

9. **Русакова Т.И.** Задача численного расчета обтекания зданий воздушным потоком / Т.И. Русакова, В.И. Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. Т. 1, вип.11, 2007. – С. 53 – 58.

Надійшла до редколегії 15.12.08

УДК 536.2:621.078

О.І. Губін

Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Розроблено математичні моделі технічно важливих теплових процесів в областях з рухомими межами, а також технологічно суміжних з ними процесів прогріву. Розв'язки відповідних крайових задач теплопровідності отримані за допомогою методів малого параметра, степеневих рядів і скінчених різниць. Проведено параметричні дослідження, на основі яких установлені основні закономірності протікання процесів.

Вступ. Велика кількість процесів теплообміну пов'язана зі зміною агрегатного стану або фізико-хімічної природи матеріалу. При цьому теплофізичні характеристики тіла змінюються стрибкоподібно, і для фазових переходів потрібна теплота плавлення (сорбції, випаровування) або теплота хімічних реакцій. Розв'язання такого роду задач має велике практичне значення в металургії, будівельній теплотехніці, ракетній і космічній техніці, а також в інших прикладних дисциплінах. З достатньою точністю ці процеси математично моделюються задачею Стефана. Істотно новою рисою подібного класу задач є наявність рухомої поверхні між фазами, причому доводиться визначати закон руху цієї поверхні, на якій відбувається виділення або поглинання тепла. У загальному випадку термічні властивості фаз з обох боків рухомої поверхні виявляються різними, і тому розв'язання таких задач із математичної точки зору принципово відмінне від класичних.

Зараз велика увага приділяється розв'язанню задач нестационарної теплопровідності для областей з рухомими межами [1]. Особливо гостра необхідність у розв'язанні таких задач відчувається при визначенні температурних полів у складених тілах з урахуванням руху фронтів фазових переходів, а також неідеальності теплового контакту між складовими тіла.

Задачі теплопереносу у системах тіл з рухомими межами відносяться до класу істотно нелінійних задач. Їхній точний розв'язок одержати, як правило, не вдається, тому звичайно застосовують наближені методи розв'язання, як аналітичні, так і чисельні. Однак, на сьогоднішній день, розроблено досить вузьке коло ефективних методів розв'язання задач типу Стефана й, як правило, вони застосовні лише для спрощених задач (одновимірних, однофазних, зі спеціальним виглядом залежності теплофізичних коефіцієнтів від температури). Тому актуальною є розробка нових методів розв'язання таких задач, а також удосконалення існуючих методів.

У зв'язку з розвитком нових технологій, де протікають високоінтенсивні процеси теплообміну, математичне моделювання яких не можливе на основі класичної теорії теплопровідності Фур'є й вимагає врахування скінченності швидкості розповсюдження тепла, перспективною стає розробка математичних

моделей процесів теплообміну в областях з рухомими межами фаз на основі узагальненого закону теплопровідності.

Задача про кристалізацію напівобмеженого масиву. Безрозмірна математична постановка задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < \eta(\tau), \quad \tau > 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= -1, \quad \tau > 0, \quad \theta(\eta(\tau), \tau) = 0, \quad \tau \geq 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\eta(\tau)} &= -\frac{d\eta}{d\tau}, \quad \tau > 0, \quad \eta(0) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

де $\xi = \frac{c q_n}{L \lambda} x$, $\eta = \frac{c q_n}{L \lambda} y$, $\tau = \left(\frac{c q_n}{L \lambda}\right)^2 a t$, $\theta = \frac{c}{L}(T_k - T)$ – безрозмірні змінні; $T(x, t)$ – поле температур у твердій фазі; $y(t)$ – границя поділу фаз; t – час; x – просторова координата; λ – теплопровідність; ρ – щільність; c – теплоємність твердої речовини; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – температуропровідність; T_k – температура фазового переходу; q_n – щільність теплового потоку; L – теплота фазового переходу.

Розв'язання цієї крайової задачі здійснювалося методом малого параметра за схемою введення умовного параметра малості до диференціального рівняння теплопровідності [2]. Отриманий наближений аналітичний розв'язок задачі (1) у першому наближенні має вигляд

$$\eta(\tau) = \sqrt{1 + 2\tau} - 1, \quad \theta(\xi, \tau) = \eta(\tau) - \xi - \frac{\eta^2(\tau) - \xi^2}{2(1 + \eta(\tau))}. \quad (2)$$

Проведено порівняння наближеного аналітичного розв'язку (2) з результатами, отриманими за допомогою методу скінчених різниць.

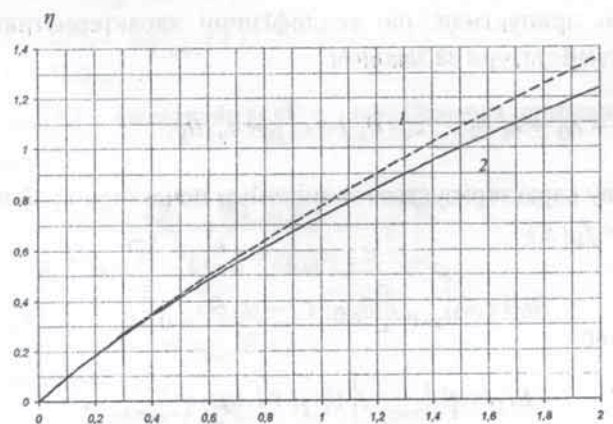


Рис. 1. Співставлення результатів розрахунку закону руху межі поділу фаз методом скінчених різниць (крива 1) та методом малого параметра у першому наближенні (крива 2)

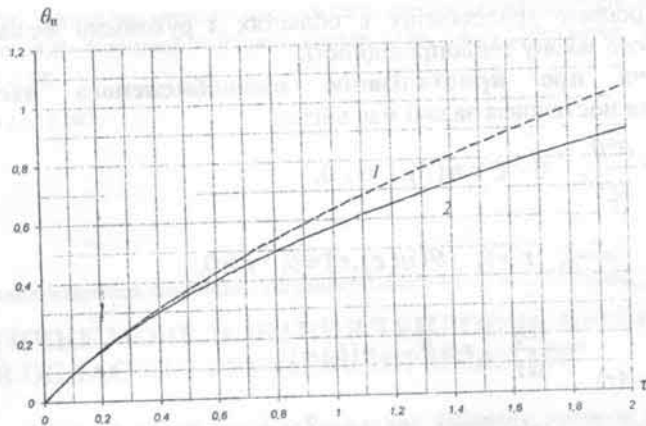


Рис. 2. Порівняння результатів розрахунку температури нерухомої поверхні $\xi = 0$ методом скінчених різниць (крива 1) та методом малого параметра у першому наближенні (крива 2)

З рис. 1 і рис. 2 видно, що для відносно малих значень часу τ результати розрахунку цими методами досить добре узгоджуються, а зі зростанням безрозмірного часу криві 2 усе більше відхиляються від кривих 1. Одержаний наближений аналітичний розв'язок задачі (1), на відміну від чисельного розв'язку, зручно використовувати для якісного аналізу процесів кристалізації.

