ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 512.562

Н. В. Калашнiкова*

* Днiпропетровский нацiональний унiверситет iм. Олеся Гончара,
Днiпропетровськ 49050. *E-mail:natalja_kn@ukr.net*

L-пiдгрупи на деяких скiнченних групах

Розглянутi деякi властивостi L-пiдгруп на скiнченних групах. Описанi множини L-пiдгруп на циклiчних групах порядку p^n, де p – просте число, порядку pq, де p, q – рiзнi простi числа, квазiциклiчнiй групi типу p^∞, нециклiчнiй групi порядку p^2, де p – просте число.

Ключовi слова: **решiтка, група, перетин, L-пiдгрупа, a-рiвнева множина.**

Рассмотрены некоторые свойства L-подгрупп на конечных группах. Описаны множества L-подгрупп на циклических группах порядка p^n, где p – простое число, порядка pq, где p, q – разные простые числа, квазициклической группе типа p^∞, нециклической группе порядка p^2, где p – простое число.

Ключевые слова: **решетка, группа, пересечение, L-подгруппа, a-уровневое множество.**

Some properties of L-subgroups of finite groups are considered. Sets of L-subgroups of cyclic groups of an order p^n, where p is a prime number, of an order pq, where p, q are a prime numbers, of quasicyclic group of type of p^∞, of uncyclic group of an order p^2, where p is a prime number, are described.

Key words: **lattice, group, intersection, L-subgroup, a-level set.**

Нехай L – решiтка. L-пiдмножиною на множинi X називається функцiя iз X в L.

Множина всiх L-пiдмножин X позначається L^X.

Нехай $\mu \in L^X$, $a \in L$. Множина

$$\mu_a = \{x | x \in X, \mu(x) \geq a\}$$

називається a-рiвневою множиною μ. L-пiдмножина μ групи G називається L-пiдгрупою на групi G, якщо

(1) $\mu(xy) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y)$ для будь-яких $x, y \in G$,

(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ для будь-якого $x \in G$.

Множина всiх L-пiдгруп на групi G позначається $L(G)$.

Твердження 1. Нехай μ – L-пiдгрупа на групi G, e – одиничний елемент групи G. Тодi для будь-якого $x \in G$ є справедливими висловлювання:

(1) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

(2) $\mu(e) \geq \mu(x)$.

(3) $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ для будь-якого $n \in Z$.

Доведення. (1) $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1})$, отже, $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

(2) $\mu(e) = \mu(x \cdot x^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x^{-1}) = \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x)$.

(3) Нехай $n \in N$. Доведемо твердження методом математичної iндукцiї.

$$\mu(x^2) = \mu(x \cdot x) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Припустимо, що твердження доведено для $n = k$ і доведемо його для $n = k + 1$.

$$\mu(x^{k+1}) = \mu(x \cdot x^k) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x^k) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Якщо $n \in Z$ і $n \leq 0$, то висловлювання випливає із (1) і (2).

Твердження 2. Нехай $\mu \in L^G$. Тоді μ є L-підгрупою на групі G тоді й тільки тоді, коли

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y) \text{ для будь-яких } x, y \in G.$$

Доведення. Припустимо, що $\mu \in L(G)$, $x, y \in G$. Тоді

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y^{-1}) = \mu(x) \bigwedge \mu(y).$$

Нехай тепер для будь-яких $x, y \in G$ є справедливим: $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y)$. Тоді $\mu(e) \geq \mu(x)$ для будь-якого $x \in G$. Дійсно,

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Далі,

$$\mu(x^{-1}) = \mu(ex^{-1}) \geq \mu(e) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Отже,

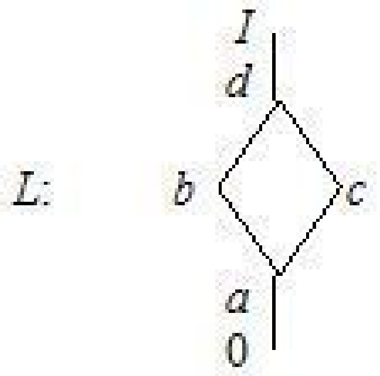
$$\mu(xy) = \mu(x(y^{-1})^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y).$$

Твердження 3. Нехай $\mu \in L^G$. Тоді μ є L-підгрупою на групі G тоді й тільки тоді, коли μ_a – підгрупа G для будь-якого $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$.

