2. **Веселовський В. Б.** Розв'язання задачі про кристалізацію напівобмеженого масиву методом малого параметра / В. Б. Веселовський, О. І. Губін. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – т. 11 – № 4. – С. 207–213.
3. **Веселовский В. Б.** Математическое моделирование тепловых процессов в составных телах с фазовыми переходами / В. Б. Веселовский, А. И. Губин, Н. В. Селезнева // Металлургическая теплотехника. – Д., 2005. – С. 71–79.
4. **Губін О. І.** Математичне моделювання плавлення металобрухту в конверторній ванні при комбінованій продувці / О. І. Губін, І. С. Тиріна. // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2006. – С. 81–87.
5. **Веселовский В. Б.** Численное исследование затвердевания слитка прямоугольного сечения / В. Б. Веселовский, А. И. Губин. // Металлургическая теплотехника. – Д., 2006. – С. 42–52.
6. **Веселовський В. Б.** Дослідження температурних полів злитків прямокутного перетину в нагрівальних печах / В. Б. Веселовський, О. І. Губін, О. І. Губська. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – Д., 2007 – № 2/1 – С. 146–150.

Надійшла до редколегії 12.12.08

УДК 536.2:621.078

Т.М. Босенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ С УЧЁТОМ ТЕПЛОВОЙ «ПАМЯТИ»

Подано та проаналізовано аналітичні розв'язки рівнянь теплопровідності гіперболічного та інтегро-диференціального типу при пульсаційному режимі нагрівання твердих тіл. Проведено порівняльний аналіз аналітичного та чисельного розв'язків задач нагріву багатошарової пластини з урахуванням теплової пам'яті.

Введение. В последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей повысилась актуальность проблемы взаимодействия интенсивных тепловых потоков с твёрдыми телами. В различных процессах обработки материалов концентрированными потоками энергии используется тепловое действие плазменного потока, лазерного или электронного луча. Создаются условия для скачкообразного изменения температуры поверхности твёрдого тела или граничащей с ней среды (так называемый тепловой удар), что приводит к появлению в телах мощной волны термических напряжений, достаточной для предпосылок к ухудшению как прочностных, так и теплофизических характеристик. Необходимость подобного рода исследований объясняется не только их теоретическим интересом, но и широким внедрением неравновесных систем и применением их на практике. Экстремальные условия работы составной конструкции – это высокоинтенсивный импульсный и пульсационный (воздействие различными по величине импульсами с определённой периодичностью во времени) нагрев, низкие и высокие температуры, плазменное напыление, лазерная обработка материалов. Такие условия привели в последнее время к необходимости построения математических моделей, основанных на гиперболических и интегро-дифференциальных уравнениях теплопроводности. Описание процессов теплопроводности в обычных условиях в средах со сложной структурой (поликристаллические структуры, полимеры) приводит также к необходимости решения задач теплопроводности для сред, наделенных тепловой памятью или наследственностью. В теории теплопроводности понятие «среда с тепловой памятью» связывается с релаксационными процессами. Сами вещества не совершают целенаправленных действий, а с течением времени под влиянием внешних воздействий или внутренней эволюции изменяют свое состояние или свойства. Если процесс приобретения (или утраты) веществом каких-либо свойств (например, аккумулирование теплоты, энергии) или переход его из одного состояния в другое зависит от предшествующего (предыстории) состояния , то говорят, что вещество наделено памятью. Развитием данного направления является локально-неравновесная теория высокоскоростных процессов теплопроводности, в которой температура понимается как функция абсолютной температуры и скорости её изменения $v=\sqrt{a/\tau_r}$, где τ_r – время релаксации теплового потока в материале [1]. В данной работе изложены основные математические модели локально-неравновесной термодинамики при высокоскоростной температурной обработке конструкций.

Математическая модель пульсационного нагрева твёрдых тел. Основной задачей для данного класса моделей является определение температурного поля (в локально-неравновесных условиях) конструкции при учёте всего периода пульсационного воздейсвия. Рассмотрим пример нагрева пластины с внутренним источником тепла, обладающим релаксационными свойствами во время пульсационного режима воздействия на материал (рис.1).