Задача про асиметричний прогрів системи двох плоских тіл з руйнуванням у результаті оплавлення двох поверхонь. Диференціальне рівняння теплопровідності для кожної із пластин має вигляд

$$c_v^k(\theta_k) \frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} = \lambda^k(\theta_k) \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2} + \lambda_1^k \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x} \right)^2 + q_k(x, \tau), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k=1,2, \quad (3)$$

де θ – температура; τ – час; x – координата; $c_v^k(\theta_k)$ – об'ємна теплоємність; $\lambda^k(\theta_k)$ – коефіцієнт теплопровідності; $q_k(x, \tau)$ – щільність внутрішніх джерел тепла. Тут ми припустили, що теплофізичні характеристики матеріалу пластин залежать від температури за законом

$$\lambda^k(\theta_k) = \lambda_0^k + \lambda_1^k \theta_k, \quad c_v^k(\theta_k) = c_{v,0}^k + c_{v,1}^k \theta_k.$$

Режим прогріву характеризується зовнішніми початково-крайовими умовами:

$$\theta_k|_{\tau=0} = f_k(x), \quad (4)$$

$$\eta_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = Bi_0(\tau, \theta_1|_{x=0}) [\theta_{c,0}(\tau) - \mu_0 \theta_1|_{x=0}], \quad (5)$$

$$\eta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = Bi_2(\tau, \theta_2|_{x=x_2}) [\theta_{c,2}(\tau) - \mu_2 \theta_2|_{x=x_2}],$$

де Bi_k – число Біо; η_k , μ_k ($k=0, 2$) – параметри, що приймають значення $0, \pm 1$ залежно від умов взаємодії з навколишнім середовищем.

На стику шарів задано умови неідеального теплового контакту

$$\theta_1|_{x=x_1} = \theta_2|_{x=x_1} - R_{1,2} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \gamma_{1,2} (\theta_1|_{x=x_1}, \theta_2|_{x=x_1}) \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, \quad (6)$$

де $R_{1,2} = \lambda^1 \cdot R_{1,2}^*$, $R_{1,2}^*$ – контактний термічний опір; $\gamma_{1,2} = \frac{\lambda^2 (\theta_2|_{x=x_1})}{\lambda^1 (\theta_1|_{x=x_1})}$.

У режимі оплавлення на поверхні розділу фаз зберігається температура фазового перетворення

$$\theta_k|_{x=s_k(\tau)} = \theta_{\phi}^k, \quad (7)$$

і тепловий баланс між тепловим ефектом перетворення й тепловими потоками

$$\frac{ds_k}{d\tau} = \frac{1}{Ko_k} \left[\frac{\partial \theta_k}{\partial x} \Big|_{x=s_k(\tau)} - Q_k(\tau) \right], \quad (8)$$

де Ko_k – критерій Коссовича; $Q_k(\tau)$ – задані функції, що характеризують теплопідвод з навколишнього середовища; $s_k(\tau)$ – закон переміщення границі фазового перетворення; θ_{ϕ}^k – температура фазового переходу.

До рівняння (8) необхідно додати ще початкову умову

$$s_k|_{\tau=\tau_{\phi}^k} = \begin{cases} 0, & k=1, \\ x_2, & k=2. \end{cases} \quad (9)$$

Перехід від розв'язання задачі в режимі прогріву до задачі Стефана здійснюється за умовою

$$\theta_k|_{x=0} = \begin{cases} 0, & k=1, \\ \theta_{\phi}^k, & k=2. \end{cases} \quad (10)$$

Для розв'язання задачі (3) – (10) застосовано метод степеневих рядів [3]. Таким чином, у даній роботі, метод степеневих рядів поширено і на задачі типу Стефана для складених тіл.

Температурні поля шукалися у вигляді

$$\theta_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{x - x_{k,0}}{x_k - x_{k,0}} \right)^n \psi_{k,n+1}(\tau), \quad (11)$$

де компоненти $\psi_{k,n+1}(\tau)$ визначаються з розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\psi'_{k,n+1}(\tau) = \left\{ \lambda_0 \frac{(n+1)(n+2)}{(x_k - x_{k,0})^2} \frac{\psi_{k,n+3}(\tau)}{(c_{v,0}^k + c_{v,1}^k \psi_{k,1})} + \frac{F_{k,n}(\tau)}{(c_{v,0}^k + c_{v,1}^k \psi_{k,1})} \right\}, \quad n = \overline{0, N-2}, \quad (12)$$

$$F_{k,n}(\tau) = \left\{ q_{k,n}(\tau) + \lambda_1^k \sum_{j=0}^n \left[\frac{(n+1-j)(n+2-j)}{(x_k - x_{k,0})^2} \psi_{k,j+1} \psi'_{k,n+3-j} + \frac{(j+1)(n+1-j)}{(x_k - x_{k,0})^2} \psi_{k,j+2} \psi'_{k,n+2-j} \right] - c_{v,1}^k \sum_{j=1}^n \psi_{k,j+1} \psi'_{k,n+1-j} \right\},$$

з початковими умовами

$$\psi_{k,n+1}(\tau) \Big|_{\tau=0} = f_{k,n+1}. \quad (13)$$

Значення замикаючих компонент $\psi_{k,N}$, $\psi_{k,N+1}$, що враховують сукупність крайових умов (5), (6), визначаються з розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, представлені в матричній формі

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{1,N+1} \\ \psi_{2,N} \\ \psi_{2,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

де елементи матриці системи та вільні члени визначаються з відповідних виразів, які відрізняються для етапів прогріву і оплавлення. Ці вирази знаходяться з граничних умов (5) – (7).

Закони переміщення границь фазових перетворень $s_k(\tau)$ визначаються зі звичайних диференціальних рівнянь, що знаходяться з умов Стефана (8), з відповідними початковими умовами.

Таким чином, розв'язок поставленої задачі (3) – (10) отримано в замкнутому вигляді й зведено до стандартної процедури – інтегруванню системи звичайних диференціальних рівнянь (12) у формі Коші.

На основі отриманих співвідношень було здійснено розрахунки при наступних вихідних даних:

$$c_{v,0}^k = 1, \quad c_{v,1}^k = 0, \quad \lambda_0^k = 1, \quad \lambda_1^k = 0, \quad q_k(x, \tau) = 0, \quad f_k(x) = 0,$$

$$R_{1,2} = 1, \quad \gamma_{1,2} = 1, \quad \eta_0 = 1, \quad \eta_2 = 1, \quad Bi_0 = 0, \quad Bi_2 = 1,$$

$$\mu_2 = 0, \quad \theta_{c,2} = 1, \quad x_1 = 0,5, \quad x_2 = 1, \quad \theta_{\phi}^2 = 1, \quad Ko_2 = 8, \quad Q_2 = 1.$$

Результати розрахунків представлені на рис. 3 і рис. 4.

