

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k) = \Big(\int\limits_a^b |f(x+k)-f(x)|^q\overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_a^b |f(x+\tfrac{k}{2})-f(x)|^q\overline{w}(...)dx\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int\limits_a^b |f(x+k)-f(x+\tfrac{k}{2})|^q\overline{w}(...)dx\Big)^{\frac{1}{q}} = J^+ + J^- \quad (15)$$

Оценим, например, J^+. Пусть $h = \frac{k}{2}$, тогда $x + \frac{k}{2} + h = x + k \leqslant 1$. Ввиду (5):

$$f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big(f(x+v)-f(x+u)\big)du\Big\}dv$$

$$f(x+\tfrac{k}{2}) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+\tfrac{k}{2}+u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big(f(x+\tfrac{k}{2}+v)-f(x+\tfrac{k}{2}+u)\big)du\Big\}dv$$

По неравенству Минковского $J^+ \leqslant J_1^+ + J_2^+ + J_3^+ =$

$$= \frac{1}{h}\bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|du\Big]^q\overline{w}(x;x+k)dx\bigg)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q\overline{w}(x;x+k)dx\bigg)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big|f(x+\tfrac{k}{2}+v)-f(x+\tfrac{k}{2}+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q\overline{w}(x;x+k)dx\bigg)^{\frac{1}{q}} \quad (16)$$

1) Оценим J_1^+. Используя (1) и неравенство Гёльдера с показателями p и p',

$$J_1^+ \leqslant \frac{1}{h}\bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p du\Big]^{\frac{q}{p}}\cdot\Big[\int\limits_0^h du\Big]^{\frac{q}{p'}}\overline{w}(x;x+k)dx\bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}h^{-\frac{1}{p}}\bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_x^{x+h}\big|f(t+\tfrac{k}{2})-f(t)\big|^p w(t)dt\Big]^{\frac{q-p}{p}}\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p du\Big]^1\overline{w}(...)dx\bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}M^{1-\frac{p}{q}}k^{-\frac{1}{p}+\nu(1-\frac{p}{q})}\bigg(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p\overline{w}(x;x+k)du\Big]dx\bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}M^{1-\frac{p}{q}}k^{-\frac{1}{p}+\nu(1-\frac{p}{q})}\bigg(\int\limits_0^h\Big[\int\limits_{a+u}^{b+u}\big|f(t+\tfrac{k}{2})-f(t)\big|^p w(t)dt\Big]^{\frac{1}{p}}du\bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}Mk^{-\frac{1}{p}+\nu-\nu\frac{p}{q}+\nu\frac{p}{q}}\Big(\int\limits_0^h du\Big)^{\frac{1}{q}} = C'_{17}Mk^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \quad (17)$$

2) Вследствие (1): $J_2^+ \leqslant C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\big\}dv\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$
$= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} I_2$, так что ввиду (9) $J_2^+ \leqslant C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = C_{18} k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (18)

3) По (1): $J_3^+ \leqslant C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v\big|f(x+\frac{k}{2}+v)-f(x+\frac{k}{2}+u)\big|du\big\}dv\Big]^q w(x+\frac{k}{2})dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$
$= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{a+\frac{k}{2}}^{b+\frac{k}{2}}\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v\big|f(y+v)-f(y+u)\big|du\big\}dv\Big]^q w(y)dy\Big)^{\frac{1}{q}}$; дальнейшая оценка J_3^+ аналогична оценке I_2 (с $a \leftarrow a+\frac{k}{2}$, $b \leftarrow b+\frac{k}{2}$). Выходит, $J_3^+ \leqslant C_{19} h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (19)

Из (17), (18), (19) и (16) вытекает, что $J^+ \leqslant C_{20} M k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$.

J^- оценивается аналогично J^+, только вместо представления (5) используется представление (6) и модуль непрерывности $\psi_+^{(p)}$ вместо $\psi_-^{(p)}$. Следовательно, учитывая (15), $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k) \leqslant C_{21} k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$; в частности, $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{22} h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$.

