УДК 539.3

А.Г. Зеленський
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

МЕТОД ПОДВІЙНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ В АНАЛІТИЧНІЙ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Розвинено метод подвійних тригонометричних рядів в аналітичній теорії нетонких фізично нелінійних пологих оболонок, яка базується на поєднанні методу розкладання напружено-деформованого стану (НДС) у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра та методу збурень лінійно пружних властивостей матеріалу і застосуванні варіаційного принципу Рейснера. Досліджено внутрішній НДС нелінійно пружних пологих оболонок при циліндричному згині з урахуванням нульового та першого наближень за малим фізичним параметром.

Вступ. Метод зведення тривимірної задачі теорії пружності до двовимірної для пластин та оболонок з використанням поліномів Лежандра в лінійній теорії пластин та оболонок було започатковано в [2; 15] і розвинуто в [4; 9–12]. Огляд аналітичних теорій виконано у [7; 12]. У просторовій постановці з використанням методу малого параметра і тривимірних рівнянь теорії пружності розглядались задачі: [1] – для товстої фізично нелінійної пластини, в [3; 8] – для сферичних оболонок. Метод малого параметра використовувався також у [13; 14] при розгляданні плоских фізично нелінійних задач і задач згину для тонких пластин та оболонок відповідно. Дана робота тривимірну задачу теорії пружності для нелінійно пружної оболонки зводить до двовимірної на основі варіаційного принципу Рейснера [16] з використанням методу розкладання компонент напружено-деформованого стану (НДС) у ряди за поперечною координатою при допомозі поліномів Лежандра. та методу збурень лінійно пружних властивостей матеріалу.

Постановка задачі. Розглядається фізично нелінійна за Каудерером [6] однорідна, прямокутна у плані $(a\times b)$, полога оболонка довільної сталої товщини h з радіусами кривини серединної поверхні R_1, R_2 у прямокутній системі координат $Oxyz$. Осі x, y належать серединній поверхні, вісь z спрямована перпендикулярно до неї, вбік її опуклості. На лицевих поверхнях оболонки граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{z|z=\pm h/2} = \frac{1}{2}(\mp q(x,y) - p(x,y)),\ \sigma_{xz|z=\pm h/2} = \sigma_{yz|z=\pm h/2} = 0, \qquad (1)$$

а на бічній поверхні вони можуть бути кінематичними, статичними або змішаними.

Основні співвідношення. Уведемо згідно з [5] малий параметр $\varepsilon = 1/g_2$ (g_2 – безрозмірна стала матеріалу порядку $10^4 \div 10^6$) у залежностях між деформаціями і напруженнями для фізично нелінійного тіла. Одержимо відповідні співвідношення [5]. Розкладаючи зовнішнє навантаження $q(x,y), p(x,y)$ у ряди за ε, а компоненти НДС у ряди за поліномами Лежандра $P_k = P_k(2z/h)$ і за малим параметром ε, одержимо наступні залежності:

$$U(x,y,z)=\sum_{l=0}^{\infty}U^{(l)}(x,y,z)\varepsilon^{l},$$

$$(U,V,W,\varepsilon_x,\ldots,\gamma_{yz},\sigma_x,\ldots,\sigma_{yz},q(x,y),p(x,y)\,)),\qquad(2)$$

де

$$U^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k u_k^{(l)}(x,y),\ (U\to V,u_k^{(l)}\to v_k^{(l)});\ W^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k w_{k+1}^{(l)}(x,y)$$

$$\varepsilon_x^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\left(\frac{\partial u_k^{(l)}}{\partial x}+k_1 w_{k+1}^{(l)}\right)\varepsilon^{l},\ k_i=\frac{1}{R_i},(i=1,2),(x,y;u_k^{(l)}\to v_k^{(l)};k_1\to k_2);$$

$$\varepsilon_z^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P'_k w_{k+1}^{(l)};\ \gamma_{xz}^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}(P_k\frac{\partial w_{k+1}^{(l)}}{\partial x}+P'_k u_k^{(l)}-k'_1 P'_k u_k^{(l)}),$$

$$k'_i=k_i,(i=1,2),\ (x,y;u_k^{(l)}\to v_k^{(l)};k'_1\to k'_2);\ \gamma_{xy}^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\left(\frac{\partial u_k^{(l)}}{\partial y}+\frac{\partial v_k^{(l)}}{\partial x}\right).$$

Зазначимо, що згідно [5] граничні умови (1) при цьому виконуються.

Враховуючи надалі в компонентах тангенціальних переміщень (2) доданки з індексами $k=0,1,2,3$ у поліномах Лежандра і виконуючи асимптотичне розщеплення за ε у рівнянні Рейснера, дістанемо

$$\sigma_z^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{5}P_k s_{zk}^{(l)}(x,y);\ \sigma_{xz}^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{4}P_k t_{xk}^{(l)}(x,y),(x,y);\qquad(3)$$

$$\sigma_x^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{5}P_k s_{xk}^{(l)}(x,y)-\Phi_{sx}^{(l-1)}(x,y);\ \sigma_{xy}^{(l)}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{3}P_k t_{yxk}^{(l)}(x,y)-\Phi_{syx}^{(l-1)},$$