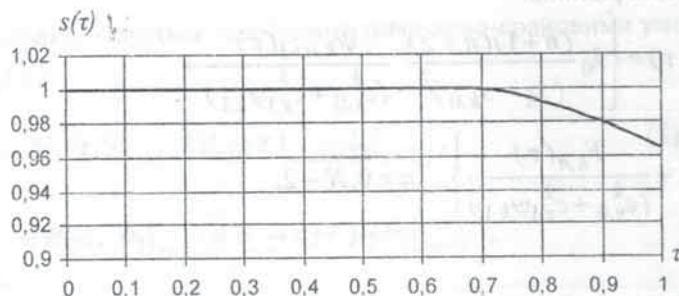


Рис. 3. Закон переміщення зовнішньої границі другого тіла

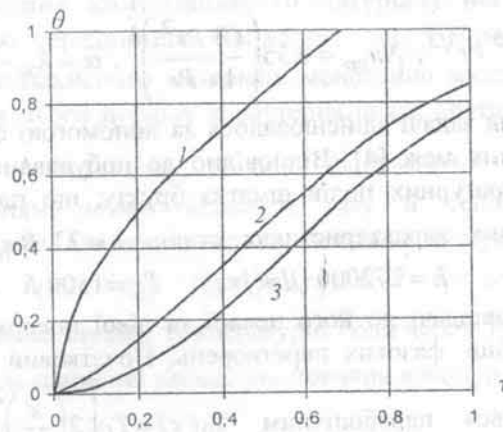


Рис. 4. Зміна температури на поверхнях системи двох плоских тіл:

- 1 – температура на зовнішній поверхні $x_2=1$;
- 2 – температура першого тіла на поверхні контакту $x_1=0,5$;
- 3 – температура на зовнішній поверхні $x_0=0$

Порівняльний аналіз показує, що нев'язка розв'язків зі збільшенням N прямує до нуля. При $N = 3, 4, 5$ розв'язки практично не відрізняються.

Задача про плавлення металобрухту в конвертерній ванні при комбінованій продувці. Розглянуто процес плавлення необмеженої пластини з однорідного ізотропного матеріалу з початковою товщиною H під дією теплових потоків з перегрітого розплаву, що омиває поверхні пластини. Відповідна крайова задача має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad z_n(t) < x < z_n(t), \quad 0 < t < \tau,$$

$$T|_{t=0} = T_0(x), \quad T|_{x=z_n(t)} = T|_{x=z_n(t)} = T_L,$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=z_l(t)} = q_l - \rho L \frac{dz_l}{dt}, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=z_n(t)} = q_n + \rho L \frac{dz_n}{dt}, \quad (15)$$

$$z_l|_{t=0} = 0, \quad z_n|_{t=0} = H,$$

де $T(x, t)$ – поле температур, що визначається; t – час; x – просторова координата; a – температуропровідність; λ – теплопровідність і ρ – густина твердої фази; $z_l(t)$ і $z_n(t)$ – відповідно ліва і права поверхні пластини; τ – час закінчення процесу плавлення; T_L – температура фазового переходу; L – теплота фазового переходу; $q_l = \alpha_l \Delta T_l$, $q_n = \alpha_n \Delta T_n$ – теплові потоки, що сприймаються відповідно лівою та правою поверхнями пластини; α_l і α_n – коефіцієнти тепловіддачі; ΔT_l – перегрів розплаву над температурою плавлення ліворуч від пластини; ΔT_n – перегрів розплаву праворуч від пластини.

Значення коефіцієнту тепловіддачі праворуч і ліворуч від пластини визначалися із залежностей:

$$Nu_{um} = 0,662 Re^{0,5} Pr^{1/3}, Nu_{np} = 0,35 \left(\frac{Gr Pr^2}{1 + Pr} \right)^{1/3}, \alpha = \lambda_{жс} \frac{\sqrt{Nu_{um}^2 + Nu_{np}^2}}{l}. \quad (16)$$

Розв'язування задачі здійснювалося за допомогою сіткового методу з явним виділенням рухомих меж [4]. Відповідно до побудованого алгоритму здійснено розрахунок температурних полів шматка брухту, що плавиться в розплаві, при наступних фізичних характеристиках сталі: $\lambda = 23 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, $\rho = 7500 \text{ кг/м}^3$, $c = 670 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$, $L = 272000 \text{ Дж/кг}$, $T_L = 1500 \text{ К}$ для різних значень коефіцієнтів тепловіддачі до його правої та лівої поверхонь відповідно, а також законів руху границь фазових перетворень. Початковий розподіл температури у пластині приймався параболічним $T_0(x) = T_L \left[2 \left(\frac{x}{H} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{H} \right) + 1 \right]$, $0 \leq x \leq H$.

Результати наведені на рис. 5 і 6.

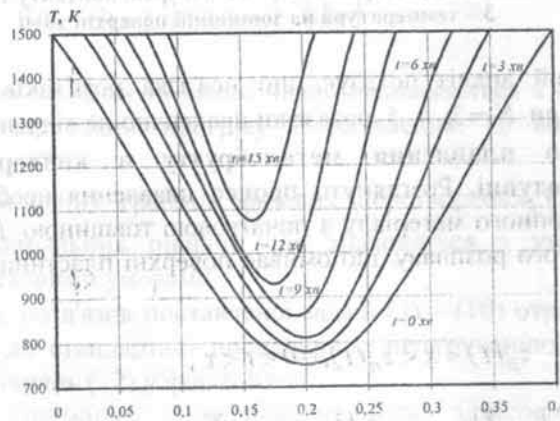


Рис. 5. Розподіл температури у сталевій пластині при її плавленні для різних моментів часу, якщо $\alpha_1 = 1095 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $\alpha_2 = 2478 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $w_1 = 1.4 \text{ м/с}$, $w_2 = 10 \text{ м/с}$, $H = 0.4 \text{ м}$, $l = 1.8 \text{ м}$

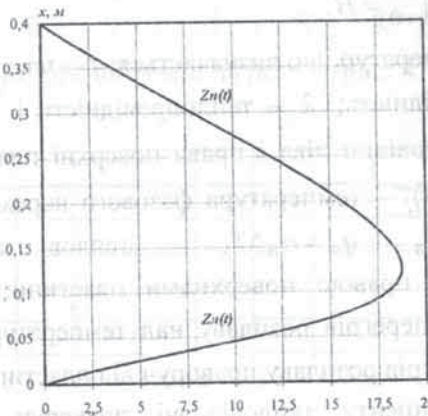


Рис. 6. Закони руху границь фазових перетворень

Задача про руйнування композиційного матеріалу під дією теплових потоків з навколишнього середовища. Вважалось, що з моменту часу $\tau = \tau_1$ температура поверхні теплозахисного матеріалу монотонно зростає від значення $T_{\phi,1}$ до значення $T_{\phi,2}$. Для цього періоду характерна поява другої фази, заданої в області $D_2 = \{s_1(\tau) \leq x \leq 1, \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$, де відбуваються фізико-хімічні перетворення з виділенням деякої кількості газу й тепла. Математичне формулювання задачі прогріву для цього періоду полягає в наступному. Задано дві області $D_1 = \{0 \leq x \leq s_1(\tau), \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$, $D_2 = \{s_1(\tau) \leq x \leq 1, \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$ і поверхня розділу фаз $s_1(\tau)$. Позначимо шукані температурні поля через T_1 і T_2 відповідно для областей D_1 й D_2 . Тоді гранична умова, що повинна виконуватися на поверхні $s_1(\tau)$, запишеться у вигляді

$$T_1|_{x=s_1(\tau)} = T_2|_{x=s_1(\tau)} = T_{\phi,1}. \quad (17)$$

Другою умовою буде умова теплового балансу між тепловими ефектами фазового перетворення й тепловими потоками (умова Стефана)

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=s_1(\tau)} - \nu_{1,2}(T_w) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=s_1(\tau)} = K_{01,2}(T_w) \frac{ds_1}{d\tau}, \quad (18)$$

де $\nu_{1,2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $K_{01,2} = \frac{\rho_2 L_2 Q_0}{\lambda_1 R}$ – критерій Коссовича.

