

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВІЛЬНОКОНВЕКТИВНОГО РУХУ
В ДВОВИМІРНИХ ЗАМКНЕНИХ ОБЛАСТЯХ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ**

Для дослідження розвитку внутрішніх вільних конвективних течій застосовано рівняння енергії та рівняння Нав'є-Стокса в наближенні Буссинеска. При розв'язуванні первинних рівнянь у фізичних змінних застосовано метод штучної стисливості. Дискретизацію системи рівнянь виконано методом контрольних об'ємів.

Вступ. Процеси вільної конвекції в рідинах і газах, коли виникає рух унаслідок різниці густин у полі масових сил, є дуже поширеними як у природі: циркуляції в атмосфері, у водоймищах, охолодження нагрітих тіл оточуючим повітрям, – так і в промисловості: течії в нагрітих трубах, охолодження підземних кабелів, циркуляції повітря в нагрітих приміщеннях тощо. Важливе місце займає вивчення фізичних властивостей *внутрішніх* вільноконвективних течій (складніших для дослідження через обмеження руху і механізмів теплопереносу впливом поверхонь), оскільки вони найчастіше виникають, по-перше, в умовах проведення експериментів, по-друге, в багатьох промислових установках при підведенні тепла до систем накопичення, в ємностях для охолодження і гартування тощо.

Дана робота для математичного опису вільної конвекції застосовує рівняння енергії та рівняння Нав'є-Стокса в наближенні Буссинеска, які виводяться із загальних рівнянь Нав'є-Стокса стисливої рідини з припущенням, що рідина динамічно і статично нестислива. Врахування неоднорідності густини лише в доданку з підйомною силою означає деяку непослідовність наближення Буссинеска [2]. Однак порівняння численних результатів, отриманих з його допомогою, з експериментальними даними та розв'язками, отриманими на основі більш повних рівнянь, свідчить про досить добре відображення особливостей теплової конвекції наближенням Буссинеска.

У зв'язку з тим, що основні рівняння тісно пов'язані між собою і не відокремлюються через значний взаємний вплив полів руху і температури, задача в загальному вигляді складна для аналітичного розв'язання, і її розв'язки отримують чисельним розрахунком. За останні роки використання швидкодіючих ЕОМ набуло широкого розповсюдження, було розроблено багато чисельних методик для моделювання вільної конвекції. Вибір методики багато в чому визначається формою запису рівнянь. У більшості праць по дослідженню вільноконвективного руху застосовувалась система рівнянь у змінних завихреність-функція течії [11; 14]. Недоліком цього підходу є труднощі із постановкою фізично обґрунтованих граничних умов для завихреності та для функції течії на твердих границях у багатозв'язних областях. Іншою формою запису є запис рівнянь у фізичних змінних [6; 9; 12; 14] із можливістю подальшого використання схеми SIMPLE [6; 9] або схеми штучної стисливості [12]. Оскільки в задачах вільної конвекції суттєву роль відіграє взаємний вплив полів швидкостей і температур, то застосовується метод штучної стисливості, який дозволяє узгодити ці поля.

Для побудови дискретного аналогу рівнянь для конвекції і теплообміну багатьма авторами використовувалися методи скінчених різниць (МСР) [7; 9; 11] та скінчених елементів (МСЕ) [9; 11]. У даній роботі використовується метод контрольних об'ємів (МКО), в якому, на відміну від МСР і МСЕ, розглядається комірка сітки і потоки (маси, тепла), що втікають і витікають з неї крізь бічні грані.

Отже, предметом даної роботи буде дослідження термогравітаційної конвекції двовимірних ламінарних течій, що описується рівняннями Нав'є-Стокса в наближенні Буссинеска, в областях довільної геометрії шляхом чисельного моделювання на основі методу штучної стисливості.