Это означает, что $f \in M_2 \overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ (20)

Таким образом, $f \in K_2 \mathcal{L}_w^q[-1;1] \cap M_2 \overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$.

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $K\mathcal{L}_w^p[-1;1] \cap M\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$.

Возьмём $\forall h \in (0;h_0)$, где $h_0 = \frac{1}{4}$, и рассмотрим

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h) \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\big(\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\tfrac{1}{2};h) + \overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)\big) \tag{21}$$

1) Оценим $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)$. Введём последовательность «средних» для $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$:

$$f_n^+(x) := \frac{n}{1-x}\int\limits_x^{x+\frac{1-x}{n}} f(t)dt = \frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u)du = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\big(x+(1-x)v\big)dv$$

$f_n^+ \in C_{(0;1)}$ ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что так определённые $f_n^+(\cdot)$ удовлетворяют условиям п. (I) (с заменой $[-1;1]$ на $[0;1]$). $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} = \Big(\int\limits_0^1\Big|\frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u)du - \frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x)du\Big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} =$

$$= n\Big(\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1-x}\big(f(x+u)-f(x)\big)w^{\frac{1}{p}}(x)\chi(\tfrac{1-x}{n}-u)du\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)\chi^p(\frac{1-x}{n}-u)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du$ (по обобщённому неравенству Минковского), где $\chi(z) = \begin{cases} 0, & z<0, \\ 1, & z \geqslant 0. \end{cases}$ $\chi(\frac{1-x}{n}-u) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{n} < u \Leftrightarrow x > 1-nu$, поэтому

$$\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_0^{1-nu}(1-x)^{-p}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1}\Big(\int\limits_0^{1-u}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant M\int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\nu}du = M'n^{-\nu} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Значит, $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (22)

$\|f_n^+\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant \|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} + \|f\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant M' + K = K_3 < \infty$: $f_n^+ \in K_3\mathcal{L}_w^p[0;1]$ (23)

Взяв $\forall h \in (0;h_0)$, оценим $\psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) = \Big(\int\limits_0^{1-h} \big|f_n^+(x+h) - f_n^+(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} =$

$$= n\Big(\int\limits_0^{1-h}\Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\big[f(x+h+(1-x-h)v) - f(x+(1-x)v)\big]w^{\frac{1}{p}}(x)dv\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_0^{1-h}\big|f(x+(1-x)v+h(1-v)) - f(x+(1-x)v)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}dv$$

Пусть $x+(1-x)v = y$, $h(1-v) = \tilde h$, тогда: $x = \frac{y-v}{1-v}$, $1-x = \frac{1-v-y+v}{1-v} = \frac{1-y}{1-v}$; $w(x) \leqslant C_{23}(1-x)^\alpha$, и т.к. $1 \geqslant 1-v \geqslant 1-\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$, то $w(x) \leqslant C_{24}(1-y)^\alpha \leqslant C_{25}w(y)$ (ибо $(1+y)^\beta \geqslant C_{26}$); $dx = (1-v)^{-1}dy$; пределы $0 \to v$, $1-h \to 1-\tilde h$. Таким образом,

$$\psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) \leqslant C_{27}n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_v^{1-\tilde h}\big|f(y+\tilde h)-f(y)\big|^p w(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}dv \leqslant C_{27}Mn\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\tilde h^\nu dv \leqslant C_{27}Mh^\nu$$

Аналогично $\psi_+^{(p)}(f_n^+;0;1;h) \leqslant C_{28}Mh^\nu$. Значит, $f_n^+ \in M_3\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1]$ (24)

Итак ((23) и (24)), функции f_n^+ действительно удовлетворяют условиям п. (I).

Заметим, что K_3 и M_3 не зависят от n.

. . . .