До рівняння (18) ще необхідно додати початкову умову

$$s_1(\tau) \Big|_{\tau=\tau_1} = 1. \quad (19)$$

Зовнішні умови задані уніфікованими граничними умовами:

$$\eta_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = Bi_0(T_w, \tau) [T_c^0(\tau) - \mu_0 T_1] \Big|_{x=0} + q_0(T_w, \tau), \quad (20)$$

$$\eta_1 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=1} = Bi_1(T_w, \tau) [T_c^1(\tau) - \mu_1 T_2] \Big|_{x=1} + q_1(T_w, \tau),$$

де η_l, μ_l ($l = 0, 1$) – граничні константи, що приймають значення $0, \pm 1$.

Припускалося, що теплофізичні характеристики матеріалів фаз залежать від температури за законом

$$\lambda^k(T_k) = \lambda_0^k + \lambda_1^k T_k, \quad c_v^k(T_k) = c_{v,0}^k + c_{v,1}^k T_k.$$

При зроблених вище припущеннях функції T_1 й T_2 повинні задовольняти рівнянням:

$$\left(c_{v,0}^1 + c_{v,1}^1 T_1 \right) \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \beta_1 \left[\left(\lambda_0^1 + \lambda_1^1 T_1 \right) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \lambda_1^1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)^2 \right], \quad x, \tau \in D_1, \quad (21)$$

$$\left(c_{v,0}^2 + c_{v,1}^2 T_2 \right) \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \beta_2 \left[\left(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 T_2 \right) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \lambda_1^2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^2 \right] -$$

$$-P_2(\tau) \frac{\partial T_2}{\partial x} - P_{0,2}(x, \tau), \quad x, \tau \in D_2,$$

де $P_2(\tau)$ – критерій Пекле; $P_{0,2}(\tau)$ – критерій Померанцева; β_k – безрозмірне число. Останні доданки праворуч у другому рівнянні з (21) враховують конвективний перенос тепла за рахунок газовиділення й стік тепла, що характеризує ефекти фізико-хімічних перетворень у зоні фазового переходу.

Початкові умови мають вигляд

$$T_1|_{\tau=\tau_1} = \phi_1(x), \quad T_2|_{\tau=\tau_1} = \phi_2(x) = T_{\phi,1}. \quad (22)$$

Розв'язок подібного класу багатofазних задач досить просто можна побудувати, якщо скористатися методом степеневих рядів. Розв'язок початково-крайової задачі (17) – (22) шукався у вигляді

$$T_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (x - x_{k,0})^n \psi_{k,n+1}(\tau), \quad (23)$$

де компоненти $\psi_{k,n+1}(\tau)$ визначалися з розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \psi'_{k,n+1}(\tau) &= \beta_k \left\{ \frac{\lambda_0^k (n+1)(n+2)}{c_{v,0}^k + c_{v,1}^k \psi_{k,1}} \psi_{k,n+3}(\tau) - \frac{F_{k,n}(\tau)}{c_{v,0}^k + c_{v,1}^k \psi_{k,1}} \right\}, \quad n = \overline{0, N-2}, \\ F_{1,n}(\tau) &= \left\{ \lambda_1^1 \beta_1 \sum_{j=0}^n [(n+1-j)(n+2-j) \psi_{1,j+1} \psi_{1,n+3-j} + \right. \\ &+ (j+1)(n+1-j) \psi_{1,j+2} \psi_{1,n+2-j}] - c_{v,1}^1 \sum_{j=1}^n \psi_{1,j+1} \psi'_{1,n+1-j} \left. \right\}, \\ F_{2,n}(\tau) &= \left\{ \lambda_1^2 \beta_2 \sum_{j=0}^n [(n+1-j)(n+2-j) \psi_{2,j+1} \psi_{2,n+3-j} + \right. \\ &+ (j+1)(n+1-j) \psi_{2,j+2} \psi_{2,n+2-j}] - c_{v,1}^2 \sum_{j=1}^n \psi_{2,j+1} \psi'_{2,n+1-j} - \\ &\left. - P_2(\tau)(n+1) \psi_{2,n+2} + P_{0,2,n}(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

і $P_{0,2,n}(\tau)$ визначались із розкладання функції $P_{0,2}(x, \tau)$ в ряд за степенями $(x - x_{2,0})$.

Початковими умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь (24) будуть:

$$\psi_{k,n+1}(\tau)|_{\tau=\tau_1} = \phi_{k,n}, \quad k = \overline{1, 2}, \quad (25)$$

де праві частини визначаються з розкладання початкових функцій у ряди за степенями $(x - x_{k,0})$.

Компоненти замикаючих зв'язків $\psi_{k,N}$, $\psi_{k,N+1}$, що враховують сукупність крайових умов (17), (20), визначаються з розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, яку можна представити в матричній формі

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,N} \\ \psi_{1,N+1} \\ \psi_{2,N} \\ \psi_{2,N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^0 \\ F_1^1 \\ F_2^0 \\ F_2^1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де елементи матриці системи та вільні члени визначаються з відповідних виразів, що дістаються з граничних умов (17), (20).

Закон переміщення границі фазових перетворень $s_1(\tau)$ визначається зі звичайного диференціального рівняння, що дістається з умови Стефана (18), з відповідною початковою умовою.

Таким чином, розв'язання двофазної початково-крайової задачі (17) – (22) зведено до стандартної процедури – інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (24) у формі Коші. З аналізу структури елементів матриці системи (26) витікає, що її розв'язком буде розв'язок двох незалежних блоків алгебраїчних рівнянь, складених з елементів $a_{k,l}$ ($k=1,2, l=0,1$ і $k=3,4, l=0,1$).

Розроблений алгоритм побудови розв'язку двофазної задачі Стефана досить просто узагальнюється на випадок багатофазного протікання процесу руйнування композиційних теплозахисних покриттів. Розв'язок багатофазної задачі буде мати вигляд (23), де невідомі компоненти $\psi_{k,n+1}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) визначатимуться з більшого числа блоків рівнянь типу (24) у формі Коші. Збільшиться й ранг матриці (26), але специфіка структури її наповнення елементами залишається блоковою, тобто такою, що розпадається на пари алгебраїчних рівнянь.

Розроблений алгоритм розв'язання багатофазних задач Стефана дозволяє уникнути чисельного диференціювання за координатою x , неминучого для скінченно-різницевого методів, отже, більш економічний за витратами машинного часу.