Постановка задачі. Математична постановка задачі ґрунтується на класичній системі рівнянь Нав'є-Стокса для конвекції і теплообміну в наближенні Буссинеска, яка виводиться із загальних рівнянь Нав'є-Стокса стислої рідини з припущенням, що густина рідини не залежить від тиску, але може залежати від температури [11]. Також припускається, що відхилення всіх термодинамічних параметрів від їхніх значень, що відповідають умовам статичної рівноваги, малі. Модель конвекції рідини в наближенні Буссинеска враховує ці малі зміни густини рідини, які відбуваються внаслідок зміни температури, що призводить до розвитку конвекції та теплопереносу. Припускаються сталими коефіцієнти в'язкості, теплопровідності, питомої теплоємності. За цих припущень система рівнянь конвективної теплопровідності в рідині набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} + g\beta_T T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T = \frac{\lambda}{\rho C_p}\Delta T \end{cases} \quad (1)$$

де \mathbf{V} – вектор швидкості, ρ – густина, p – тиск, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості, g – прискорення вільного падіння, T – температура, β_T – коефіцієнт об'ємного розширення, λ – коефіцієнт теплопровідності, C_p – коефіцієнт питомої теплоємності за сталого тиску.

Початкові умови. У всій розрахунковій області задавалися компоненти вектора швидкості: $u|_{t=0} = 0$, $v|_{t=0} = 0$; початковий розподіл тиску: $p|_{t=0} = p_0$ та лінійний розподіл температури.

Граничні умови. На твердих нерухомих границях задавалися умови прилипання $\bar{\mathbf{V}} = 0$ та нульовий градієнт тиску. Температури протилежних стінок приймалися сталими і різними.

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД

Метод штучної стисливості. Для розв'язання рівнянь конвекції і теплообміну в наближенні Буссинеска застосовується метод штучної стисливості, який дозволяє узгодити поля тиску, швидкості та температури на одному часовому кроці. Згідно цього методу до рівняння нерозривності додається похідна тиску за псевдочасом

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (2)$$

тут β – параметр методу штучної стисливості, u, v – декартові компоненти вектора швидкості.

Перехід до узагальнених неортогональних координат. Запишемо систему рівнянь з використанням узагальнених неортогональних координат $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ в безрозмірному векторному вигляді:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial \tau} + I \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right) + \hat{\mathbf{H}} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ \Theta \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} U\beta \\ Uu + \xi_x p \\ Uv + \xi_y p \\ U\Theta \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} V\beta \\ Vu + \eta_x p \\ Vv + \eta_y p \\ V\Theta \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{R}} = \alpha_\xi \begin{bmatrix} 0 \\ u_\xi \\ v_\xi \\ \frac{1}{Pr} \Theta_\xi \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \alpha_\eta \begin{bmatrix} 0 \\ u_\eta \\ v_\eta \\ \frac{1}{Pr} \Theta_\eta \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Gr}{Re^2} \Theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_\xi = \frac{1}{J} (\xi_x^2 + \xi_y^2); \quad \alpha_\eta = \frac{1}{J} (\eta_x^2 + \eta_y^2);$$

де $\begin{cases} U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \end{cases}$ – контраваріантні складові вектора швидкості, $I = \text{diag}[0, 1, 1, 1]$,

$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$ – якобіан перетворення

координат. Метричні коефіцієнти визначаються через похідні від декартових координат за допомогою співвідношень:

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi. \quad (4)$$

Апроксимація нестационарних, конвективних та дифузійних складових

Нестационарні похідні обчислюються за однокроковою явною тришаровою за часом схемою першого порядку точності, що має вигляд:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial \tau} = -RHS, \quad RHS = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} + I \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \eta} \right) - \hat{\mathbf{H}}, \quad (5)$$

$$\Delta \hat{q}^n = \frac{\hat{q}^n - \hat{q}^{n-1}}{\Delta t}.$$

Для виконання рівняння нерозривності на часовому кроці n введемо псевдочасовий шар і позначимо його верхнім індексом m . Підітерації за псевдочасом здійснюються за схемою

$$\frac{\hat{q}^{n,m+1} - \hat{q}^{n,m}}{\Delta \tau} = -RHS^{n,m}. \quad (6)$$

Алгоритм роботи підітерацій для кожного кроку за часом спрацьовує до моменту, поки максимальне значення дивергенції швидкості і максимальне значення нев'язки в будь-якій точці не стануть меншими, ніж задана точність.