Теперь рассмотрим непрерывные на $(0;1)$ функции $f_{n;m}^+(x) = f_n^+(x) - f_m^+(x)$.

Во-первых, $\forall h \in (0;h_0)$: $\psi_-^{(p)}(f_{n;m}^+;0;1;h) = \|f_{n;m}^+(x+h) - f_{n;m}^+(x)\|_{L_w^p[0;1-h]} =$

$$= \big\|\big(f_n^+(x+h) - f_n^+(x)\big) - \big(f_m^+(x+h) - f_m^+(x)\big)\big\|_{L_w^p[0;1-h]} \leqslant$$

$$\leqslant \psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) + \psi_-^{(p)}(f_m^+;0;1;h) \overset{(24)}{\leqslant} 2M_3h^\nu = M_4h^\nu$$

и $\psi_+^{(p)}(f_{n;m}^+;0;1;h) \leqslant \psi_+^{(p)}(f_n^+;0;1;h) + \psi_+^{(p)}(f_m^+;0;1;h) \leqslant M_4h^\nu$.

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$ и укажем, что, во-вторых, из (22) вытекает:

$$\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n,m \geqslant N\colon \|f_{n;m}^+\|_{L_w^p[0;1]} = \|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^p[0;1]} < \varepsilon$$

Иными словами, $f_{n;m}^+$ при $n,m \geqslant N_\varepsilon$ также удовлетворяет условиям п. (I):

$$f_{n;m}^+ \in \varepsilon\mathcal{L}_w^p[0;1] \cap M_4\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1]$$

Поэтому, в соответствии с (13), для таких n и m

$$\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}}(M_4+\varepsilon)^{\frac{p}{q}}h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{30}M_4h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Положим $h = \varepsilon^\tau$, где $\tau > 0$: тогда (для $\varepsilon < 1$) $\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant$

$$\leqslant C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(M_4+\varepsilon)^{\frac{p}{q}} + C_{30}M_4\varepsilon^{\tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leqslant C_{31}\varepsilon^{\min\left\{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q});\tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\right\}} = C_{31}\varepsilon^\lambda$$

Выберем τ настолько малым, чтобы $1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})>0$ — тогда и $\lambda > 0$, а значит,

$$\|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^q[0;1]} = \|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant C_{31}\varepsilon^\lambda$$

То есть $\{f_n^+\}_{n=2}^\infty$ фундаментальна в $L_w^q[0;1]$, поэтому ввиду полноты этого пространства она сходится к некоторой функции $\overline{f} \in L_w^q[0;1]$. Но, учитывая (22), функции f и $\overline{f}$ эквивалентны ($\|f-\overline{f}\|_{L[a;b]} \leqslant C_p^{(1)}\big(\|f-f_n^+\|_{L^p[a;b]} + C_{p;q}^{(2)}\|f_n^+-\overline{f}\|_{L^q[a;b]}\big)$), и можно считать, что $\|f_n^+ - f\|_{L_w^q[0;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (25)

Применим п. (I) к функциям f_n^+. Во-первых, по (14), $\|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant K_5 < \infty$.

Отсюда $\|f\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant \|f - f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} + \|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} < \infty$, и $f \in K_6\mathcal{L}_w^q[0;1]$ (26)

Во-вторых, по (20), $\|\big[f_n^+(x+h) - f_n^+(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant M_6h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (27)

Так что по неравенствам треугольника, (1) и (27):

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h) = \|\big[f(x+h)-f(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant$$
$$\leqslant \|\big[f(x+h)-f_n^+(x+h)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+$$
$$+\|\big[f_n^+(x+h)-f_n^+(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+\|\big[f_n^+(x)-f(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant$$
$$\leqslant C''_{\alpha;\beta}\|\big[f(x+h)-f_n^+(x+h)\big]w^{\frac{1}{q}}(x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+M_6 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+$$
$$+C''_{\alpha;\beta}\|\big[f_n^+(x)-f(x)\big]w^{\frac{1}{q}}(x)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant M_6 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+2C''_{\alpha;\beta}\|f_n^+-f\|_{L^q_w[0;1]}$$

Взяв достаточно большое $n=n(h)$, для которого $\|f_n^+-f\|_{L^q_w[0;1]} < h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (это можно сделать ввиду (25)), получим: $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h) \leqslant M_7 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (28)

2) Оценка $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\frac{1}{2};h)$ аналогична оценке $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)$.