де

$$s_{z0}^{(l)}(x,y)=-\frac{1}{2}p^{(l)}-\frac{1}{10}\omega_2^{(l)};s_{z1}^{(l)}(x,y)=-\frac{3}{5}(\omega_1^{(l)}+\frac{1}{14}\omega_3^{(l)});s_{z2}^{(l)}(x,y)=\frac{1}{7}\omega_2^{(l)};\qquad(4)$$

$$s_{z3}^{(l)}(x,y)=\frac{1}{10}\omega_1^{(l)}+\frac{1}{15}\omega_3^{(l)};\quad s_{z4}^{(l)}(x,y)=-\frac{3}{70}\omega_2^{(l)};\quad s_{z5}^{(l)}(x,y)=-\frac{1}{42}\omega_3^{(l)};$$

$$t_{x0}^{(l)}=\frac{1}{h}Q_{1x}^{(l)},\quad t_{x1}^{(l)}=\frac{3}{5h}Q_{2x}^{(l)},\quad t_{x2}^{(l)}=-\frac{1}{h}Q_{1x}^{(l)}+\frac{3}{7h}Q_{3x}^{(l)},\quad t_{x3}^{(l)}=-\frac{3}{5h}Q_{2x}^{(l)},$$

$$t_{x4}^{(l)}=-\frac{3}{7h}Q_{3x}^{(l)},(x,y);$$

$$s_{xk}^{(l)}(x,y)=d_0(u_{k,x}^{(l)}+k_1 w_{k+1}^{(l)}+\nu(v_{k,y}^{(l)}+k_2 w_{k+1}^{(l)}))+d_{10}s_{zk}^{(l)},\ (k=0,1,2);$$

$$s_{x3}^{(l)}(x,y)=d_0(u_{3,x}^{(l)}+\nu v_{3,y}^{(l)})+d_{10}s_{z3}^{(l)};\ \ s_{xi}^{(l)}(x,y)=d_{10}s_{zi}^{(l)},(i=4,5);$$

$$(x,y;u,v;k_1\to k_2);\ t_{yxk}^{(l)}(x,y)=G\ (u_{k,y}^{(l)}+v_{k,x}^{(l)}),\ (k=0,1,2,3),$$

$$\omega_1^{(l)}(x,y)=q^{(l)}(x,y);$$

$$\omega_2^{(l)}(x,y)=\sum_{k=1}^{3} q_{2k} w_k^{(l)}(x,y)+e_{20}\phi_0^{(l)}(x,y)+e_{22}\phi_2^{(l)}(x,y)+$$

$$+e_{2p}p^{(l)}(x,y)+e_{2\omega\xi}I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}(x,y);$$

$$\omega_3^{(l)}(x,y)=q_{32}w_2^{(l)}(x,y)+q_{33}w_3^{(l)}(x,y)+e_{31}\phi_1^{(l)}(x,y)+e_{33}\phi_3^{(l)}(x,y)+$$

$$+e_{3q}q^{(l)}(x,y)+e_{3\omega\xi}I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}(x,y);\ \phi_k^{(l)}(x,y)=u_{k,x}^{(l)}+v_{k,y}^{(l)};$$

$$Q_{kx}^{(l)}(x,y)=h_{k1}w_{1,x}^{(l)}+h_{k3}w_{3,x}^{(l)}+\sum_{i=0}^{3} l_{kxi}u_i^{(l)}+b_0 G I_{qkx}^{(l-1)}(x,y),\ (k=1,3),$$

$$Q_{2x}^{(l)}(x,y)=h_{22}w_{2,x}^{(l)}+\sum_{i=1}^{3} l_{2xi}u_i^{(l)}+b_0 G I_{q2x}^{(l-1)},\ (x,y;u_i\to v_i;k_1\to k_2;k_1'\to k_2');$$

$$\Phi_{sx}^{(l-1)}(x,y,z)=a_0 d_0\Phi_{vx}^{(l-1)};\ \Phi_{sy}^{(l-1)}(x,y,z)=a_0 d_0\Phi_{vy}^{(l-1)};$$

$$\Phi_{syx}^{(l-1)}(x,y,z)=b_0 G\Phi_{yx}^{(l-1)};$$

$$\Phi_{vx}^{(l-1)}(x,y,z)=\Phi_x^{(l-1)}+\Phi_y^{(l-1)};\ \Phi_{vy}^{(l-1)}(x,y,z)=\Phi_x^{(l-1)}+\Phi_y^{(l-1)};$$

$$\Phi_x^{(l-1)}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\left(2\sigma_x^{(j)}-\sigma_y^{(j)}-\sigma_z^{(j)}\right);$$

$$\Phi_y^{(l-1)}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\left(2\sigma_y^{(j)}-\sigma_x^{(j)}-\sigma_z^{(j)}\right);\ \Phi_{yx}^{(l-1)}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\sigma_{xy}^{(j)};$$

$$\tau_0^{(i)}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{m+n=i}\sum_{n=0}(\sigma_x^{(m)}\sigma_x^{(n)}+\sigma_y^{(m)}\sigma_y^{(n)}+\sigma_z^{(m)}\sigma_z^{(n)}-$$

$$-(\sigma_x^{(m)}\sigma_y^{(n)}+\sigma_x^{(m)}\sigma_z^{(n)}+\sigma_y^{(m)}\sigma_z^{(n)})+3(\sigma_{xy}^{(m)}\sigma_{xy}^{(n)}+\sigma_{xz}^{(m)}\sigma_{xz}^{(n)}+\sigma_{yz}^{(m)}\sigma_{yz}^{(n)}));$$