Конвективні складові дискретизуються методом контрольних об'ємів, згідно якого двовимірна розрахункова область розбивається на непересічні *контрольні об'єми*. У просторі змінних (ξ, η) навколо кожного вузла сітки виділяється контрольний об'єм у вигляді прямокутника зі сторонами довжини $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, грані якого позначаються напівцілими індексами

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} \approx \frac{\hat{E}_{i+1/2,j} - \hat{E}_{i-1/2,j}}{\Delta \xi} + \frac{\hat{F}_{i,j+1/2} - \hat{F}_{i,j-1/2}}{\Delta \eta}. \quad (7)$$

Розрахунок метричних коефіцієнтів на гранях контрольного об'єму виконується за співвідношеннями виду

$$\begin{pmatrix} \xi_x \\ J \end{pmatrix}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \xi_x \\ J \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} \xi_x \\ J \end{pmatrix}_{i+1} \right], \quad (8)$$

що сполученні з центрально-різницевиими апроксимаціями для похідних $(x_\xi, y_\xi, x_\eta, y_\eta)$ забезпечує замкнутість контрольних об'ємів як у фізичному просторі $\{x, y\}$, так і в розрахунковому просторі змінних $\{\xi, \eta\}$. Значення залежних змінних приписується до вузлів сітки, тому при використанні контрольного-об'ємного підходу дуже важливим є алгоритм обчислення потоків на гранях комірок. Основна ідея побудови контрольного об'єму – отримання можливості протипоточних апроксимацій на гранях комірки та одночасне виконання законів збереження.

Обчислення потоків на грані контрольного об'єму здійснюється так:

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} U\beta \\ Uu + \xi_x p \\ Uv + \xi_y p \\ U\Theta \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}{J} \begin{bmatrix} U_n \beta \\ U_n u + n_x p \\ U_n v + n_y p \\ U_n \Theta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$U_n = n_x u + n_y v, \quad n_x = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \quad n_y = \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}$$

і аналогічно для $\hat{\mathbf{F}}$.

З метою підвищення точності обчислення конвективних похідних використовується схема TVD (*Total Variation Diminution*) із запропонованим Колганом обмежником потоків типу MinMod [5].

Дискретизація в'язких складових здійснюється за центрально-різницевою схемою.

Програмна реалізація. Розроблену чисельну методику розрахунку вільної конвекції і теплообміну в наближенні Бусинеска в двовимірній постановці було реалізовано у вигляді комплексу програм на мові Fortran.

Тестування методики. Тестування розробленого комплексу програм виконано для різних значень числа Грасгофа ($Gr = 1000, 5000, 10000$) на задачі про термогравітаційну циркуляцію в замкненій квадратній порожнині з використанням сітки розмірністю 100×100 зі згущенням біля стінок порожнини. У порожнині утворюється замкнена циркуляція проти годинникової стрілки із потоками біля правої нагрітої границі, що піднімаються, і потоками біля лівої границі, що опускаються (рис.1), про що свідчить знакозмінна в значеннях горизонтальної і вертикальної складових вектора швидкості (рис.2). Еволюція зміни інтенсивності циркуляції течії у порожнині зі зміною числа Грасгофа чітко прослідковується у профілях компонентів вектора швидкості (рис.2), серединних – вертикальному і горизонтальному перерізах порожнини. Результати свідчать про більш інтенсивну циркуляцію течії для великих чисел Грасгофа, ніж для малих, окрім центральної зони порожнини, де швидкість практично не змінюється зі зміною значення числа Грасгофа і наближається до нуля.



Рис. 1. Розподіли горизонтальної (зліва) та вертикальної (справа) складових вектора швидкості для числа Грасгофа $Gr = 1000$

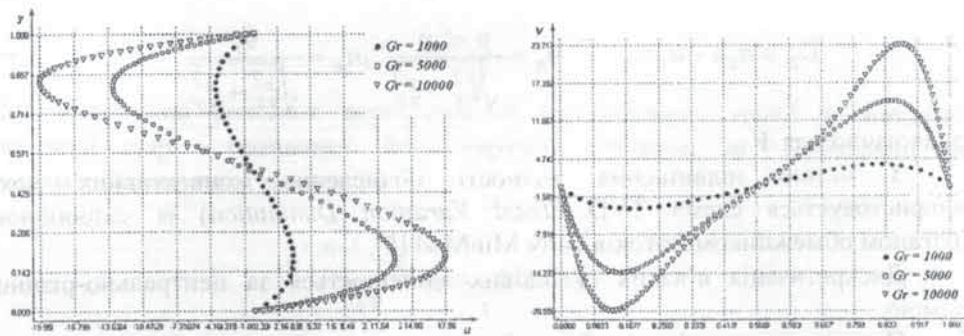


Рис. 2. Профілі горизонтальної (зліва) та вертикальної (справа) складових вектора швидкості у серединному перерізі порожнини для різних значень числа Грасгофа