Задача про прогрів та відновлення залізородних матеріалів. На першому етапі відбувається прогрів кульового брикету від початкової температури T_0 до температури початку хімічних реакцій $T^* - \Delta T^*$ на зовнішній поверхні. На цій стадії стоки тепла і джерела газоподібної фази усередині брикету відсутні. Тому математичне формулювання задачі для цього етапу буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} C_0(T_1)\rho_0(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_0(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial r}\right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad T_1|_{r=R} < T^* - \Delta T^*, \\ T_1|_{r=0} &= T_0, \quad \frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad -\lambda_0(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=R} + \alpha[T_{cp} + T_1]\Big|_{r=R} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Коли температура поверхні досягає в деякий момент часу значення $T^* - \Delta T^*$, настає другий етап прогріву. Утворюється зона фізико-хімічних перетворень $R_1 < r < R$, що просувається до центра кулі. Розподіл температур буде визначатися рівняннями:

$$\begin{aligned} C_\Sigma(T_2)\rho_\Sigma(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda_\Sigma(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) - C_g(T_2)G_g\frac{\partial T_2}{\partial r} - \Delta Q, \\ -\lambda_\Sigma(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial r} &+ \alpha[T_{cp} - T_2]\Big|_{r=R} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

в області $R_1 < r < R$, а в області $0 \leq r \leq R_1$ рівнянням теплопровідності та умовою симетрії з (27). На поверхні розділу двох зон $r = R_1$ мають місце умови теплового контакту

$$T_1|_{r=R_1} = T_2|_{r=R_1} = T^* - \Delta T^*, \quad (29)$$

$$\lambda_0(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1-0} = \lambda_\Sigma(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0} + \rho_0(T_1) \Delta H^* \frac{dR_1}{d\tau}.$$

При досягненні деякого моменту часу τ_2 настає третій етап прогріву кульового брикету, що характеризується появою з боку зовнішньої поверхні металізованого шару $R_2 < r < R$, в якому відсутні фізико-хімічні перетворення, однак існує пористе охолодження за рахунок вивільнюваного газу в зоні протікання реакцій. Температурне поле брикету в даному випадку буде описуватися рівняннями:

$$C_M(T_3) \rho_M(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_M(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) - C_g(T_3) G_g \frac{\partial T_3}{\partial r}, \quad (30)$$

$$-\lambda_M(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{r=R} + \alpha_v [T_{cp} - T_3] \Big|_{r=R} = 0$$

для області $R_2 < r < R$; рівнянням теплопровідності з (28) для області $R_1 < r < R_2$; рівнянням теплопровідності та умовою симетрії з (27) для області $0 < r < R_1$.

На границях указаних областей мають місце умови теплового контакту:

$$T_2|_{r=R_2} = T_3|_{r=R_2} = T^* - \Delta T^*, \quad (31)$$

$$\lambda_\Sigma(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2-0} = \lambda_M(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial r} \Big|_{r=R_2+0} + \rho_\Sigma(T_2) \Delta H^* \frac{dR_2}{d\tau}$$

на границі $r = R_2$, і (29) – при $r = R_1$.

Розв'язання задачі здійснювалося методом скінчених різниць. Аналіз чисельних результатів показує, що нагрів брикетів відбувається нерівномірно, спочатку брикети нагріваються порівняно швидко, а потім нагрів усе більше сповільнюється. Максимальний вплив на розподіл температури здійснюють розміри брикету, також вони впливають і на швидкість просування фронту фізико-хімічних перетворень. Вюститні брикети великих розмірів досягають нижньої частини доменної печі раніше, ніж устигають відновитися до металу, тобто можливе одержання у відновлювальному середовищі сильно залізистих розплавів з високим вмістом FeO , тобто можливе розплавлення брикету раніше, ніж він встигне відновитися до металу.

Задача, що моделює затвердіння злитка при безперервній розливці сталі. Розглянута задача має наступне формулювання. Нехай необхідно визначити поле температур і розташування фронту фазового переходу у процесі затвердіння безперервного злитка прямокутного перетину $2A \times 2B$. Теплофізичні характеристики сталі, а також температура фазового переходу T є сталими. У кристалізаторі задаються граничні умови II-го роду, де величина теплового

поток на зовнішній поверхні злитка задається як функція часу. У зоні вторинного охолодження задаються граничні умови III-го роду, де коефіцієнт тепловіддачі є функцією часу. У початковий момент часу злиток перебуває в рідкому стані і його температура дорівнює T . Внаслідок осової симетрії поля температур доцільно розглядати не весь злиток, а лише четверту його частину. Система рівнянь, що відповідає поставленій задачі, має вигляд

$$\frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < x < A; \quad 0 < y < B; \quad t \neq T;$$

$$\frac{\partial t(x, B, \tau)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t(A, y, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = q(\tau), \\ \lambda \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = q(\tau), \end{cases} \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_1;$$

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = \alpha(\tau)(t(0, y, \tau) - t_s), \\ \lambda \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = \alpha(\tau)(t(x, 0, \tau) - t_s), \end{cases} \quad \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_3;$$

$$\lambda(P-0) \frac{\partial t(P-0)}{\partial \nu} = \rho L W(P); \quad t(P) = t(x_p, y_p, \tau) = T = \text{const};$$

$$t(x, y, 0) = T, \quad P_0 = (x_p, y_p, 0) \in \{(0, y, 0), (x, 0, 0)\}.$$

Тут P – точка, що належить фронту кристалізації; $W(P)$ – швидкість переміщення точки P уздовж нормалі ν до рухомої границі; a – коефіцієнт температуропровідності, ρ – густина твердої речовини; L – теплота фазового переходу. Коефіцієнт тепловіддачі є функцією часу:

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ \alpha_2, & \text{при } \tau_2 < \tau < \tau_3, \end{cases} \quad (33)$$

де $\alpha_1 = 250 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $\alpha_2 = 150 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, τ_1 – час виходу злитка із кристалізатора, τ_2 – час зміни режиму охолодження в зоні вторинного охолодження, τ_3 – час закінчення процесу затвердіння.

Емпіричне співвідношення для зміни середнього теплового потоку в кристалізаторі з часом:

$$q(\tau) = a_q e^{-b_q \tau} + c_q, \quad (34)$$

де $a_q = 1.57 \text{ МВт/м}^2$; $c_q = 0.41 \text{ МВт/м}^2$; $b_q = 0.061 \text{ 1/с}$; τ – час, с.

Для розв'язання задачі (32) використовувався алгоритм на основі комбінованого сіткового методу з явним виділенням границі поділу фаз [5]. Результати проведених розрахунків для злитка з поперечним перетином $200 \times 400 \text{ мм}$ наведені на рис. 7–10.

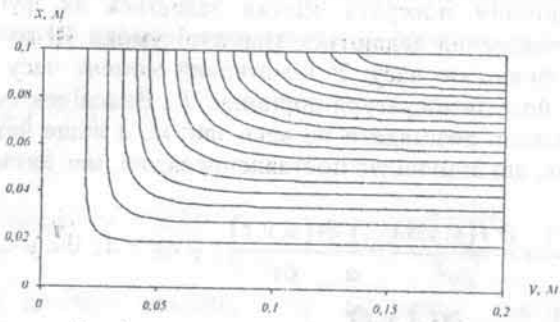


Рис. 7. Границя поділу фаз через кожну хвилину після початку процесу кристалізації злитка з поперечним перетином 200×400 мм