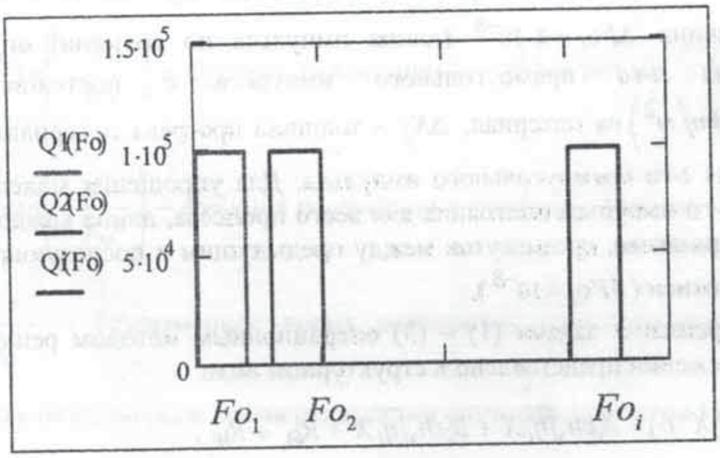

Рис. 1 Пульсационный нагрев материала точечным внешним источником Q_i, приложенных к стороне пластины $X=1$, время нагрева $Fo_i = 2i\cdot 10^{-8}$.

Для данного режима нагрева используется уравнение нестационарной теплопроводности гиперболического типа [2]

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial Fo_i}+Fo^r\frac{\partial^2\Theta_i}{\partial Fo_i^2}=\frac{\partial^2\Theta_i}{\partial X^2}+W_i,\ i=\overline{1..n}\,. \qquad (1)$$

Здесь $\Theta_i = \Theta_i(X, Fo)$ – локально-неравновесная температура, $W_i = W_i(X, Fo)$ – функция внутренних тепловых источников материала, $Fo_i = \frac{a \cdot \tau_i}{R_0^2}$ – промежуток времени, в течении которого происходит пульсационное воздействие на материал, $Fo^r = \frac{a \cdot \tau_r}{R_0^2}$ – безразмерное время релаксации теплового потока в материале, $X = \frac{x}{R_0}$ – безразмерная координата, a – коэффициент температуропроводности, R_0 – толщина пластины, м.

Начальные условия:

$$\begin{cases} \Theta_{i+1}\big|_{Fo=0} = \Theta_i(X, \Delta Fo_i), \\ \left.\frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial Fo}\right|_{Fo=0} = \frac{\partial \Theta_i(X, \Delta Fo_i)}{\partial Fo}, \end{cases} \tag{2}$$

граничные условия:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial \Theta_{i+1}}{\partial X}\right|_{X=0} = 0, \\ \Theta_{i+1}\big|_{X=1} = Q_i(\Delta X_i, \Delta Fo_i). \end{cases} \tag{3}$$

Величина $\Delta Fo_i = 2 \cdot 10^{-8}$ (длина импульса по времени) определяет время воздействия i-го прямоугольного импульса с постоянной величиной $Q_i = 10^5 \left(Bm/м^2\right)$ на материал, ΔX_i – толщина прогрева материала по окончанию воздействия i-го прямоугольного импульса. Для упрощения модели принято, что величина i-го импульса постоянна для всего процесса, длина каждого импульса по времени одинакова, промежуток между предыдущим и последующим импульсами также постоянен ($\delta Fo_i = 10^{-8}$).

При решении задачи (1) – (3) операционным методом решение системы в поле изображений представлено в структурном виде

$$\Theta_i(X, p) = A_i ch\sqrt{\eta_i} X + B_i sh\sqrt{\eta_i} X + R_{\Theta_i} + R_{W_i}. \tag{4}$$

Здесь A_i, B_i – константы интегрирования, которые определяются граничными и начальными условиями. Решение (4) задачи (1) – (3) включает в себя суперпозицию $\left(R_{\Theta_i} + R_{W_i}\right)$ частных решений уравнения (1), которые учитывают изменение температурного поля в материале $\left(R_{\Theta_i}\right)$ и изменение внутренних источников $\left(R_{W_i}\right)$ при i-ом прямоугольном импульсе [3]:

$$R_{\Theta_i}(X, p) = \sum_{n=0}^{i} \left[\frac{1}{\left(p + Fo^r p^2\right)^{n+1}} \frac{d^{2n}}{dX^{2n}} R_{\Theta_n} \right], \tag{5}$$

$$R_{W_i}(X,p)=\sum_{n=0}^{i}\left[\frac{1}{\left(p+Fo^r p^2\right)^{n+1}}\frac{d^{2n}}{dX^{2n}}R_{W_n}\right].\tag{6}$$