$$I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}=\int_z\left(\frac{P_0}{15}-\frac{2P_2}{21}+\frac{P_4}{35}\right)\left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\left(\sigma_x^{(j)}+\sigma_y^{(j)}-2\sigma_z^{(j)}\right)\right)dz;$$

$$I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}=\int_z\left(\frac{3P_1}{70}-\frac{P_3}{15}+\frac{P_5}{42}\right)\left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\left(\sigma_x^{(j)}+\sigma_y^{(j)}-2\sigma_z^{(j)}\right)\right)dz;$$

$$I_{q1x}^{(l-1)}(x,y)=\int_z\left(-\frac{14}{15}P_0+\frac{1}{3}P_2+\frac{3}{5}P_4\right)\left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\sigma_{xz}^{(j)}\right)dz;$$

$$I_{q2x}^{(l-1)}(x,y)=\frac{7}{2}\int_z\left(P_3-P_1\right)\left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\sigma_{xz}^{(j)}\right)dz;$$

$$I_{q3x}^{(l-1)}(x,y)=\frac{7}{5}\int_z\left(-P_0-5P_2+6P_4\right)\left(\sum_{i=0}^{i+j=l-1}\sum_{j=0}\tau_0^{(i)}\sigma_{xz}^{(j)}\right)dz;\ e_{2\omega\xi}=\frac{105a_0(2\nu-1)}{hd_{20}(1-\nu)};$$

$$e_{3\omega\xi}=\frac{770a_0(2\nu-1)}{hd_{20}(1-\nu)};\ a_0=\frac{g_2^2}{27G^3};\ b_0=6a_0,$$

де $d_0, \nu, d_{10}, G, q_{2k}, ..., l_{2y3}, ... d_{20}$ – механіко-геометричні сталі (МГС) для відповідної лінійної ізотропної оболонки. Тут і надалі інтеграли беруться за товщиною оболонки.

Диференціальні рівняння рівноваги і крайові умови. Із варіаційного рівняння Рейснера [16], виконуючи асимптотичне розщеплення за параметром ε, дістанемо диференціальні рівняння рівноваги оболонки та крайові умови в l-му наближенні по ε. Опускаючи громіздкі викладки, одержимо таку рекурентну систему диференціальних рівнянь рівноваги фізично нелінійної оболонки в l-му наближенні до ε

$$D_{i,1}u_0^{(l)} + D_{i,2}v_0^{(l)} + D_{i,3}u_1^{(l)} + D_{i,4}v_1^{(l)} + D_{i,5}u_2^{(l)} + D_{i,6}v_2^{(l)} + D_{i,7}u_3^{(l)} +$$
$$+ D_{i,8}v_3^{(l)} + D_{i,9}w_1^{(l)} + D_{i,10}w_2^{(l)} + D_{i,11}w_3^{(l)} = D_{ip}^{(l)} + D_{iq}^{(l)} + D_{i\xi}^{(l-1)}, \ (i = 1, 2, ... 11), \quad (5)$$

де $D_{ij}\ (j = 1, 2, ..., 11)$ – диференціальні оператори; $D_{ip}^{(l)}, D_{iq}^{(l)}$ – функції l-го наближення від зовнішнього навантаження (для $l \geq 1$ вони дорівнюють нулю, а для $l = 0$ – співпадають із відповідними функціями для лінійної ізотропної оболонки); $D_{i\xi}^{(l-1)}$ – функції, що залежать від компонентів НДС попередніх наближень від 0-го до $(l-1)$-го наближення включно. Рівняння (5) отримані прирівнюванням до нуля множників при варіаціях $\delta u_0^{(l)}, \delta v_0^{(l)}, \delta u_1^{(l)}, ..., \delta v_3^{(l)}, \ \delta w_1^{(l)}, \delta w_2^{(l)}, \delta w_3^{(l)}$ у варіаційному рівнянні Рейснера.

Показано, що диференціальна матриця системи (5) є симетричною. Диференціальні оператори лівих частин системи (5) дорівнюють відповідним операторам лівих частин системи рівнянь для ізотропної оболонки. Функції $D_{i\xi}^{(l-1)}$ залежать від компонент НДС від 0-го до $(l-1)$-го наближення включно за параметром ε:

$$D_{1\xi}^{(l-1)} = \frac{hd_{10}}{10} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2\xi}^{(l-1)}}{\partial x} - k_1' b_0 G I_{q1x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx0}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx0}^{(l-1)}}{\partial y}, \quad (6)$$

$$D_{3\xi}^{(l-1)} = \frac{hd_{10}}{70} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} - \frac{k_1' b_0 G}{5} I_{q2x}^{(l-1)} + \frac{2b_0 G}{h} I_{q1x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx1}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx1}^{(l-1)}}{\partial y},$$

$$D_{5\xi}^{(l-1)} = -\frac{hd_{10}}{35} e_{2\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{k_1' b_0 G}{5} \left(I_{q1x}^{(l-1)} - \frac{3}{7} I_{q3x}^{(l-1)} \right) + \frac{6b_0 G}{5h} I_{q2x}^{(l-1)} +$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{sx2}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx2}^{(l-1)}}{\partial y},$$

$$D_{7\xi}^{(l-1)} = -\frac{hd_{10}}{105} e_{3\omega\xi} \cdot \frac{\partial I_{\omega 3\xi}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{3k_1' b_0 G}{35} I_{q2x}^{(l-1)} + \frac{6b_0 G}{7h} I_{q3x}^{(l-1)} + \frac{\partial \Phi_{sx3}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{syx3}^{(l-1)}}{\partial y},$$