Біля границь порожнини формуються теплові і швидкісні пограничні шари, а в центрі області – ізогradientне ядро [14] (рис. 3). Характеристикою інтенсивності течії є максимальне значення функції течії, яке являє собою безрозмірну витрату рідини при її циркуляційній течії в розрахунковій області. На рис.4 наведено графік залежності максимального значення функції течії від значення числа Грасгофа. Зі збільшенням числа Грасгофа величина максимуму функції течії зростає.

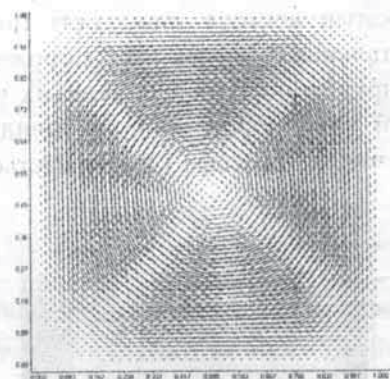


Рис. 3. Вектори швидкості у порожнині для числа Грасгофа $Gr = 1000$

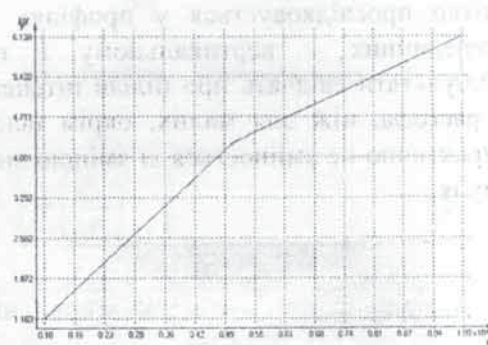


Рис. 4. Залежність максимального значення функції течії у квадратній порожнині від значень числа Грасгофа

Картина ізотерм ілюструє S-подібну форму ізотерм (рис.5), вигин яких збільшується з ростом підйомної сили. Конвекція приводить до появи вертикального температурного розшарування, обумовленого тим, що прогріта біля стінки і, отже, більш легка рідина спливає під дією сил плавучості до верхньої частини порожнини. У результаті – температура верхніх шарів рідини виявляється переважно вищою за температуру нижніх шарів (рис.5).

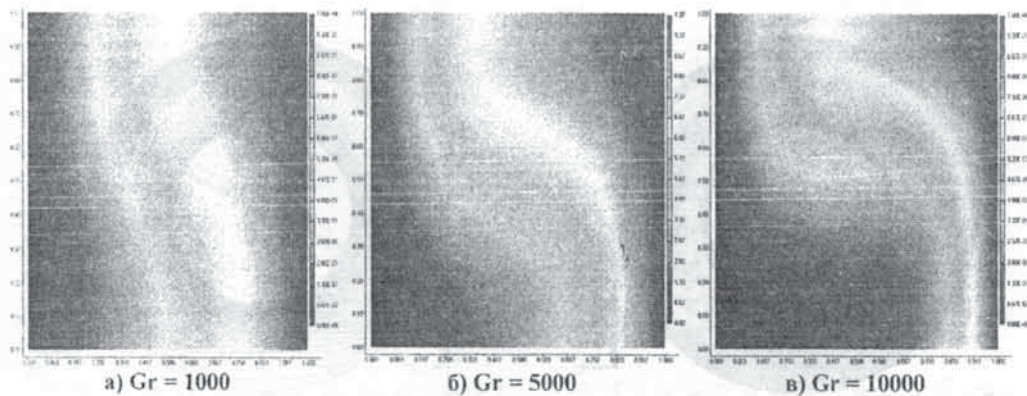


Рис. 5. Розподіли ізотерм для різних значень числа Грасгофа

Отримані результати порівнюються із результатами розрахунків, наведених Є.Л.Таруніним у [14]. Якісно картини ліній течії і ізотерм близькі.