Для определения $R_{\Theta_i}(X,p)$ и $R_{W_i}(X,p)$ при пульсационном воздействии. фиксируется количество импульсов, которые действовали на материал и определяется толщина прогрева материала (ΔX_i), которая подставляется в выражения (5) и (6), предварительно продифференцировав $R_{\Theta_i}(X,p)$ и $R_{W_i}(X,p)$ в зависимости от количества импульсов.

Анализ теплового состояния системы при малых временах – временах релаксации системы ($Fo^r = 10^{-9}$), показывает, что предел величин R_{Θ_i}, R_{W_i} при пульсационном режиме приводит к образованию релаксационных функций теплового потока и внутренней энергии:

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}R_{\Theta_k}(X,p)\right)\to\alpha(p),\tag{7}$$

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}R_{W_k}(X,p)\right)\to\beta(p).\tag{8}$$

В поле оригиналов функции $\alpha(p)$, $\beta(p)$ принимают вид:

$\alpha(Fo)=\dfrac{1}{Fo^r}exp\left(-\dfrac{Fo}{Fo^r}\right)$ – функция релаксации теплового потока, (9)

$\beta(Fo)=\dfrac{1}{Fo^e}exp\left(-\dfrac{Fo}{Fo^e}\right)$ – функция релаксации внутренней энергии, (10)

где $Fo^r=\dfrac{a\cdot\tau_r}{R_0^2}$ – безразмерное время релаксации теплового потока. Введём $Fo^e=\dfrac{a\cdot\tau_e}{R_0^2}$ как безразмерное время релаксации внутренней энергии [4]. Поведение выражения $\sum_{k=1}^{i}R_{W_k}(X,p)$ при $i\to\infty$ подобно поведению убывающей экспоненциальной функции $\beta(p)$, которая отвечает за внутреннее состояние системы, что и позволило перейти от суммы R_W к $\beta(p)$ [1;4].

Учитывая (7) – (8) при пульсационном режиме, гиперболическое уравнение (1) при учёте всех предысторий воздействия импульсов на материал принимает интегро-дифференциальный вид, где слагаемые, содержащие функции теплового потока и внутренней энергии, запишутся как:

$$\int_0^{Fo}\alpha(s)\frac{\partial\Theta}{\partial Fo}ds\approx\sum_{k=0}^{\infty}\left[\delta_{k\Theta}\left(Fo_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\left(X,\Delta Fo_j\right)\right)\right] -$$

внешняя составляющая учёта предысторий изменения температурного возмущения при пульсационном воздействии на материал;

$$\int_0^{Fo}\beta(s)\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}ds\approx\sum_{k=0}^{\infty}\left[\delta_{kW}\left(Fo_k\right)\cdot\frac{d}{dX}\left(\sum_{j=1}^{n}\Theta_j\left(X,\Delta Fo_j\right)\right)\right] -$$

внутренняя составляющая учёта предысторий температурного возмущения при пульсационном воздействии на материал. Дельта-функции Дирака $\delta_{k\Theta}$ и δ_{kW} получены за счет учёта предыстории изменения температурного поля и внутренних тепловых источников материала при серии мгновенных импульсов. Тем самым, вычисление последующих импульсов (их величины) приводит к априорному определению количества импульсов (их длительности, мощности), после завершения которых происходит нагрев образца.

Полученные результаты в поле изображений демонстрируют, что при пульсационном режиме (рис. 2) величина релаксационной (неустановившейся) температуры Θ_i с увеличением количества воздействия импульсов на материал с течением времени достигает значения $T_{i\,max}$. Асимптотически температура $T_{i\,max}$ (поверхность 2 на рис. 2), приближается к значению T_i (поверхность 1 на рис. 2). Величина T_i определяется из интегро-дифференциального уравнения теплопроводности с учётом тепловой памяти [4]. Стремление Θ_i к значению T_i обусловлено слагаемыми R_{Θ_i}, R_{W_i}, которые представляют собой функции учёта изменения температурного поля $\left(R_{\Theta_i}\right)$ в материале и возмущение внутренних тепловых источников $\left(R_{W_i}\right)$ на протяжении всего пульсационного нагрева.