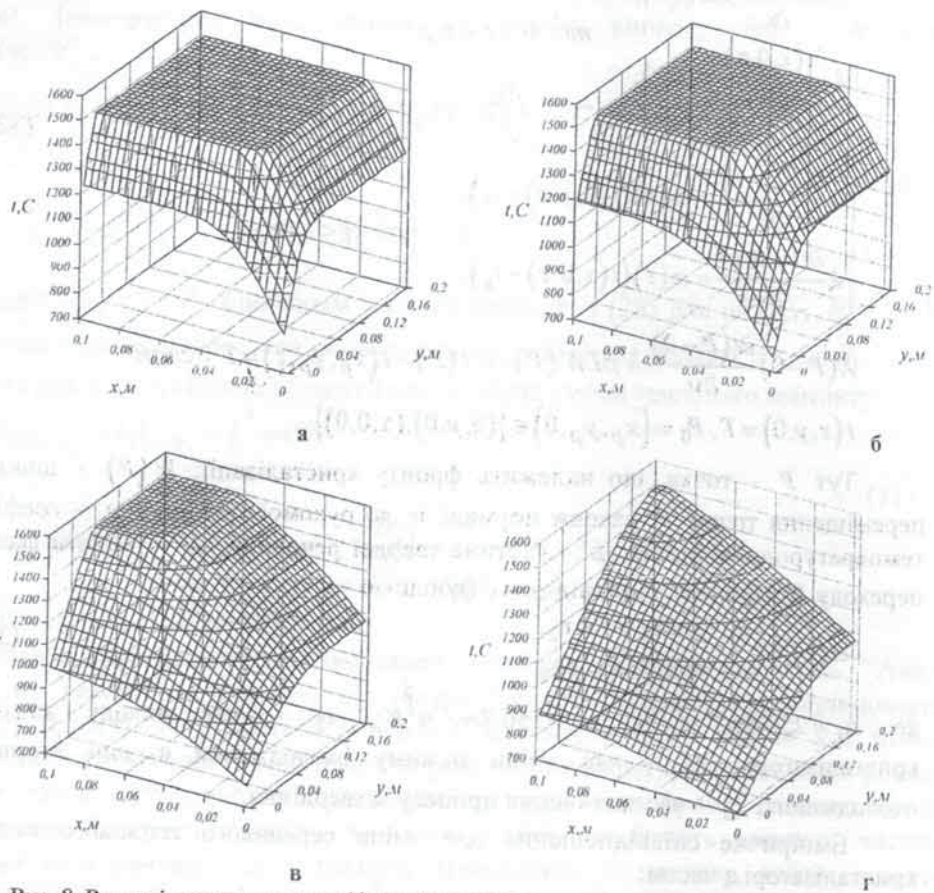


Рис. 8. Розподіл температури в $\frac{1}{4}$ поперечного перетину злитка: а – при $\tau=60$ с, б – при $\tau=120$ с, в – при $\tau=540$ с, г – при $\tau=1080$ с для злитка з перетином 200×400 мм

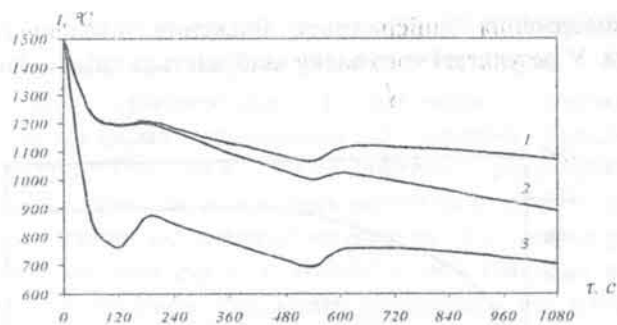


Рис. 9. Зміна температури з часом: 1 – усередині більшої сторони поперечного перетину; 2 – у середині меншої сторони поперечного перетину; 3 – у куті поперечного перетину; для злитка з поперечним перетином 200×400 мм

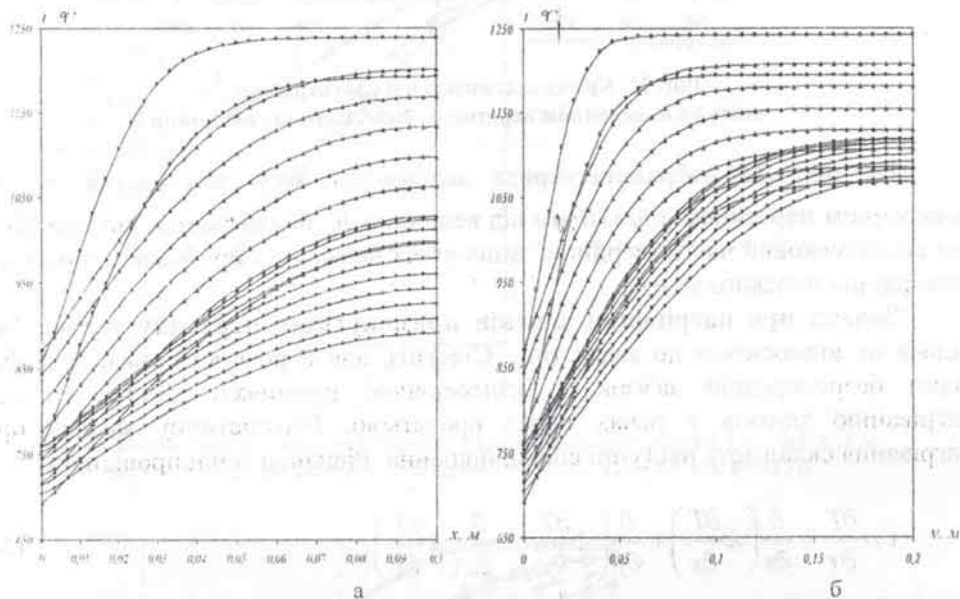


Рис. 10. Розподіл температури: а – уздовж меншої сторони, б – уздовж більшої сторони поперечного перетину через кожну хвилину після початку процесу кристалізації злитка з поперечним перетином 200×400 мм

У кристалізаторі за рахунок інтенсивного охолодження по периметру злитка тверднуть поверхні шари металу, утворюючи тверду оболонку. У результаті цього у перші хвилини після початку процесу кристалізації відбувається різке зниження температури твердої кірки. А в області поблизу середин сторін перетину кожного моменту часу температура уздовж сторони стає приблизно сталою. У зоні вторинного охолодження ця ділянка відсутня в розподілі температури уздовж меншої сторони, а уздовж більшої сторони зберігається тривалий час, що свідчить про незначний вплив граничних умов на меншій стороні.

На виході із кристалізатора при зміні режиму охолодження температура поверхні злитка трохи підвищується внаслідок того, що різко зменшується інтенсивність теплообміну з навколишнім середовищем, а від фронту фазового переходу до зовнішньої поверхні все ще направляються значні теплові потоки. Температура поверхні починає знову знижуватися після зменшення її градусів у твердій кірці. Щоб уникнути появи внутрішніх тріщин через якийсь час у зоні

вторинного охолодження здійснюється зниження інтенсивності тепловіддачі з поверхні злитка. У результаті чого знову відбувається тимчасовий розігрів поверхні злитка.

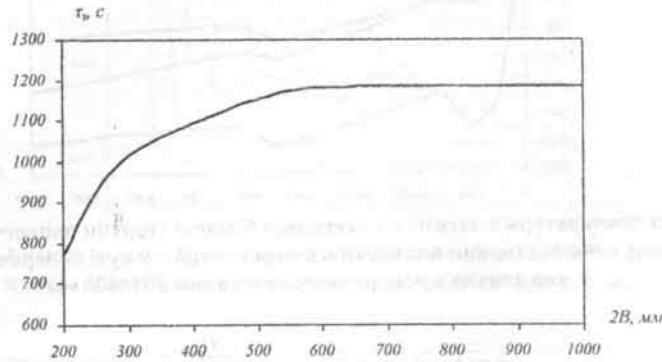


Рис. 11. Крива залежності часу затвердіння τ_3 злитка з поперечним перетином $200 \times 2B$ мм від величини B

На рис. 11 зображена крива залежності часу затвердіння τ_3 злитка поперечним перетином $200 \times 2B$ мм від величини B , звідки видно, що при $2B > 600$ мм розрахунковий час затвердіння змінюється незначно і приблизно дорівнює часу затвердіння плоского злитка.