«Средние» функции определяем «симметрично»: для $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$

$$f_n^-(x) := \tfrac{n}{1+x}\int\limits_{x-\frac{1+x}{n}}^{x} f(t)dt = \tfrac{n}{1+x}\int\limits_0^{\frac{1+x}{n}} f(x-u)du = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\big(x-(1+x)v\big)dv$$

затем показываем, что $\|f\|_{L^q_w[-1;\frac{1}{2}]} \leqslant K_{10} < \infty$ (29)

и $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\frac{1}{2};h) \leqslant M_{11} h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (30)

. . . .

Из (26) и (29): $\|f\|_{L^q_w[-1;1]} \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\big(\|f\|_{L^q_w[-1;\frac{1}{2}]}+\|f\|_{L^q_w[0;1]}\big) \leqslant 2^{\frac{1}{q}}(K_6+K_{10}) = K_{12}$, следовательно, $f\in K_{12}\mathcal{L}^q_w[-1;1]$. А из (21), (28) и (30): $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h) \leqslant M_{12} h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. Эти оценки позволяют утверждать, что $f\in M_{12}\overline{\mathcal{H}}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}_{q;w}[-1;1]$.

Получается, $f\in K^*\mathcal{L}^q_w[-1;1]\cap M^*\overline{\mathcal{H}}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}_{q;w}[-1;1]$, и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha,\beta\in(-1;0]$. *Тогда:*

a) при $\nu p>1$ $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1] \subseteq C_{34}\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1] \qquad \big(\subseteq C'_{34}Lip_{[-1;1]}(\nu-\frac{1}{p})\big)$;

b) при $\nu p\leqslant 1$, *если* $\nu p>-\alpha$ *и* $\nu p>-\beta$, *то* $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1] \subseteq C_{34}\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$.

Доказательство. Рассуждения, приводящие к этому результату, в основном повторяют схему доказательства теоремы 2. Пусть $f\in\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$:

$$\forall h\in(0;\tfrac{1}{2})\colon\ \overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h) = \Big(\int\limits_{-1}^{1-h}\big|f(x+h)-f(x)\big|^p\overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant h^\nu$$

Оценим $\psi_-^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant 2^{\frac{1}{p}}\Big(\Big[\int\limits_{-1}^{-1+h}|f(x+h)-f(x)|^p w(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}}+\Big[\int\limits_{-1+h}^{1-h}(\ldots)\Big]^{\frac{1}{p}}\Big) = H_1+H_2$.

В H_2, по (4), $w(x)\leqslant C_{36}\overline{w}(x;x+h)$, откуда $H_2\leqslant C_{37}\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h)\leqslant C_{37}h^\nu$.

Оценим H_1. В случае (a) возьмём $\forall q>\frac{p}{1+\beta}$, а в случае (b) $\nu>-\frac{\beta}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{1+\beta}<\frac{p}{1-\nu p}$, и пусть $q\in\big(\frac{p}{1+\beta};\frac{p}{1-\nu p}\big)$. При этом $\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$. По неравенству Гёльдера

$$H_1 \leqslant \Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\big|f(x+h)-f(x)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h} w^{\frac{q}{q-p}}(x)dx\Big)^{\frac{q-p}{pq}} = H_{1;1}\cdot H_{1;2}$$