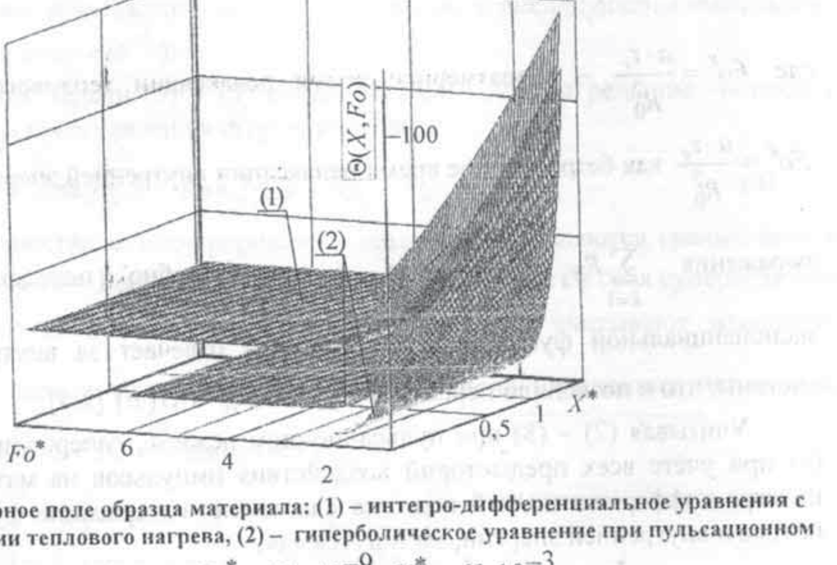

Рис. 2 Температурное поле образца материала: (1) – интегро-дифференциальное уравнения с учётом предыстории теплового нагрева, (2) – гиперболическое уравнение при пульсационном режиме при $Fo^*=Fo\cdot10^{-9}$, $X^*=X\cdot10^{-3}$

Нагрев многослойной конструкции с учётом тепловой памяти. Будем рассматривать в общем случае составное тело. Под составным телом понимается многослойная конструкция, состоящая из двух и более элементов, представляющих собой пластины, каждая из которых обладает своим временем релаксации теплового потока (τ_r) и временем релаксации внутренней энергии (τ_e). В общем случае между пластинами (слоями) составного тела неидеальный тепловой контакт. Основное уравнение для тепловых процессов с учётом тепловой памяти в случае многослойной конструкции имеет вид [5; 6]

$$\beta_\nu(0)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial Fo}+\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial Fo^2}+\int_0^{Fo}\beta_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial Fo}ds=$$

$$=\alpha_\nu(0)\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo)}{\partial X^2}+\int_0^{Fo}\alpha_\nu(s)\frac{\partial^2\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X^2}ds+W_\nu(X,Fo),\ \nu=\overline{1..m}. \tag{11}$$

Начальные условия:

$$\Theta(X,0)=\Phi_0(X); \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Theta(X,0)}{\partial Fo}=\Phi_1(X). \tag{13}$$

Граничные условия :

$$m_1\cdot\Theta_\nu(X,Fo)\Big|_{X=0}+m_2\cdot\int_0^{Fo}\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X}ds\Bigg|_{X=0}=f_1(Fo); \tag{14}$$

$$m_3\Theta_\nu(X,Fo)\Big|_{X=1}+m_4\cdot\int_0^{Fo}\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X}ds\Bigg|_{X=1}=f_2(Fo). \tag{15}$$

Условия на стыке:

$$\int_0^{Fo}\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X}ds\Bigg|_{X=1}=R_{\nu,\nu+1}\left[\Theta_{\nu+1}(0,Fo)-\Theta_\nu(1,Fo)\right]; \tag{16}$$

$$\int_0^{Fo}\alpha_\nu(s)\frac{\partial\Theta_\nu(X,Fo-s)}{\partial X}ds\Bigg|_{X=1}-$$

$$-\mu_{\nu+1,\nu}\int_0^{Fo}\alpha_{\nu+1}(s)\frac{\partial\Theta_{\nu+1}(X,Fo-s)}{\partial X}ds\Bigg|_{X=0}=f_3(Fo). \tag{17}$$