Доведення. Нехай $\mu \in L(G)$, $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$. Оскільки $e \in \mu_a$, то множина μ_a непуста. Припустимо, що $x, y \in \mu_a$. З того, що $\mu(x) \geq a$ і $\mu(y) \geq a$ виходить, що $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y) \geq a \bigwedge a = a$, тобто $(xy^{-1}) \in \mu_a$, а, значить, μ_a – підгрупа групи G.

Припустимо тепер, що μ_a є підгрупою G для будь-якого $\mu \in L(G)$, $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$. Тоді $\mu(x) \leq \mu(e)$ для будь-якого $x \in G$. Дійсно, нехай $\mu(x) = a$. Тоді $\mu_a \leq G$, а, значить, $e \in \mu_a$, тобто $\mu(e) \geq a = \mu(x)$. Нехай $x, y \in G$, $\mu(x) = a$ $\mu(y) = b$. Позначимо $c = a \bigwedge b$. Тоді $x, y \in \mu_c$. Оскільки $a \leq \mu(e)$ і $b \leq \mu(e)$, то $c \leq \mu(e)$. Звідси виходить, що $\mu_c \leq G$, тобто $xy^{-1} \in \mu_c$, а, значить, $\mu(xy^{-1}) \geq c = a \bigwedge b = \mu(x) \bigwedge \mu(y)$. Це означає, що μ є L-підгрупою на групі G.

Приклад 1. Нехай $G = S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, L – решітка і



Задамо μ за правилом:

$$\mu((23)) = \mu((123)) = \mu((132)) = a, \mu((12)) = b, \mu((13)) = c, \mu(\varepsilon) = d.$$

Покажемо, що μ – L-підгрупа на групі G.

$\mu_0 = \mu_a = G, \mu_b = \{\varepsilon, (12)\} =< (12) >\leq G, \mu_c = \{\varepsilon, (13)\} =< (13) >\leq G, \mu_d = \{\varepsilon\} \leq G$. Згідно з твердженням 3, $\mu \in L(G)$.

Приклад 2. Нехай G і L – відповідно група і решітка із прикладу 1.

Задамо тепер μ по іншому:

$$\mu((12)) = \mu((13)) = \mu((123)) = \mu((132)) = a, \mu((23)) = b, \mu(\varepsilon) = I.$$

Тоді μ також є L-підгрупою на групі G. Дійсно,

$$\mu_0 = \mu_a = G, \mu_b = \{\varepsilon, (23)\} =< (23) >\leq G, \mu_c = \mu_d = \mu_I = \{\varepsilon\} \leq G.$$

Твердження 4. Нехай G – група, x – елемент групи G порядку n, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $k \in N$, $(k, n) = 1$. Тоді $\mu(x^k) = \mu(x)$.

Доведення. З того, що μ є L–підгрупа виходить, що $\mu(x^k) \geq \mu(x)$. Оскільки $(k, n) = 1$, то існує натуральне число m таке, що $(x^k)^m = x$. Звідси

$$\mu(x) = \mu((x^k)^m) \geq \mu(x^k).$$

Отже, $\mu(x^k) = \mu(x)$.

Наслідок. Нехай p – просте число, G – група порядку p, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді $\mu(x) = \mu(y)$ для будь-яких $x, y \in G \setminus \{e\}$.

Нехай p – просте число, $|G| = p$ і L – ланцюг із n елементів. Покажемо, що $|L(G)| = \frac{n(n+1)}{2}$. Дійсно, із твердження 4 виходить, що коли $\mu \in L(G)$, то $\mu(G)$ є або одноелементною, або двоелементною підмножиною L. Звідси $|L(G)| = n + C_n^2 = n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Нехай p – просте число, $|G| = p$ і L – решітка із прикладу 1. Тоді $|L(G)| = 20$. Дійсно, для $\mu(G)$ є одна і тільки одна із можливостей:

1) $\mu(G) = \{\alpha\}$, де $\alpha \in L$; 2) $\mu(G) = \{0, a\}$; 3) $\mu(G) = \{0, b\}$; 4) $\mu(G) = \{0, c\}$; 5) $\mu(G) = \{0, d\}$; 6) $\mu(G) = \{0, I\}$; 7) $\mu(G) = \{a, b\}$; 8) $\mu(G) = \{a, c\}$; 9) $\mu(G) = \{a, d\}$; 10) $\mu(G) = \{a, I\}$; 11) $\mu(G) = \{b, d\}$; 12) $\mu(G) = \{b, I\}$; 13) $\mu(G) = \{c, d\}$; 14) $\mu(G) = \{c, I\}$; 15) $\mu(G) = \{d, I\}$.