Результати розрахунку вільної конвекції між горизонтальними концентричними і ексцентричними циліндрами. Розрахунок задачі про вільноконвективний теплообмін між двома ізотермічними горизонтально розташованими циліндрами проводився для різних значень числа Грасгофа, числа Прандтля $Pr = 10$, числа Рейнольдса $Re = 1$. Верхнє значення числа Грасгофа обиралося, виходячи з вимоги, щоб вільна конвекція спостерігалась при ламінарному режимі [10]. В обчислювальних експериментах використовувалась сітка із кількістю вузлів 200×200 зі згущенням біля стінок циліндрів.

Головний вплив різниці температур циліндрів і поля масових сил на рідину в області між циліндрами полягає у виникненні руху і розвитку двох конвективних серпоподібних формувань, розташованих симетрично відносно вертикалі (рис.6 – зліва). Між циліндрами спостерігається течія із потоками, що піднімаються, біля внутрішнього, більш гарячого циліндра, про що свідчать додатні значення вертикальної складової вектора швидкості (рис.7), і потоками біля зовнішнього холодного циліндра, що опускаються, – відповідно від'ємні значення. Зі збільшенням величини підйомної сили, яку характеризує число Грасгофа, відбувається суттєве зростання інтенсивності циркуляції течії, це підтверджують значення профілів вертикальної складової вектора швидкості у серединному перерізі області між циліндрами (рис.7).