Здесь $Fo=\frac{a\cdot\tau}{R_0^2}$ безразмерное время, $Fo_\nu^r=\frac{a\cdot\tau_{r,\nu}}{R_0^2}$ – безразмерное время релаксации теплового потока в материале ν-ой пластины (слоя), $Fo_\nu^e=\frac{a\cdot\tau_{e,\nu}}{R_0^2}$ – безразмерное время релаксации внутренней энергии в материале ν-ой пластины,

$\alpha_\nu(Fo) = \frac{1}{Fo_\nu^r} exp\left(-\frac{Fo}{Fo_\nu^r}\right)$ – функция релаксации теплового потока ν-ой пластины;

$\beta_\nu(Fo) = \frac{1}{Fo_\nu^e} exp\left(-\frac{Fo}{Fo_\nu^e}\right)$ – функция релаксации внутренней энергии ν-ой пластины; R_0 – наибольшая толщина пластины, м; R_ν – толщина ν-ой пластины, м; $W_\nu = W_\nu(X, Fo)$ – функция внутренних тепловых источников материала ν-ой пластины; m_i $(i = 1,2,3,4)$ – коэффициенты, определяющие вид граничных условий; $R_{\nu,\nu+1}$ – термическое сопротивление между ν-ой и $(\nu+1)$-ой пластинами; f_i $(i=1,2,3)$ – граничные функции; Φ_i $(i=1,2)$ – функции начального распределения; $\mu_{\nu+1,\nu}$ – коэффициент пропорциональности.

Решение задачи (11) – (17) представлено в виде суммы частных решений, которые формируются под влиянием следующих компонент воздействия: внешних граничных условий, условий на стыке пластин, источников тепла по сечению пластины, начального распределения температуры и взаимного теплового влияния пластин.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по временной переменной Fo и асимптотическое приближение, получим решение задачи (11) – (17) в виде:

$$\Theta_\nu(X, p) = \sum_{r=1}^{2m} \bar{g}_r(p) W_{r,\nu}\left(X, Fo_\nu^r, Fo_\nu^e, p\right) + z_{\nu,r}\left(X, Fo_\nu^r, Fo_\nu^e, p\right), \quad (18)$$

где первое слагаемое в (12) представляет собой общее решение однородного уравнения (11)

$$W_{r,\nu}\left(X, Fo_\nu^r, Fo_\nu^e, p\right) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,r}^\nu \left(X, Fo_\nu^r, Fo_\nu^e\right) p^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n p^n}. \quad (19)$$

Компоненты воздействия $\bar{g}_r(p)$ характеризуют влияние неравномерного начального распределения температуры, а также распределение источников (стоков) тепла по сечению, параметры контактного термического сопротивления, релаксацию теплового потока и внутренней энергии. Для расчёта температурного поля m-слойного твёрдого тела необходимо вычислить функциональные комплексы [7]:

$\mu_{n,r}^\nu\left(X, Fo_\nu^r, Fo_\nu^e\right)$, φ_n :

$$\mu_{n,r}^\nu = \left(\mu_{n,r}^\nu(X)\right)_{параб} + \left(\mu_{n,r}^\nu\left(X, Fo_\nu^r\right)\right)_{гипер} + \left(\mu_{n,e}^\nu\left(X, Fo_\nu^e\right)\right)_{интегро-диф}, \quad (20)$$

$$\left(\mu_{n,r}^\nu(X)\right)_{параб} = 1 + \frac{X^2}{\beta_\nu 2!} + \frac{X^{2n}}{\beta_\nu^n (2n)!}, \quad (21)$$

$$\left(\mu_{n,r}^{\nu}\left(X, Fo_{\nu}^{r}\right)\right)_{гипер} = (n-1) \cdot Fo_{\nu}^{r} \frac{X^{2n-2}}{\beta_{\nu}^{n-1}(2n-2)!}, \; \mathrm{n} = 2, 3, 4, .., \tag{22}$$

$$\left(\mu_{n,r}^{\nu}\left(X, Fo_{\nu}^{r}, Fo_{\nu}^{e}\right)\right)_{интегро-диф} = (n-1) \cdot Fo_{\nu}^{r} \frac{R_0^{2(n-1)}}{\beta_{\nu}^{n-1}(2n-1)!} + (n-2) \cdot Fo_{\nu}^{r} \frac{R_0^{2(n-1)}}{\beta_{\nu}^{n-1}(2n-2)!}, \tag{23}$$

$$\varphi_n = (\varphi_n)_{параб} + \left(\varphi_n\left(X, Fo_{\nu}^{r}\right)\right)_{гипер} + \left(\mu_{n,r}^{\nu}\left(X, Fo_{\nu}^{r}, Fo_{\nu}^{e}\right)\right)_{интегро-диф}, \tag{24}$$