Задача про нагрівання злитків прямокутного перетину у печі. Указана задача не відноситься до задач типу Стефана, але її розгляд вважався доцільним через безпосередній зв'язок з безперервною розливкою сталі, яка передує нагріванню злитків у печах перед прокаткою. Математичну модель процесу нагрівання складають наступні співвідношення. Рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (35)$$

Гранична умова

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{нов} = \alpha_{\Sigma} (T_{nn} - T_{нов}), \quad (36)$$

де n – нормаль до поверхні злитка; α_{Σ} – приведений коефіцієнт тепловіддачі:

$$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{вип} + \alpha_{кон}, \quad \alpha_{вип} = C \frac{(T_{\Gamma}/100)^4 - (T_{nn}/100)^4}{T_{\Gamma} - T_{nn}}, \quad C = \sigma \cdot 10^8; \quad T_{nn} - \text{температура}$$

пічного простору; σ – стала Стефана-Больцмана; $\alpha_{кон}$ і $\alpha_{вип}$ – конвективна та випромінювальна складові.

Температурний графік печі, тобто вигляд залежності $T_{nn} = \phi(\tau)$, вважався заданим та поділявся на два часових інтервали: інтервал нагріву печі за лінійним законом $T_{nn} = a_1 + b_1\tau$ (a_1 – початкова температура печі; b_1 – швидкість нагріву печі) та інтервал витримки (томління) злитків при $T_{nn} = const$.

Початкова умова

$$T_{нов}(X, Y) = T_0 + 4\Delta T(X - X^2) + 4\Delta T(Y - Y^2), \quad (37)$$

де T_0 – початкова температура ребра злитку, причому початок відліку безрозмірних координат $X = x/A$, $Y = y/B$ прийнято на одному з ребер злитка.

Розв'язання задачі здійснюється за допомогою сіткового методу з використанням різницевої схеми розщеплення [6]. Загальна тривалість нагрівання злитків до температури $T = 1500\text{ K}$ у досліджених розрахункових режимах змінювалась від 4 до 6 годин. Видача в друк результатів розрахунку проводилась для 15, 30 хв, 2, 4 та 6 годин від початку нагрівання. Досліджені режими нагріву злитків поділялися на декілька серій, у кожній з яких вивчався вплив окремого фактора за незмінних інших умов. Результати розрахунків представлені у вигляді залежності від часу температур печі та злитку (на ребрах, серединах граней та осі злитка).

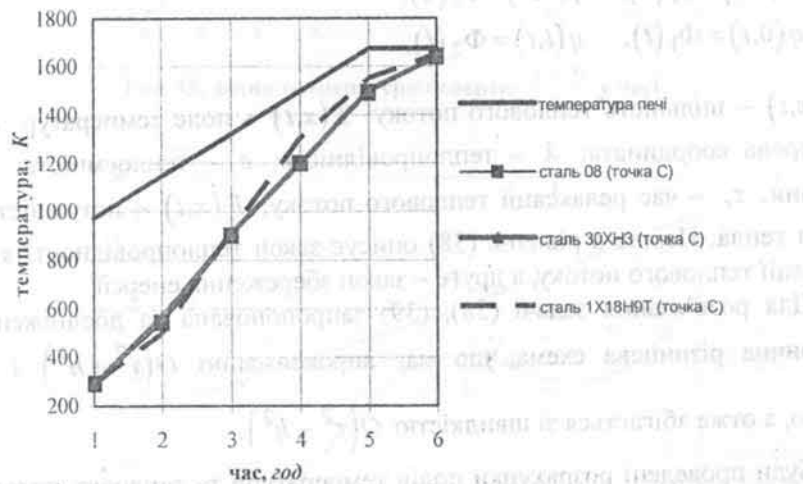


Рис. 12. Вплив марки сталі на нагрів центру злитків розміром $0,4\text{ м} : 0,4\text{ м} : 1\text{ м}$ при $T_{\text{поч}} = 293\text{ K}$, $T_{\text{печ},0} = 973\text{ K}$, $b = 175\text{ K/год}$, $a\Sigma = 3,5 \cdot 10^8\text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$

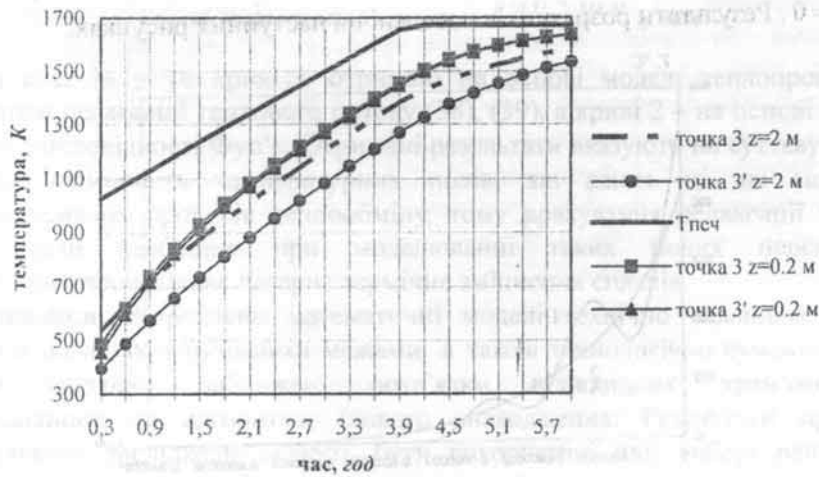


Рис. 13. Температура ребра (точка 3) та центру грані (точка 3') для різної довжини злитка

Отримані результати є основою для наступної якісної оцінки різних параметрів температурних режимів теплотехнологічного процесу та дозволяють врахувати їх при виборі раціональних режимів нагріву злитків у печах. Проведені

дослідження мають практичне значення для підвищення ефективності металургійного виробництва та при впровадженні енергозберігаючих технологій.

Задача про лазерне термічне зміцнення без плавлення поверхні. Математична модель складається з двох диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку відносно щільності теплового потоку і температури:

$$\tau_r \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (38)$$

та додаткових умов у початковий момент часу і на границях:

$$\begin{aligned} T(x,0) &= \phi_1(x), & q(x,0) &= \phi_2(x), \\ q(0,t) &= \Phi_1(t), & q(l,t) &= \Phi_2(t), \end{aligned} \quad (39)$$

де $q(x,t)$ – щільність теплового потоку; $T(x,t)$ – поле температур; t – час; x – просторова координата; λ – теплопровідність; c – теплоємність; ρ – густина речовини; τ_r – час релаксації теплового потоку; $F(x,t)$ – потужність внутрішніх джерел тепла. Перше з рівнянь (38) описує закон теплопровідності з урахуванням релаксації теплового потоку, а друге – закон збереження енергії.