$H_{1;2}\leqslant C_{38}\Big(\int\limits_0^h t^{-\frac{\beta q}{q-p}}dt\Big)^{\frac{q-p}{pq}} = C_{39}h^{\frac{\beta}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Покажем, что $H_{1;1}\leqslant C_{40}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Аналогично оценке $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k)$ и J^+ в т. 2, используя (5) ($f \in L[-1;1]$, т.к. $f \in L^p_w[-1;1]$) и неравенство Минковского:

$$H_{1;1} \leqslant \tfrac{1}{h}\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_0^h\big|f(x+h+u)-f(x+u)\big|du\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_0^h \tfrac{1}{v^2}\Big\{\int_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_0^h \tfrac{1}{v^2}\Big\{\int_0^v\big|f(x+h+v)-f(x+h+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} = J_1+J_2+J_3$$

1) $J_1 \leqslant h^{-\frac{1}{p}}\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_0^h\big|f(x+h+u)-f(x+u)\big|^p\frac{\overline{w}(x+u;x+h+u)}{\overline{w}(x+u;x+h+u)}du\Big]^{\frac{q}{p}}dx\Big)^{\frac{1}{q}}$.

$$\overline{w}(x+u;x+h+u)=\tfrac{1}{h}\int_{x+u}^{x+h+u}w(t)dt\geqslant C_{41}\cdot\tfrac{1}{h}\int_{x+u}^{x+h+u}(1+t)^\beta dt\geqslant C_{41}(1+x+h+u)^\beta\geqslant C'_{41}h^\beta;$$

$$J_1 \leqslant C_{42}h^{-\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}}\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_x^{x+h}\big|f(z+h)-f(z)\big|^p\overline{w}(z;z+h)dz\Big]^{\frac{q}{p}}dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_{42}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$$

2) В J_2, оценивая $T(x)=\int_0^h\frac{1}{v^2}\Big\{\int_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\Big\}dv$, приходим к $T(x)\leqslant$ $\leqslant T_1^{\frac{1}{p'}}(x)\cdot T_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(x)\cdot T_3^{\frac{1}{q}}(x)$; далее, $T_2(x)\leqslant\int_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\Big(\int_0^{h-t}\big|f(x+u+t)-f(x+u)\big|^p du\Big)dt=$ $=\int_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\Big(\int_x^{x+h-t}\big|f(z+t)-f(z)\big|^p\frac{\overline{w}(z;z+t)}{\overline{w}(z;z+t)}dz\Big)dt$. И $\overline{w}(z;z+t)\geqslant C_{43}(1+z+t)^\beta\geqslant C_{43}(2h)^\beta$,

$$T_2(x)\leqslant C_{44}h^{-\beta}\int_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\big(\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;t)\big)^p dt\leqslant C'_{44}h^{-\beta+1+\nu p-\gamma\frac{pq}{q-p}}$$

Затем, $J_2\leqslant C_{45}h^{\varepsilon-\gamma+(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\beta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\times$

$$\times\Big(\int_{-1}^{-1+h}\Big[\int_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int_0^v|f(x+v)-f(x+u)|^p du\Big\}dv\Big]dx\Big)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=C_{45}h^{(\dots)}\Big(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int_0^v\Big(\int_{-1}^{-1+h}|f(x+v)-f(x+u)|^p\frac{\overline{w}(x+u;x+v)}{\overline{w}(x+u;x+v)}dx\Big)du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Тут также $\overline{w}(x+u;x+v)\geqslant C_{46}(1+x+v)^\beta\geqslant C_{46}(2h)^\beta$, и

$$J_2\leqslant C_{47}h^{(\dots)-\frac{\beta}{p}}\Big(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int_0^v\big[\overline{\psi}^{(p)}(f;-1+u;-1+h+v;v-u)\big]^p du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{47}h^{(\dots)-\frac{\beta}{p}}\Big(\int_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int_0^v(v-u)^{\nu p}du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}=C_{49}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$$