где $\beta_{\nu} = \frac{\alpha_{\nu} \cdot R_0^2}{\alpha_0 \cdot R_{\nu}^2}$ – коэффициент пропорциональности.

Частное решение неоднородного интегро-дифференциального уравнения (11) определено соотношениями [8]:

$$z_{\nu,r}\left(X, Fo_{\nu}^{r}, Fo_{\nu}^{e}, p\right) = z_{\nu}^{пар}(X_{\nu}, Fo) + z_{\nu}^{гип}(X_{\nu}, Fo) + Fo_{\nu}^{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{n} \frac{n}{(n-2)!} \int_0^{Fo} (Fo-\theta)^{n-2} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_{\nu}^{2n}} W_{\nu}(X_{\nu}, \theta) d\theta, \tag{25}$$

$$z_{\nu}^{пар}(X_{\nu}, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{n} \frac{Fo^{n}}{n!} \varphi_{\nu}^{(2n)}(X_{\nu}) + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{n} \frac{1}{n!} \int_0^{Fo} (Fo-\theta)^{n} \frac{\partial^{2n}}{\partial X_{\nu}^{2n}} W_{\nu}(X_{\nu}, \theta) d\theta, \tag{26}$$

$$z_{\nu}^{гип}(X_{\nu}, Fo) = Fo_{\nu}^{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\nu}^{n} \frac{(n+1) \cdot Fo^{n-2}}{(n-2)!} \varphi_{\nu}^{(2n)}(X_{\nu}). \tag{27}$$

В поле оригиналов решение (11) представлено в виде [9]

$$\Theta_{\nu}(X_{\nu}, Fo) = \sum_{r=1}^{2m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[\mu_{n,r}^{\nu}(X_{\nu}), \varphi_n \right] \bar{g}_r^{(n)}(Fo) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_{k,r}(P_k)}{\Psi'(P_k)} Q\left[\mu_{k,r}(X_{\nu}), P_k \right] \exp(-\gamma_k^2 Fo) + z_{\nu,r}(X_{\nu}, Fo) \right\}. \tag{28}$$

Решение (28), которое описывает температурное поле локально-неравновесного состояния многослойной пластины, содержит в себе соответствующие комплексы [10]:

$$\Omega_n\left[\mu_{n,r}(X_{\nu}), \varphi_n\right] = \frac{\mu_{n,r}(X_{\nu})}{\varphi_0} - \sum_{j=1}^{n} \Omega_{n-j}\left[\mu_{n-j,r}(X_r), \varphi_{n-j}\right] \frac{\varphi_j}{\varphi_0}, \tag{29}$$

$$Q\left[\mu_{n,\nu}(X_{\nu}), P_k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,\nu}(X_{\nu}) P_k, \tag{30}$$

где

$$\Psi(\varphi_n, P_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_k^n - \tag{31}$$

целые функции; $P_k = \gamma_k^2 \dfrac{a}{R_0^2}$; γ_k – корни трансцендентного уравнения

$$\Psi(\varphi, \gamma) = 0 \tag{32}$$

Общий вид решения (18) уравнения (11) позволяет определить температурное поле составного тела при экстремальных тепловых воздействиях , однако не позволяет получить точное аналитическое решение в связи с затруднительным нахождением интеграла Дюамеля. Решение (28), полученное при асимптотике решения (18) для малых времён (порядка времен релаксации теплового потока и внутренней энергии), позволяет определить температурное поле составного тела, представляя решение в виде суперпозиции параболической, гиперболической, интегро-дифференциальной составляющих, а также позволяет интеграл Дюамеля привести к приближённому сходящемуся ряду, что даёт возможность применить полученное решение для класса задач теплопроводности в условиях экстремальных тепловых нагрузок. Основное внимание было также уделено к выбору граничных функций, в зависимости от которых решение (18) может быть как устойчивым , так и неустойчивым. На примере функций полиномиального типа было показано устойчивость решения (18) при малых временах.