$(D_{i\xi} \to D_{i+1\xi};\ x, y;\ k_1' \to k_2';\ i = 1, 3, 5, 7)$;

$$D_{9\xi}^{(l-1)} = b_0 G \left(\frac{\partial I_{q1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{h d_{10} k_{12}}{10} e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx0}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy0}^{(l-1)};$$

$$D_{10\xi}^{(l-1)} = \frac{b_0 G}{5} \left(\frac{\partial I_{q2x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q2y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{h d_{10} k_{12}}{70} e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)} + \frac{e_{2\omega\xi}}{5} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx1}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy1}^{(l-1)},$$

$$D_{11\xi}^{(l-1)} = -\frac{b_0 G}{5} \left(\frac{\partial I_{q1x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q1y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3 b_0 G}{35} \left(\frac{\partial I_{q3x}^{(l-1)}}{\partial x} + \frac{\partial I_{q3y}^{(l-1)}}{\partial y} \right) + \frac{3}{35} e_{3\omega\xi} I_{\omega 3\xi}^{(l-1)} -$$

$$- \frac{h d_{10} k_{12}}{35} e_{2\omega\xi} I_{\omega 2\xi}^{(l-1)} + k_1 \Phi_{sx2}^{(l-1)} + k_2 \Phi_{sy2}^{(l-1)}, k_{12} = k_1 + k_2.$$

У співвідношеннях (6):

$$\Phi_{sxm}^{(l-1)}(x,y) = a_0 d_0 \Phi_{vxm}^{(l-1)},\ \Phi_{sym}^{(l-1)}(x,y) = a_0 d_0 \Phi_{vym}^{(l-1)},\ \Phi_{syxm}^{(l-1)}(x,y) = b_0 G \Phi_{yxm}^{(l-1)},$$

$$\Phi_{vxm}^{(l-1)}(x,y) = \int_z P_m \Phi_{vx}^{(l-1)}(x,y,z)\,dz,\ \Phi_{vym}^{(l-1)}(x,y) = \int_z P_m \Phi_{vy}^{(l-1)}(x,y,z)\,dz, \qquad (7)$$

$$\Phi_{yxm}^{(l-1)} = \int_z P_m \Phi_{yx}^{(l-1)}(x,y,z)\,dz,\ (m = 0,1,2,3).$$

Як випливає із (6) і (7), праві частини системи диференціальних рівнянь для фізично нелінійної оболонки в l-му наближенні $(l = 1,2,...)$ нелінійно залежать від компонент НДС попередніх наближень.

Крайові умови в наближенні l за параметром ε мають наступний вигляд:

$$\int_s \left\{ \left(N_{0u}^{(l)} - \tilde{N}_{0u}^{(l)} \right) \delta u_o^{(l)} + \left(N_{0v}^{(l)} - \tilde{N}_{0v}^{(l)} \right) \delta v_0^{(l)} + \sum_{k=1}^{3} \left(\left(M_{ku}^{(l)} - \tilde{M}_{ku}^{(l)} \right) \delta u_k^{(l)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(M_{kv}^{(l)} - \tilde{M}_{kv}^{(l)} \right) \delta v_k^{(l)} + \left(Q_{kw}^{(l)} - \tilde{Q}_{kw}^{(l)} \right) \delta w_k^{(l)} \right) \right\} ds = 0, \qquad (8)$$

де

$$N_{0u}^{(l)} = \left(h s_{x0}^{(l)} - \Phi_{sx0}^{(l-1)} \right) l_x + \left(h t_{yx0}^{(l)} - \Phi_{syx0}^{(l-1)} \right) l_y;\ \tilde{N}_{0u}^{(l)} = \int_z P_0 X_n^{(l)}(z,s)\,dz, \qquad (9)$$

$$N_{0v}^{(l)} = \left(h s_{y0}^{(l)} - \Phi_{sy0}^{(l-1)} \right) l_y + \left(h t_{yx0}^{(l)} - \Phi_{syx0}^{(l-1)} \right) l_x;\ \tilde{N}_{0v}^{(l)} = \int_z P_0 Y_n^{(l)}(z,s)\,dz,$$

$$M_{ku}^{(l)} = \left(\frac{h}{2k+1} s_{xk}^{(l)} - \Phi_{sxk}^{(l-1)} \right) l_x + \left(\frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(l)} - \Phi_{syxk}^{(l-1)} \right) l_y,\ \tilde{M}_{ku}^{(l)} = \int_z P_k X_n^{(l)}(z,s)\,dz,$$

$$M_{kv}^{(l)} = \left(\frac{h}{2k+1} s_{yk}^{(l)} - \Phi_{syk}^{(l-1)} \right) l_y + \left(\frac{h}{2k+1} t_{yxk}^{(l)} - \Phi_{syxk}^{(l-1)} \right) l_x,\ \tilde{M}_{kv}^{(l)} = \int_z P_k Y_n^{(l)}(z,s)\,dz,$$

$$Q_{kw}^{(l)} = \frac{h}{2k-1} \left(t_{x\,k-1}^{(l)} l_x + t_{y\,k-1}^{(l)} l_y \right),\ \tilde{Q}_{kw}^{(l)} = \int_z P_{k-1} Z_n^{(l)}(z,s)\,dz,\ (k = 1,2,3),$$

(l_x, l_y – направляючі косинуси нормалі до контуру з осями Ox, Oy).