Для розв'язання задачі (38), (39) запропонована та досліджена двошарова симетрична різницєва схема, що має апроксимацію $O(\tau^2 + h^2)$ і є безумовно стійкою, а отже збігається зі швидкістю $O(\tau^2 + h^2)$.

Були проведені розрахунки полів температури та теплових потоків для сталі, де приймалося: $\tau_r = 10^{-9}$ с, $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 0$, $\Phi_1(t) = 10^{11} \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau_r}$, $\Phi_2(t) = 0$, $F(x,t) = 0$. Результати розрахунків наведені на наступних рисунках.

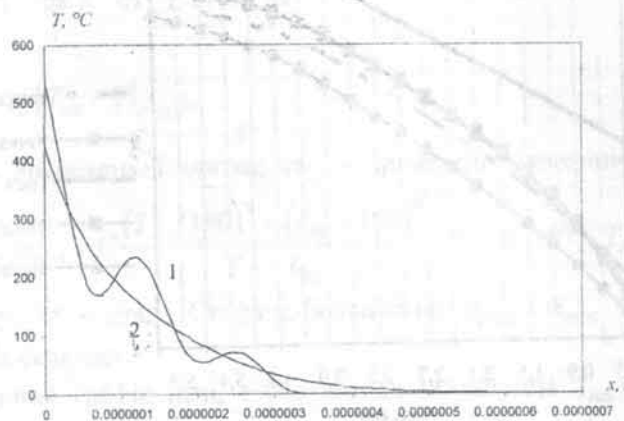


Рис. 14. Розподіл температури при $t/\tau_r = 5$

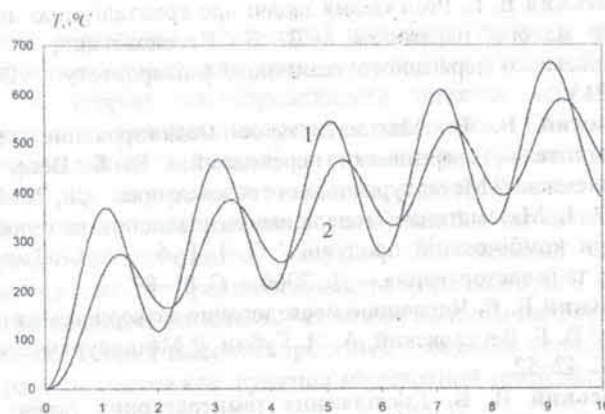


Рис. 15. Зміна температури поверхні $x=0$ у часі

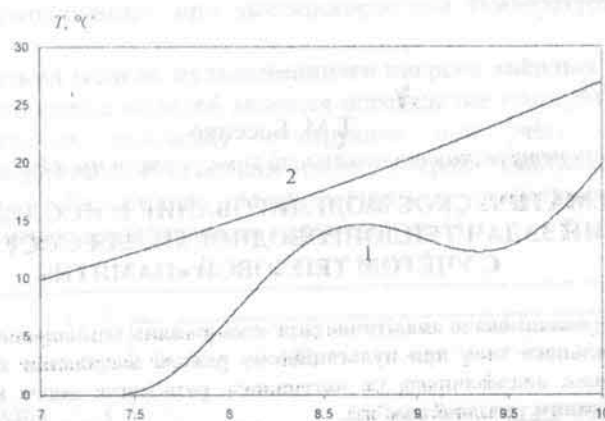


Рис. 16. Зміна температури при $x=0,5$ мкм у часі

На рис. 14 – 16 криві 1 отримані на основі моделі теплопровідності з урахуванням релаксації теплового потоку (38), (39), а криві 2 – на основі класичної моделі теплопровідності Фур'є. Отримані результати вказують на суттєву кількісну та якісну відмінність температурних полів, які дають ці дві моделі для високоінтенсивних процесів теплообміну, тому врахування релаксації теплового потоку вкрай необхідне при моделюванні таких нових перспективних технологічних процесів, як лазерне термічне зміцнення сплавів.

Висновки. Розроблено математичні моделі технічно важливих теплових процесів в областях з рухомими межами, а також технологічно суміжних з ними процесів прогріву, наближені розв'язки відповідних крайових задач теплопровідності та алгоритми їхнього знаходження. Результати проведених параметричних досліджень можуть бути використані при виборі раціональних режимів протікання розглянутих теплових процесів у відповідних технологіях.

Бібліографічні посилання

1. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич. – М., 2003. – 784 с.

2. **Веселовський В. Б.** Розв'язання задачі про кристалізацію напівобмеженого масиву методом малого параметра / В. Б. Веселовський, О. І. Губін. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – т. 11 – № 4. – С. 207–213.
3. **Веселовский В. Б.** Математическое моделирование тепловых процессов в составных телах с фазовыми переходами / В. Б. Веселовский, А. И. Губин, Н. В. Селезнева // *Металлургическая теплотехника*. – Д., 2005. – С. 71–79.
4. **Губін О. І.** Математичне моделювання плавлення металобрухту в конверторній ванні при комбінованій продувці / О. І. Губін, І. С. Тиріна. // *Диференціальні рівняння та їх застосування*. – Д., 2006. – С. 81–87.
5. **Веселовский В. Б.** Численное исследование затвердевания слитка прямоугольного сечения / В. Б. Веселовский, А. И. Губин. // *Металлургическая теплотехника*. – Д., 2006. – С. 42–52.
6. **Веселовський В. Б.** Дослідження температурних полів злитків прямокутного перетину в нагрівальних печах / В. Б. Веселовський, О. І. Губін, О. І. Губська. // *Вісник Дніпропетр. ун-ту*. – Д., 2007 – № 2/1 – С. 146–150.

Надійшла до редколегії 12.12.08

УДК 536.2:621.078

Т.М. Босенко

Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ С УЧЁТОМ ТЕПЛОВОЙ «ПАМЯТИ»

Подано та проаналізовано аналітичні розв'язки рівнянь теплопровідності гіперболічного та інтегро-диференціального типу при пульсаційному режимі нагрівання твердих тіл. Проведено порівняльний аналіз аналітичного та чисельного розв'язків задач нагріву багатопластової пластини з урахуванням теплової пам'яті.

Введение. В последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей повысилась актуальность проблемы взаимодействия интенсивных тепловых потоков с твёрдыми телами. В различных процессах обработки материалов концентрированными потоками энергии используется тепловое действие плазменного потока, лазерного или электронного луча. Создаются условия для скачкообразного изменения температуры поверхности твёрдого тела или граничащей с ней среды (так называемый тепловой удар), что приводит к появлению в телах мощной волны термических напряжений, достаточной для предпосылок к ухудшению как прочностных, так и теплофизических характеристик. Необходимость подобного рода исследований объясняется не только их теоретическим интересом, но и широким внедрением неравновесных систем и применением их на практике. Экстремальные условия работы составной конструкции – это высокоинтенсивный импульсный и пульсационный (воздействие различными по величине импульсами с определённой периодичностью во времени) нагрев, низкие и высокие температуры, плазменное напыление, лазерная обработка материалов. Такие условия привели в последнее время к необходимости построения математических моделей, основанных на гиперболических и интегро-дифференциальных уравнениях теплопроводности. Описание процессов теплопроводности в обычных условиях в средах со сложной структурой

© Т.М. Босенко, 2009