Численный расчёт температурного поля конструкции с учётом тепловой памяти. Для нахождения решения полученной системы (11) – (17) применён итерационный процесс. Пусть $\overline{\omega}_h = \left\{ X_i = i \cdot h,\ i = 0,1,2,..,N;\ h = \dfrac{1}{N} \right\}$ – равномерная сетка с шагом h на отрезке $0 \le X \le 1$; $\overline{\omega}_\tau = \left\{ Fo_j = j \cdot h,\ j = 0,1,2,..,N_0;\ \tau = \dfrac{T}{N_0} \right\}$ – сетка с шагом τ на отрезке $0 \le Fo \le T$, $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_h = \left\{ \left(X_i, Fo_j \right),\ X_i \in \overline{\omega}_h,\ Fo_j \in \overline{\omega}_\tau \right\}$.

Преобразовывая исходное уравнение (11), получим численный аналог вида [11]

$$\frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} + Fo_\nu^r \cdot \frac{y_i^{j+1} - 2 \cdot y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{y_i^{j+1} - 2 \cdot y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} =$$

$$= \left(\Lambda_{пар,\nu} + \Lambda_{гип,\nu} + \Lambda_{пам,\nu} \right) \cdot \left(y_{i-1}^{j+1} - 2 \cdot y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1} \right) + \varphi_{i,\nu}^j . \tag{33}$$

Выражение $\Lambda_\nu = \Lambda_{пар,\nu} + \Lambda_{гип,\nu} + \Lambda_{пам,\nu}$ принимает вид дополнительного итерационного этапа в процессе вычисления (33), которое является асимптотическим представлением интегралов уравнения (11) в виде сумм, откуда

$$\Lambda_{пар,\nu} = a \cdot \beta_\nu \cdot \sigma , \tag{34}$$

$$\Lambda_{гип,\nu} = \sigma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_{k,\nu} , \tag{35}$$

$$\Lambda_{пам,\nu} = \sigma \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,\nu}\,; \tag{36}$$

где σ – весовой множитель, $A_{k,\nu}, B_{k,\nu}$ – константы разложения в ряд функций внутренней энергии $(\beta(Fo))$ и теплового потока $(\alpha(Fo))$ соответственно, $\varphi_{i,\nu}^{j} = W\left(X_i, Fo_j\right)$ – функция внутреннего теплового источника ν-го слоя конструкции.

На рис. 3 представлено аналитическое и численное решения задачи для поверхностного слоя двухслойной пластины. Расчёт проводился для двух случаев: при $\sigma = 1$ – чисто неявная схема – и при $\sigma = 1/2$ – симметричная схема, которая выявилась более эффективной при расчёте температурного поля в связи с более точной аппроксимацией. При малых временах (порядка времён релаксации) различий в решениях не наблюдается [12]. Из рис. 3 видно, что для пластины высокоскоростной нагрев имеет особенности на начальных стадиях нагрева, которые выражаются в выявлении локального отклонения температурного поля, выраженного явным скачком. Физическая интерпретация данного феномена заключается в учете тепловой памяти прошлых состояний нагрева (или охлаждения), которые в математической постановке выраженные в виде функций релаксации теплового потока и внутренней энергии.

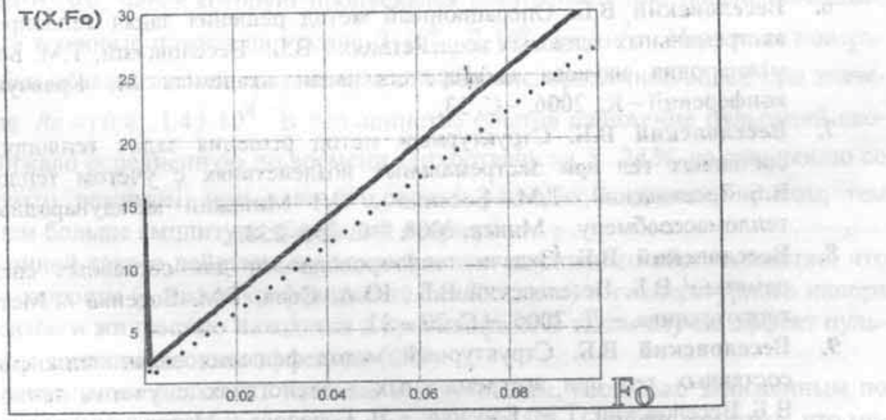

Рис. 3. Сравнительный анализ численного (….) и аналитического (_) решений; материал внешнего слоя $X_2 = 1$ – сталь-10 толщиной L=10^{-3} м