Як і диференціальні рівняння рівноваги, вони також лінійно залежать від компонент l-го наближення і нелінійно – від компонент попередніх наближень.

Метод розв'язування. Розглянемо застосування методу подвійних тригонометричних рядів для розв'язування задач по визначенню НДС фізично нелінійних оболонок при поперечному навантаженні з урахуванням обтискання.

Вважаємо, що граничні умови на лицевих поверхнях задовольняють рівностям (1), а при $x=0, x=a$, $y=0, y=b$ виконуються крайові умови вільного опирання, які згідно (8) і (9) в l-му наближенні за ε мають вигляд:

$$u_k^{(0)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=0,\ w_k^{(0)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=0,\ s_{yi}^{(0)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=0, \tag{10}$$

$$v_k^{(0)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=0,\ w_k^{(0)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=0,\ s_{xi}^{(0)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=0, (i=0,1,...,5);$$

$$u_k^{(l)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=0,\ w_k^{(l)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=0,\ \frac{h}{2k+1}s_{yi}^{(l)}(x,y)\Big|_{y=0,b}=a_0E_0\Phi_{vyi}^{(l-1)}(x,y)\Big|_{y=0,b},$$

$$v_k^{(l)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=0,\ w_k^{(l)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=0,\ \frac{h}{2k+1}s_{xi}^{(l)}(x,y)\Big|_{x=0,a}=a_0E_0\Phi_{vxi}^{(l-1)}(x,y)\Big|_{x=0,a},$$

$(l=1,2,...;\ i=0,1,...,5;)$.

Зовнішнє навантаження $q^{(l)}(x,y)$ і $p^{(l)}(x,y)$ розкладемо у подвійні тригонометричні ряди

$$q^{(l)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{mn}^{(l)}S_{mx}S_{ny};\ p^{(l)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{mn}^{(l)}S_{mx}S_{ny}. \tag{11}$$

Показано, що на основі (2) – (7), (10), (11) можна отримати у вигляді подвійних тригонометричних рядів розв'язки, вирази для складових та компонент НДС нульового наближення, нелінійні функції НДС з індексом «0» угорі в такому вигляді:

$$u_k^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{kmn}^{(0)}C_{mx}S_{ny},\ v_k^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{kmn}^{(0)}S_{mx}C_{ny}, \tag{12}$$

$$\phi_k^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{kmn}^{(0)}S_{mx}S_{ny}, (k=0,1,2,3);\ w_k^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{kmn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},$$

$$Q_{kx}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{kxmn}^{(0)}C_{mx}S_{ny}, Q_{ky}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{kymn}^{(0)}S_{mx}C_{ny}, (k=1,2,3);$$

$$\omega_i^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{imn}^{(0)}S_{mx}S_{ny}, (i=2,3);$$

$$t_{xi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_{ximn}^{(0)}C_{mx}S_{ny},\ t_{yi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_{yimn}^{(0)}S_{mx}C_{ny}, (i=0,1,...,4);$$

$$s_{zi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_{zimn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},\quad s_{xi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_{ximn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},$$

$$s_{yi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_{yimn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},(i=0,1,\ldots,5);$$

$$t_{yxk}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_{yxkmn}^{(0)}C_{mx}C_{ny},(k=0,1,2,3);$$

$$U^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}^{(0)}(z)C_{mx}S_{ny},\quad V^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}V_{mn}^{(0)}(z)S_{mx}C_{ny},$$

$$W^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},$$

$$\sigma_{x}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{xmn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},\quad \sigma_{y}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{ymn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},$$

$$\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{yxmn}^{(0)}(z)C_{mx}C_{ny},\qquad \sigma_{z}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{zmn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},$$

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{xzmn}^{(0)}(z)C_{mx}S_{ny},\quad \sigma_{yz}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{yzmn}^{(0)}(z)S_{mx}C_{ny}.$$

$$\tau_{o}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{0mn}^{(0)}(z)C_{mx}C_{ny},\quad \Phi_{x}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{xmn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},$$

$$\Phi_{y}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{ymn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},\quad \Phi_{yx}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{yxmn}^{(0)}(z)C_{mx}C_{ny},$$

$$\Phi_{\nu x}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{\nu xmn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},\quad \Phi_{\nu y}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{\nu ymn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny};$$

$$\Phi_{\nu xi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{\nu ximn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},\quad \Phi_{\nu yi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{\nu yimn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},$$

$$\Phi_{yxi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{yximn}^{(0)}C_{mx}C_{ny},\quad \Phi_{sxi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{sximn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},$$

$$\Phi_{syi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{syimn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},\quad \Phi_{syxi}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{syximn}^{(0)}C_{mx}C_{ny},\ (i=0,1,2,3);$$

$$\Phi_{sx}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{sxmn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},\quad \Phi_{sy}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{symn}^{(0)}(z)S_{mx}S_{ny},$$

$$\Phi_{syx}^{(0)}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{syxmn}^{(0)}C_{mx}C_{ny};\qquad I_{qkx}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}I_{qkxmn}^{(0)}C_{mx}S_{ny},$$

$$I_{qky}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}I_{qkymn}^{(0)}S_{mx}C_{ny},\ (k=1,2,3);$$

$$I_{\omega i}^{(0)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}I_{\omega imn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},(i=2,3),$$

де $S_{mx}=\sin m\pi x/a;\ C_{mx}=\cos m\pi x/a;\ S_{ny}=\sin n\pi y/b;\ C_{ny}=\cos n\pi y/b$.