Твердження 5. Нехай p – просте число, $G =< x >$ – циклічна група порядку p^2, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді $\mu(G) = \{a, b, c | a \leq b \leq c; a, b, c \in L\}$ і для

$0 \leq k \leq p^2 - 1$

$$\mu(x^k) = \begin{cases} a, & \text{якщо } (k, p) = 1, \\ b, & \text{якщо } k = lp,\ 1 \leq l \leq p - 1, \\ c, & \text{якщо } k = 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $0 \leq k \leq p^2 - 1$. Оскільки μ – L – підгрупа, то $\mu(x^k) \geq \mu(x)$. Із твердження 4 виходить, що коли $(k,\ p) = 1$, то $\mu(x^k) = \mu(x) = a$, де $a \in L$.

Нехай $k = lp$, $1 \leq l \leq p - 1$. Оскільки $| < x^p > | = p$, то $\mu(x^k) = \mu(x^p) = b$, де $b \in L$ і $a \leq b$. Із твердження 1 виходить, що $b \leq c$.

Легко перевірити, що коли $a, b, c \in L$, $a \leq b \leq c$ і μ задана за правилом твердження 5, то μ є L-підгрупою на групі G.

Твердження 6. Нехай p – просте число, $n \in N$, G – циклічна група порядку p^n, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді

$$\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} | a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n+1}, a_i \in L, 1 \leq i \leq n+1\}$$

і для будь-якого $x \in G$

$$\mu(x) = \begin{cases} a_1, & \text{якщо } |x| = p^n, \\ a_2, & \text{якщо } |x| = p^{n-1}, \\ \ldots, & \\ a_{n+1}, & \text{якщо } |x| = 1. \end{cases}$$

Твердження можна довести методом математичної індукції, використовуючи твердження 4 і 5.

Нехай p – просте число, $G = C_{p^\infty}$ – квазіциклічна група типу p^∞. Тоді всі підгрупи G утворюють зростаючий ланцюг:

$$< e > << x_1 > << x_2 > < \ldots << x_n > < \ldots$$

де, $x_{i+1}^p = x_i$, $i \in N$. Використовуючи твердження 6, отримуємо наступний результат.

Твердження 7. Нехай p – просте число, $G = C_{p^\infty}$ – квазіциклічна група типу p^∞, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді

$$\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots | a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, a_i \in L, i \in N\}.$$

Твердження 8. Нехай G – група, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $x, y, z \in G$, $x = yz$, $\mu(x) = a$, $\mu(y) = b$, $\mu(z) = c$. Тоді є справедливими такі висловлювання:

(1) $a \bigwedge b = b \bigwedge c = a \bigwedge c$.

(2) Якщо $a \leq b \leq c$, то $a = b$.

Доведення. (1) Оскільки $x = yz$, то $a \geq b \bigwedge c$. З іншого боку, $b \geq b \bigwedge c$, а, значить, $a \bigwedge b \geq b \bigwedge c$. З того, що $z = y^{-1}x$, виходить, що $c \geq a \bigwedge b$. Враховуючи те, що $b \geq a \bigwedge b$, маємо $b \bigwedge c \geq a \bigwedge b$, тобто $a \bigwedge b = b \bigwedge c$. Друга рівність доводиться аналогічно.

(2) Із (1) виходить, що $a = a \bigwedge b = b \bigwedge c = b$.

Твердження 9. Нехай G – група, $x, y, z \in G$, $x = yz$, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $\mu(x) = a$, $\mu(y) = b$, $\mu(z) = c$. Тоді, з точністю до перестановки елементів a, b, c, має місце один і тільки один із випадків:

1) $a = b \leq c$;

2) a і b не порівнянні і $c = a \bigwedge b$;

3) a, b, c попарно не порівнянні і $a \bigwedge b = b \bigwedge c = a \bigwedge c$.

Доведення. Для a і b, з точністю до їх перестановки, маємо дві можливості: $a \le b$ або a і b не порівнянні.

Нехай $a \le b$. Якщо $b \le c$, то $a \le b \le c$ і із твердження 8 виходить, що $a = b$. Значить, в цьому випадку має місце 1). Якщо $c \le b$, то $a = a \bigwedge b = b \bigwedge c = c$ і $a = c \le b$, тобто знову маємо 1). Нехай b і c не порівнянні. Оскільки $a = a \bigwedge b = a \bigwedge c$, то $a \le c$. Звідси виходить, що $a \le b \bigwedge c$. З іншого боку, $a = \mu(x) = \mu(yz) \ge b \bigwedge c$, тобто $a = b \bigwedge c$ і ми маємо 2).