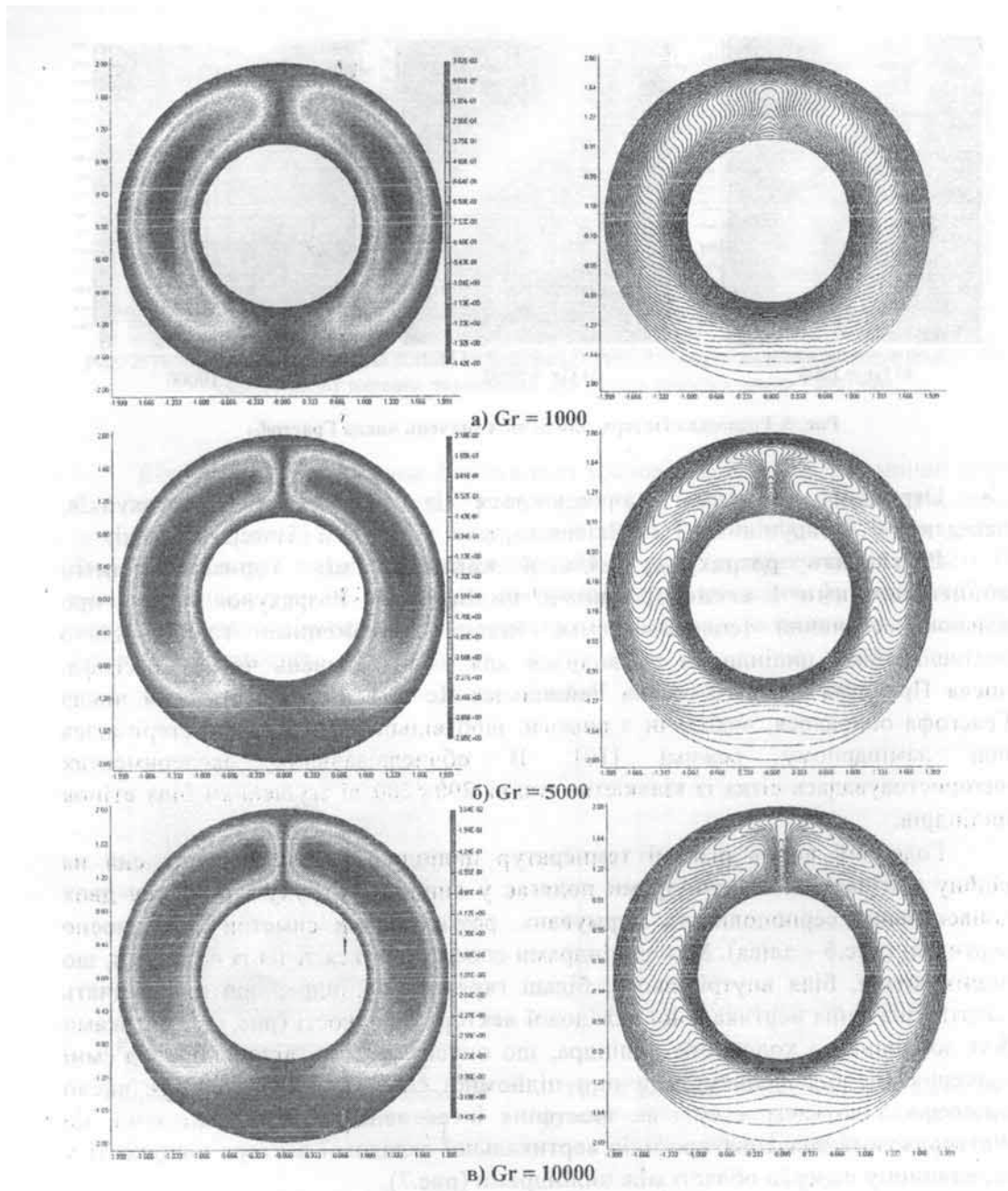


Рис. 6. Розподіли ліній течії (зліва) та ізотерм (справа) для різних значень числа Грасгофа

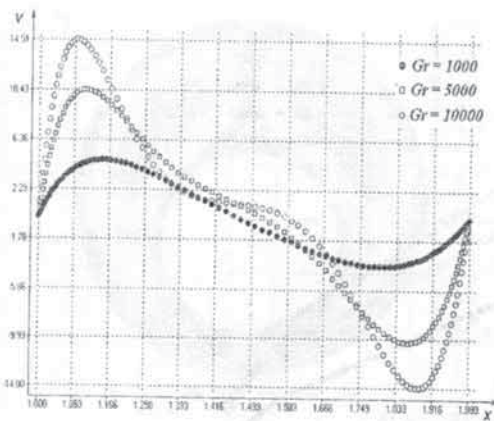


Рис. 7. Профілі вертикальної складової вектора швидкості у серединному перерізі області між циліндрами для різних значень числа Грасгофа

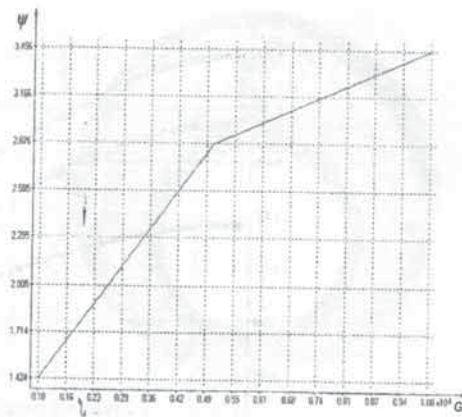


Рис. 8. Залежність максимального значення функції течії між циліндрами від значень числа Грасгофа

Для найменшого числа Грасгофа $Gr = 1000$ центри вихорів із екстремальним значенням функції течії розташовані майже на одній лінії із центром циліндрів. Зі збільшенням числа Грасгофа збільшується інтенсивність теплової конвекції, відбувається більше скупчення легких гарячих шарів рідини у верхній частині замкненого об'єму. Внаслідок цього, як вказує максимальне значення функції течії (рис.8), центр обертання течії зміщується вгору (рис.6 б, в - зліва).

Наявність конвекції викликає температурну інверсію. Наприклад, ізотерма, що виходить з пограничного шару на внутрішньому циліндрі, спочатку піднімається вгору, потім опускається і знов піднімається вгору. Найбільш наглядно це показує рис.6 в (справа) для найбільшого з обраних значень числа Грасгофа $Gr = 10000$, що визначає більшу інтенсивність конвекції. Зміна напрямку ізотерм на протилежній у серединній частині області пояснюється сильною зворотною течією рідини при дії ефектів в'язкості. Таким чином, ізотерми набувають S-подібного вигляду. Рідина біля нагрітого внутрішнього циліндра піднімається вгору вздовж поверхні цього циліндра і внаслідок в'язкого тертя частково захоплює за собою більш холодний сусідній шар рідини. На верхній частині внутрішнього циліндра відбувається відрив рідини і формування теплового конвективного струменя. Цей ефект виявляє себе у більш швидкому відході ізотерм від цієї частини внутрішнього циліндра. Конвективний струмінь досягає зовнішнього циліндра у верхній частині, де відбувається його охолодження. Рідина біля зовнішнього циліндра охолоджується і рухається донизу в напрямку до нижньої частини циліндра, захоплюючи за собою сусідній тепліший шар рідини. У нижній частині на рідину впливає додатний градієнт тиску, який викликає її відрив від зовнішнього циліндра і рух до нижньої частини внутрішнього циліндра. У результаті в нижній частині кільцевого каналу створюється область зі слабким конвективним рухом. Зі збільшенням числа Грасгофа гарячі шари рідини зосереджуються «чіткіше» над циліндром.