Крайові умови (10) у нульовому наближенні та умови (1) при цьому виконуються.

Праві частини системи диференціальних рівнянь (5) у першому наближенні, приймаючи до уваги (6), (7), (11) та (12), мають вигляд:

$$D_{i\xi}^{(0)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{i\xi mn}^{(0)}C_{mx}S_{ny},(i=1,3,5,7);\qquad(13)$$

$$D_{i\xi}^{(0)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}D_{i\xi mn}^{(0)}S_{mx}C_{ny},(i=2,4,6,8);$$

$$D_{i\xi}^{(0)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{i\xi mn}^{(0)}S_{mx}S_{ny},(i=9,10,11)$$

і співпадають за структурою з правими частинами рівнянь у нульовому наближенні. Множники при тригонометричних функціях у (13) – відомі МГС.

Оскільки крайових ефектів у даній задачі немає, то її розв'язування у першому наближенні за ε зводиться до визначення частинних розв'язків системи (5), які з урахуванням (13) знаходитимемо у вигляді:

$$u_k^{(1)}(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{kmn}^{(1)}C_{mx}S_{ny},$$

$$v_k^{(1)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}v_{kmn}^{(1)}S_{mx}C_{ny},(k=0,1,2,3);\qquad(14)$$

$$w_k^{(1)}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{kmn}^{(1)}S_{mx}S_{ny},(k=1,2,3),$$

де $u_{kmn}^{(1)}, v_{kmn}^{(1)}, w_{kmn}^{(1)}$ – шукані сталі. Підставляючи (14) до системи (5) і перетворюючи її з урахуванням (13), отримуємо для кожної пари значень m і n систему одинадцяти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих сталих. Визначивши їх, одержуємо складові компонент переміщень (14) і компоненти переміщень (2), а на основі (3), (4) і (12) – складові та компоненти напружень у 1-му наближенні, які структурно аналогічні нульовому наближенню (12). Крайові умови (10) у 1-му наближенні також виконуються.

Виходячи із рекурентності формул для складових і компонент НДС, можна побудувати розв'язки у подвійних тригонометричних рядах і в інших наближеннях за параметром ε. Вони мають структуру аналогічну нульовому і першому наближенню.

Чисельні результати. Розглянемо циліндричний згин фізично нелінійної пологої оболонки (ФНПО), шарнірно обіпертої вздовж довгих країв $x=0, x=a$, при дії кососиметричного поперечного навантаження $q(x,y)$. Компоненти НДС залежатимуть від x і z. На краях $x = 0, x = a$ виконуються умови (10). У системі диференціальних рівнянь рівноваги, враховуючи варіаційний метод їх отримання, потрібно взяти перше, третє, сьоме, дев'яте та одинадцяте рівняння, які відповідають у перетвореному рівнянні Рейснера рівностям нулю множників при варіаціях $\delta u_0^{(l)}, \delta u_1^{(l)}, \delta u_3^{(l)}, \delta w_1^{(l)}, \delta w_3^{(l)}$.

Уведемо спрощення у правих частинах диференціальних рівнянь рівноваги в наближеннях $l = 1, 2, \ldots$ за параметром ε, а саме: враховуватимемо в них тільки ті доданки, які залежать від складових компонент переміщень $u_0^{(l-1)}(x), u_1^{(l-1)}(x)$, $w_1^{(l-1)}(x)$, а доданками, які містять $u_3^{(l-1)}(x)$, $w_3^{(l-1)}(x)$ будемо нехтувати, оскільки доданки з урахованими складовими визначають основну частину НДС.

Чисельні розрахунки виконані для циліндричного згину ФНПО від дії кососиметричного поперечного синусоїдального навантаження $q(x)$:

$$q(x) = q_m S_{mx}; \ (q_m = const); \ q_m = \sum_{l=0}^{\infty} q_m^{(l)} \varepsilon^l; \ q_m^{(0)} = q_m; \ q_m^{(l)} = 0, \text{ якщо } l \geq 1. \quad (15)$$

У наближенні $l = 0; k = 0, 1, 3$ складові компонент переміщень $u_0^{(0)}(x)$, $u_1^{(0)}(x)$, $u_3^{(0)}(x)$, $w_1^{(0)}(x)$, $w_3^{(0)}(x)$ відшукуватимемо у вигляді

$$u_k^{(0)}(x) = A_{k0m} C_{mx}, \ w_i^{(0)}(x) = C_{i0m} S_{mx}, \ (k = 0, 1, 3; \ i = 1, 3), \quad (16)$$

де A_{k0m}, C_{i0m} – невідомі сталі, які визначаються із системи п'яти лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої зведеться система (5) для ізотропної оболонки при циліндричному згині.