Припустимо, що a і b не порівнянні. Для a і c в цьому випадку маємо три можливості: $a \le c$, $c \le a$ або a і c не порівнянні. Нехай $a \le c$. Тоді $a = a \bigwedge c = a \bigwedge b$, тобто $a \le b$, що є суперечністю. Припустимо, що $a \ge c$. Тоді $c = a \bigwedge c = a \bigwedge b$, тобто маємо 2). Нехай a і c не порівнянні. Якщо $b \le c$, то, оскільки $x = yz$, то $a \ge b \bigwedge c = b$, тобто $a \ge b$, що неможливо. У випадку $b \ge c$ також маємо суперечність. Значить, a, b, c попарно не порівнянні і має місце 3).

Твердження 10. Нехай p, q – різні прості числа, $G =< x >$ – циклічна група порядку pq, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $\mu(x) = a$, $\mu(x^p) = b$, $\mu(x^q) = c$, $\mu(e) = d$. Тоді $\mu(G) = \{a, b, c, d\}$ і для елементів a, b, c є одна й тільки одна із можливостей:

1) $a = b \le c$;

2) $a = c \le b$;

3) b і c не порівнянні і $a = b \bigwedge c$.

Доведення. Оскільки $| < x^p > |$ і $| < x^q > |$ – прості числа q і p відповідно, то із твердження 4 і наслідка з нього маємо, що для будь-якого $y \in G$

$$\mu(y) = \begin{cases} a, & \text{якщо } |y| = pq, \\ b, & \text{якщо } |y| = q, \\ c, & \text{якщо } |y| = p. \end{cases}$$

Оскільки $(p, q) = 1$, то існують натуральні числа m і n такі, що $x = (x^p)^m (x^q)^n$, причому $(x^p)^m \ne e$, $(x^q)^n \ne e$, тобто $a = \mu(x) \ge \mu((x^p)^m) \bigwedge \mu((x^q)^n) = b \bigwedge c$. З іншого боку, $a \le b$ і $a \le c$, а, значить, $a \le b \bigwedge c$, тобто $a = b \bigwedge c$.

Подальші висновки випливають із твердження 9.

Твердження 11. Нехай p – просте число, G – нециклічна група порядку p^2, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді для $\mu(G)$ є одна й тільки одна із можливостей:

1) $\mu(G) = \{a, b, c | a, b, c \in L, a \le b \le c\}$;

2) $\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, b\}$, де $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, b \in L$; $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ попарно не порівнянні; $a_i \bigwedge a_j = a_k \bigwedge a_l$ при $i \ne j$, $k \ne l$, $1 \le i, j, k, l \le p + 1$; $a_m \le b$, $1 \le m \le p + 1$;

3) $\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b\}$, де $m \le p + 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_m, b \in L$; $a_2, \ldots, a_m$ попарно не порівнянні; $a_1 = a_i \bigwedge a_j$ при $i \ne j$, $2 \le i, j \le m$.

Доведення. Якщо G – нециклічна група порядку p^2, то G має $(p + 1)$ підгрупу порядку p і є прямим добутком двох будь-яких таких різних підгруп.

Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_{p+1}$ – множина всіх підгруп групи G, $H_i =< x_i >$ і $\mu(x_i) = a_i$. Тоді із наслідка твердження 4 випливає, що $\mu(x) = a_i$ для будь-якого $x \in H_i$, $x \ne e$.

Використовуючи твердження 9, отримаємо подальші висновки.

Аналогічні результати мають місце також для нециклічної групи порядку pq, де p, q – різні прості числа.

Библиографические ссылки

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. / Биркгоф Г. –// М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы/ Биркгоф Г. , 1984.– 568 с.
2. *J.M.Anthony and H.Sherwood.* A characterization of fuzzy subgroups/ J.M.Anthony and H.Sherwood. // Fuzzy Sets and Systems 7 (1982).– P.297–305.
3. *J.M.Anthony and H.Sherwood.* Fuzzy groups redefined/ J.M.Anthony and H.Sherwood. // J.Math. Anal. Appl. 69 (1979).– P.124–130.

Надійшла до редколегії 6.04.2014