3) J_3 оценивается аналогично J_2; в итоге, $J_3\leqslant C_{52}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

Соединяя оценки J_1, J_2 и J_3, получаем: $H_{1;1}\leqslant C_{40}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$. Введём средние

$$f_n^-(x):=\tfrac{n}{1+x}\int_{x-\frac{1+x}{n}}^{x}f(t)dt=\tfrac{n}{1+x}\int_0^{\frac{1+x}{n}}f(x-u)du=n\int_0^{\frac{1}{n}}f\big(x-(1+x)v\big)dv$$

непрерывные из-за абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что $f_n^- \in L_w^p[-1;0]$: $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1;0]} \leqslant \|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]} + \|f\|_{L_w^p[-1;0]}$, а

$$\|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]} = n\Big(\int\limits_{-1}^{0}\Big|\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}} \tfrac{1}{1+x}\big[f(x)-f(x-u)\big]w^{\frac{1}{p}}(x)\chi(\tfrac{1+x}{n}-u)du\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{0} \tfrac{1}{(1+x)^p}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p w(x)\chi^p(\tfrac{1+x}{n}-u)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1+nu}^{0}(1+x)^{-p}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant C_{53}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}u^{-1}\Big(\int\limits_{-1+u}^{0}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p\overline{w}(x-u;x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$\leqslant M\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}u^{-1+\nu}du = M'n^{-\nu} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1;0]} < \infty \Leftrightarrow f_n^- \in L_w^p[-1;0]$.

Теперь возьмём $\forall h \in (0;\frac{1}{2})$ и оценим $\overline{\psi}^{(p)}(f_n^-;-1;0;h) =$

$$= n\Big(\int\limits_{-1}^{-h}\Big|\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\big[f(x{+}h-(1{+}x{+}h)v)-f(x-(1{+}x)v)\big]\overline{w}^{\frac{1}{p}}(x;x{+}h)dv\Big|dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{-h}\big|f(x(1-v)-v+h(1-v))-f(x(1-v)-v)\big|^p\overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}}dv$$

Пусть $x(1{-}v){-}v{=}y$, $h(1{-}v){=}\tilde{h}$, тогда $x{=}\frac{y+v}{1-v}$, $1{+}x{=}\frac{1+y}{1-v}$; $dx{=}(1{-}v)^{-1}dy$; $-1{\to}{-1}$, $-h \to -\tilde{h}{-}v$; $C_{54}(1{+}x)^\beta \leqslant w(x) \leqslant C_{54}'(1{+}x)^\beta$, и так же делаем замену $t(1{-}v){-}v = s$ в $\overline{w}(x;x+h) \leqslant C_{55}\frac{1}{\tilde{h}}\int\limits_{y}^{y+\tilde{h}}(1+s)^\beta ds \leqslant C_{56}\overline{w}(y;y+\tilde{h})$, откуда $\overline{\psi}^{(p)}(f_n^-;-1;0;h) \leqslant$

$$\leqslant C_{57}n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{-\tilde{h}-v}\big|f(y+\tilde{h})-f(y)\big|^p\overline{w}(y;y+\tilde{h})dy\Big)^{\frac{1}{p}}dv \leqslant C_{57}n\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}\tilde{h}^\nu dv \leqslant C_{58}h^\nu$$

То есть $f_n^- \in M_{13}\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;0]$. Поэтому, применяя для f_n^- результаты п. (I): $\|f_n^-(x+h)-f_n^-(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant C_{59}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$. Аналогично оценке $\|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]}$,

$$\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant \ldots \leqslant \int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}u^{-1}\Big(\int\limits_{-1+u}^{0}\big|f(x)-f(x-u)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}du$$

$\overline{w}(x;x+k) \geqslant C_3$, так что $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq C_{61}\mathcal{H}_p^{(\nu)}[-1;1]$. То есть $f \in C_{61}Lip(\nu;p)$, а значит, к ней применима теорема 1: $f \in C_{62}\mathcal{H}_q^{(\xi)}[-1;1]$, где $\xi = \nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$.