Знайшовши значення сталих A_{k0m}, C_{i0m}, визначаються праві частини системи (5), що складається із 1-го, 3-го, 7-го, 9-го та 11-го рівнянь. Опускаючи достатньо громіздкі викладки, наведемо праві частини системи диференціальних рівнянь у наближенні $l = 1$; $k = 0, 1, 3$:

$$D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi 0sc}(x) C_{mx}, \ (i = 1, 3, 7); \ D_{i\xi}^{(0)}(x) = D_{i\xi 0sc}(x) S_{mx}, \ (i = 9, 11), \quad (17)$$

де

$$D_{i\xi 0sc}(x) = D_{i0sc} S_{mx}^2 + D_{i0c} C_{mx}^2, \ (i = 1, 3, 7); \ D_{i\xi 0sc}(x) = D_{i0s} S_{mx}^2 + D_{i0cs} C_{mx}^2, \quad (18)$$

$$(i = 9, 11); \ (D_{i0sc}, D_{i0c}, \ D_{i0s}, D_{i0cs} - \text{МГС}).$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (5) для циліндричного згину в наближенні $l = 1$; $k = 0, 1, 3$ шукаємо у формі

$$u_k^{(1)}(x) = A_{k1m} C_{mx}, \ w_i^{(1)}(x) = C_{i1m} S_{mx}, \ (k = 0, 1, 3; \ i = 1, 3), \quad (19)$$

де A_{k1m}, C_{i1m} – невідомі коефіцієнти, які визначаються із вказаної системи після підстановки до неї (19) з урахуванням (17) і осереднення функцій (18). Після їхнього знаходження визначаються $u_k^{(1)}(x)$ та $w_i^{(1)}(x)$ за формулами (19), компоненти напруженого стану з індексом «1» угорі – згідно (3), а потім на основі (2) – компоненти НДС у наближенні $l = 0,1$; $k = 0,1,3$, які після перетворень мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&U(x,z) = a\tilde{q}_m\left(\tilde{f}_{u0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2\tilde{f}_{u1m}(z)\right)C_{mx};\\
&W(x,z) = a\tilde{q}_m\left(\tilde{f}_{w0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2\tilde{f}_{w1m}(z)\right)S_{mx};\\
&\sigma_z(x,z) = G\tilde{q}_m\left(\tilde{\sigma}_{z0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2\tilde{\sigma}_{z1m}(x,z)\right)S_{mx};\\
&\sigma_x(x,z) = G\tilde{q}_m\left(\tilde{\sigma}_{x0m}(z) + \varepsilon\tilde{q}_m^2\tilde{\sigma}_{x1m}(x,z)\right)S_{mx}, (x \to xz;\ S_{mx} \to C_{mx}),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

де $\tilde{f}_{u0m}(z), \ldots, \tilde{\sigma}_{x0m}(z)$ – безрозмірні функції z, а $\tilde{\sigma}_{z1m}(x,z), \ldots, \tilde{\sigma}_{x1m}(x,z)$ – безрозмірні функції x і z, які залежать від МГХ оболонки; $\tilde{q}_m = q_m / G$.

Крайові умови (10) на краях $x = 0, x = a$ виконуються.

Чисельні результати отримані на ПК з використанням мови ФОРТРАН для обчислення НДС ФНПО від дії кососиметричного навантаження при циліндричному згині, що враховує МГХ оболонки в широкому діапазоні змінення. У табл. 1, 2 наведено безрозмірні значення компонент НДС ($\tilde{\sigma}_x = \sigma_x(x,z) / q(x)$, $\tilde{W} = W(x,z)E / (q(x)h)$) для ФНПО із чистої міді (G=44230 МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$) при циліндричному згині для $h / a = 1/3$ (табл. 1) і для $h / a = 1/5$ (табл. 2) при $m = 1$. У другій і третій колонках наведені результати в нульовому наближенні за ε (при $l = 0$): у другій – в наближенні $k = 0,1,3$; у третій – в наближенні $k = 0,1,3,5$ за поліномами Лежандра. У четвертій, шостій колонках – у наближенні $l = 0,1$ за ε з урахуванням наближення $k = 0,1,3$ за поліномами Лежандра при $q_m = 10$ МПа і $q_m = 15$ МПа. У п'ятій і сьомій колонках указано розходження результатів, одержаних за нелінійною теорією за відношенням до лінійної (для $k = 0,1,3,5$).

Таблиця 1

Компоненти НДС фізично нелінійної оболонки із чистої міді при циліндричному згині з МГП $h / a = 1/3$; $R_1 / a = 5$; $m = 1$; G=44230 МПа; $\nu = 0,349$; $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$

z/h	Лін. теор. $k = 0,1,3$	Лін. теор. $k = 0,1,3,5$	Нелін. теор. $q_m =$ 10 МПа	%	Нелін. теор. $q_m =$ 15 МПа	%
	$\tilde{\sigma}_x$					
0,5	–5,702	–5,708	–5,640	1,19	–5,561	2,58
0	0,1050	0,0858	0,1051		0,1052	
–0,5	5,702	5,700	5,640		5,556	

Закінчення таблиці 1

z/h	$\tilde{W}$					
0.5	−10.88	−10.86	−11,00	1,29	−11,15	2,67
0	−11.39	−11.39	−11,52		−11,69	
−0,5	−10,93	−10,90	−11,04		−11,19	