Выводы. Проведенные на основе представленных моделей исследования показали, что неравновесные эффекты оказывают определяющее влияние на механизм и основные закономерности распространения высокоскоростных волн в активных средах. В условиях, не находящихся в локальном равновесии, термодинамические потенциалы переноса (то есть температуры и концентраций компонентов) существенно отличаются от классических, локально-равновесных. Это и приводит к качественно новым свойствам распространению тепловой волны в неравновесных условиях. Развитые методы могут служить основой для построения неравновесных моделей процессов переноса, которые протекают в различных физических системах.

Таким образом, получены структурные решения задач нестационарной теплопроводности для составных элементов конструкций, математические модели которых представлены в виде систем параболических, гиперболических и интегро-дифференциальных уравнений. Такие решения обладают однообразной вычислительной схемой. Предложены также интегральные соотношения для решения тепловых задач в пространстве изображений преобразования по Лапласу. Полученный анализ даёт возможность выделить в решении источники возмущения температурного поля многослойной конструкции.

Библиографические ссылки

1. **Соболев С. Л.** Автоволны в локально-неравновесных средах (средах с памятью) /С.Л. Соболев //.– Препринт ОИХФ АН СССР. – Черноголовка, 1989. – С. 112–124.
2. **Веселовский В.Б.** Математическое моделирование импульсного нагрева твёрдых тел / В.Б. Веселовский, Т.М. Босенко // Металлургическая теплотехника. – Д., 2008. – С. 91–101.
3. **Босенко Т.М.** Математическое моделирование пульсационного нагрева твердых тел / Т.М. Босенко // XV международная конференция «Теплотехника и энергетика в металлургии»: Материалы конференции – Д., 2008. – С. 17–18.
4. **Соболев С. Л.** Локально-неравновесные модели процессов переноса / С.Л. Соболев // Успехи физических наук, 1997 (167), 10. – С. 1095–1106.
5. **Веселовский В.Б.** Задачи теплопроводности для составных сред при экстремальных условиях / В.Б. Веселовский, Ю.А. Малая, Т.М. Босенко // Вестник Херсонского национального университета, – Херсон, 2006. – С. 101–105.
6. **Веселовский В.Б.** Операционный метод решения задач теплопроводности при экстремальных тепловых воздействиях / В.Б. Веселовский, Т.М. Босенко // XI-а міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Матеріали конференції – К., 2006. – С. 53.
7. **Веселовский В.Б.** Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учётом тепловой памяти / В.Б. Веселовский, Т.М. Босенко // VI Минский международный форум по тепломассообмену. – Минск, 2008. – С. 256–258.
8. **Веселовский В.Б.** Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью/ В.Б. Веселовский В.Б., Ю.А. Сова, Т.М. Босенко // Металлургическая теплотехника. – Д., 2005. – С. 20 – 31.
9. **Веселовский В.Б.** Структурный метод решения задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти / В.Б. Веселовский, Т.М. Босенко, К.В. Горелова // Металлургическая теплотехника. – Д., 2007. – С. 91–101.
10. **Веселовский В.Б.** Решение задач теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти / В.Б. Веселовский, Т.М. Босенко, К.В. Горелова // Вестник ХНТУ. – Херсон. – Вып. 2 (28), 2007. – С. 87–92.
11. **Босенко Т.М.** Численное моделирование тепловых процессов в средах с тепловой памятью / Т.М. Босенко // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Д., 2007. – С. 305–306.
12. **Босенко Т.М.** Численный метод решения задачи теплопроводности для составных тел при экстремальных воздействиях с учетом тепловой памяти / Т.М. Босенко // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2007. – С. 111–117.

Надійшла до редколегії 30.12.08