Поэтому $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant C_{63}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}u^{-1+\xi}du = C_{64}n^{-\xi} \xrightarrow[n\to 0]{} 0$.

Наконец, $H_{1;1} = \|f(x+h)-f(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant$

$$\leqslant \|f_n^-(x+h)-f(x+h)\|_{L^q[-1;-1+h]} + \|f_n^-(x+h)-f_n^-(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} +$$

$+\|f_n^-(x){-}f(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant C_{59}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}{+}2\|f_n^-{-}f\|_{L^q[-1;0]}$. Выбрав такое $n = n(h)$, что $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$, приходим к: $H_{1;1} \leqslant C_{65}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

Объединяя оценки $H_{1;1}$, $H_{1;2}$ и H_1 с H_2, получаем: $\psi_-^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{35}h^{\nu}$. Аналогично можно показать, что $\psi_+^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{35}h^{\nu}$, отчего $f \in M_{14}\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Соединив её с (2), при $\nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$ получаем: $H_{p;w}^{(\nu)}[a;b] = \overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[a;b]$.

Поэтому в условиях п. (b) теоремы 2, при дополнительных ограничениях на p, $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq \overline{H}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ для $\forall q \in \big[p;\frac{p}{1-\nu p}\big)$ и $H_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq H_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ для $\forall q \in \big[p;\frac{p(1+\min\{\alpha;\beta\})}{1-\nu p}\big)$ (второе включение вытекает из теоремы 3 при $p \leftarrow q$ и $\nu \leftarrow \nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$). А именно, должно быть $p < \frac{p(1+\min\{\alpha;\beta\})}{1-\nu p} \Leftrightarrow \nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$.

. . . .

Теперь рассмотрим класс $M\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a;b] = \big\{f \in L_w^p[a;b]\colon \forall h \in (0;\frac{b-a}{2})$

$$\widehat{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+h}^{b-h} |f(x+h)-f(x-h)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\Big\}$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha,\beta \in (-1;0]$. *Тогда* $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] = \widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$*; точнее,*

$$\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq M'\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \text{ и } \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq M''\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$$

Доказательство. 1) Пусть $f \in \widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. Для $\forall h \in (0;1)$

$$\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h) = \Big(\int\limits_{-1}^{1-h} |f(x+h)-f(x)|^p \overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant}$$

$$\leqslant C_{66}\Big(\int\limits_{-1}^{1-h} |f(x+h)-f(x)|^p w(x+\tfrac{h}{2})dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \widehat{\psi}^{(p)}(f;-1;1;\tfrac{h}{2}) \leqslant M'h^{\nu}$$

2) Пусть $f \in \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. По (4): $w(x) \leqslant C_{67}\overline{w}(x-h;x)$ и $w(x) \leqslant C_{67}\overline{w}(x;x+h)$, $w(x) \leqslant C_{67}\cdot\frac{1}{2}\big[\overline{w}(x-h;x)+\overline{w}(x;x+h)\big] = C_{67}\overline{w}(x-h;x+h)$, значит, $\widehat{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant$ $\leqslant C_{68}\Big(\int\limits_{-1+h}^{1-h} |f(x+h)-f(x-h)|^p \overline{w}(x-h;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} = C_{68}\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;2h) \leqslant M''h^{\nu}$.

Таким образом, в силу (2) и теорем 3, 4 при $\nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$ классы $H_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$, $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$ и $\widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$ совпадают.

Библиографические ссылки

1. *Hardy G. H.* A convergence criterion for Fourier series. // G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1928. — 28. — P. 122–147.
2. *Ильин В. П.* Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтльвуда. // В. П. Ильин // Труды МИАН СССР. — 1959. — Т. 53. — С. 128–144.

Надійшла до редколегії 24.04.2014