Таблиця 2

Компоненти НДС фізично нелінійної оболонки з чистої міді при циліндричному згині з МГП $h/a = 1/5;\ R_1/a = 5;\ m = 1;$ G=44230 МПа; $\nu = 0{,}349;\ g_2 = 0{,}18 \cdot 10^6$

z/h	Лін. теор. $k = 0,1,3$	Лін. теор. $k = 0,1,3,5$	Нелін. теор. $q_m =$ 10 МПа	%	Нелін. теор.. $q_m =$ 15 МПа	%
			$\bar{\sigma}_x$			
0,5	−15,47	−15,48	−13,98	9,69	−12,11	21,8
0	0,1770	0,1448	0,1788		0,1811	
−0,5	15,46	15,46	13,94		12,04	
z/h			$\tilde{W}$			
0,5	−73,67	−73,65	−84,83	15,2	−98,78	34,1
0	−75,34	−75,33	−86,94		−101,4	
−0,5	−73,74	−73,71	−84,90		−98,86	

Аналіз результатів. Висновки. Із наведених результатів і додаткових чисельних досліджень випливають наступні висновки: вплив фізичної нелінійності на компоненти НДС оболонки може досягати суттєвих значень і зростає із зменшенням її товщини, при збільшенні інтенсивності поперечного навантаження, збільшенні м'якості матеріалу (зменшенні модуля G); вплив фізичної нелінійності мало залежить від кривини пологої оболонки середньої товщини. Для товстих оболонок впливом фізичної нелінійності можна знехтувати, але їх потрібно розраховувати з позицій просторової лінійної теорії пружності. Для тонких оболонок цей вплив може бути суттєвим, але їх достатньо розраховувати за класичною теорією, враховуючи фізичну нелінійність. У той же час оболонки середньої товщини необхідно розраховувати з позицій тривимірної нелінійної теорії пружності.

Бібліографічні посилання

1. **Борисов Е.Н.** Физически нелинейная задача для толстых прямоугольных пластин / Е.Н. Борисов // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 28–31.
2. **Векуа И. Н.** Об одном методе расчета призматических оболочек / И. Н. Векуа // Тр. Тбилисского матем. ин-та. – 1955. – Т. 21. – С. 191–293.
3. **Гузь А. Н.** О равновесии физически нелинейной толстостенной сферической оболочки / А. Н. Гузь, И. А. Цурпал // Теория пластин и оболочек. – М., 1971. – С. 82–84.
4. **Гуляев В. И.** Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, П. П. Лизунов. – Л., 1978. – 192 с.

5. **Зеленський А. Г.** Варіант уточненої теорії згину однорідних фізично нелінійних пологих оболонок / А. Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – Т. 1, № 4. – С. 56–64.
6. **Каудерер Г.** Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М., 1961. – 777 с.
7. **Немиш Ю. Н.** Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор / Ю. Н. Немиш, И. Ю Хома. // Прикл. механика – 1991. – 29, №11. – С. 3–27.
8. **Немиш Ю. Н.** О напряженном состоянии слоистой нелинейно упругой толстостенной сферической оболочки / Ю. Н. Немиш, О. И. Левчук. // Прикл. механика 1999. – 35, №12. – С. 26–32.
9. **Плеханов А. В.** Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины / А. В. Плеханов, А. П Прусаков. // Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С. 84–90.
10. **Понятовский В. В.** Уравнения теории анизотропных пластинок / В. В. Понятовский // Исследование по упругости и пластичности. – Л., 1965. – №4. – С. 3–28.
11. **Прусаков А. П.** О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины / А. П. Прусаков // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 51–58.
12. **Хома И. Ю.** Обобщенная теория анизотропных оболочек / И. Ю. Хома – К., 1986. – 170 с.
13. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов / И.А. Цурпал. – К., 1976. – 176 с.
14. **Цурпал И. А.** Расчет многосвязных слоистых и нелинейно упругих пластин и оболочек / И. А. Цурпал, Н. Г. Тамуров. – К., 1977. – 224 с.
15. **Cicala P.** Sulla teria elastica della plate sottile / P. Cicala // Giorngenio Civile. – 1959. – 97, № 4. – P. 238–256.
16. **Reissner E.** On a variotional theorem in elasticity / E. Reissner/ J. Math. and Phys. – 1950. – V. 33. – P. 90–95.

Надійшла до редколегії 12.12.08

УДК 621.774.35 (075.8)

О. Г. Гоман*, С. Р. Рахманов**, Н. В. Швайка**
** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*
*** Национальная металлургическая академия Украины*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРЕССОВАНИЯ ТРУБ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СМАЗКИ

Розглянуто осесиметричну задачу про двошарову течію робочих середовищ «метал-мастило» в кільцевому зазорі осередку деформації між матрицею та оправкою в рамках прийнятої гідродинамічної моделі процесу пресування труб. З'ясовано характер розподілу тиску металу в осередку деформацій та контактних напружень на поверхні оправки, а також розраховано загальну силу опору в процесі пресування.

Введение. Технико-экономические преимущества современных технологических процессов и оборудования для производства бесшовных труб из малопластичных материалов, легированных сталей и их сплавов методом прессования определили приоритеты в данной области. При этом в мировой практике широкое применение