За розрахованими градієнтами температури на поверхні внутрішнього циліндра визначено локальний коефіцієнт тепловіддачі, (безрозмірний тепловий потік – число Нуссельта). Його значення в залежності від кутового положення наведені на рис.8 для трьох різних чисел Грасгофа.

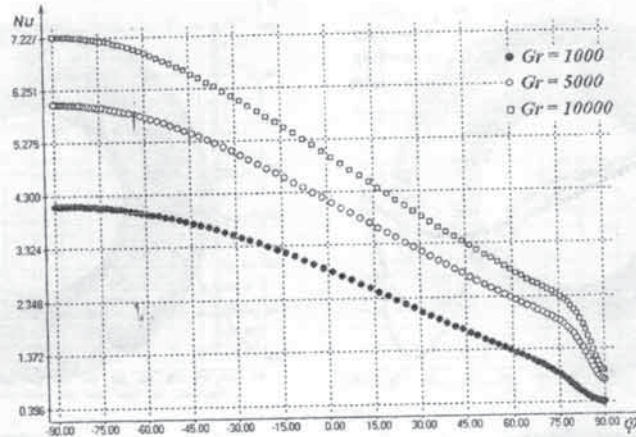


Рис. 9. Локальний коефіцієнт тепловіддачі по поверхні внутрішнього циліндра для різних значень числа Грасгофа

Аналіз впливу на локальний коефіцієнт тепловіддачі підйомної сили (числа Грасгофа) показує, що з його збільшенням зростає інтенсивність конвективних формувань, а отже, конвективна тепловіддача. Відбувається зростання *середнього відносного* коефіцієнта тепловіддачі, який кількісно дорівнює площі області, обмеженої кожним з графіків розподілів *локального* коефіцієнта тепловіддачі (рис.9) для обраних значень числа Грасгофа.

Якісно характер розподілу локального коефіцієнта тепловіддачі по поверхні внутрішнього циліндра не відрізняється для різних значень числа Грасгофа. Максимуму локальний коефіцієнт тепловіддачі досягає поблизу точки приєднання потоку (кут $\varphi = -90^\circ$) і мінімуму – поблизу точки відриву потоку ($\varphi = 90^\circ$). Можна виділити три області течії, що характеризуються різною поведінкою пограничного шару на поверхні циліндра [13], і, отже, різною зміною локального коефіцієнта тепловіддачі (три області чітко прослідковуються для $Gr = 5000$, $Gr = 10000$ на рис.9). Величина коефіцієнта не відразу починає зменшуватись при збільшенні кута, починаючи від -90° . Це пояснюється виникненням від'ємного градієнта тиску у пограничному шарі при віддаленні від області слабого руху з відносно високим тиском. Від'ємний градієнт тиску затримує утовщення пограничного шару. У результаті величина коефіцієнта тепловіддачі залишається практично сталою в інтервалі від -90° до -50° . У другій області течії $-50^\circ < \varphi < 75^\circ$ розвиток пограничного шару відбувається при нульовому градієнті тиску. Пограничний шар починає утовщуватись, що супроводжується зменшенням локального коефіцієнта тепловіддачі. На рис.9 криві характеризуються майже лінійним зменшенням при $-50^\circ < \varphi < 75^\circ$. Пограничний шар на внутрішньому циліндрі при $\varphi > 75^\circ$ знаходиться у третій області і знаходиться під впливом додатного градієнта тиску. У цій області відбувається швидкіше утовщення пограничного шару і відрив його від внутрішнього циліндра при куті $\varphi \approx 90^\circ$, в результаті чого виникає тепловий конвективний струмінь, який виражений у течії при більших значеннях числа Грасгофа $Gr = 5000$, $Gr = 10000$. Це знаходить відображення на рис.9 у швидкішому зменшенні коефіцієнта тепловіддачі для $Gr = 5000$, $Gr = 10000$.

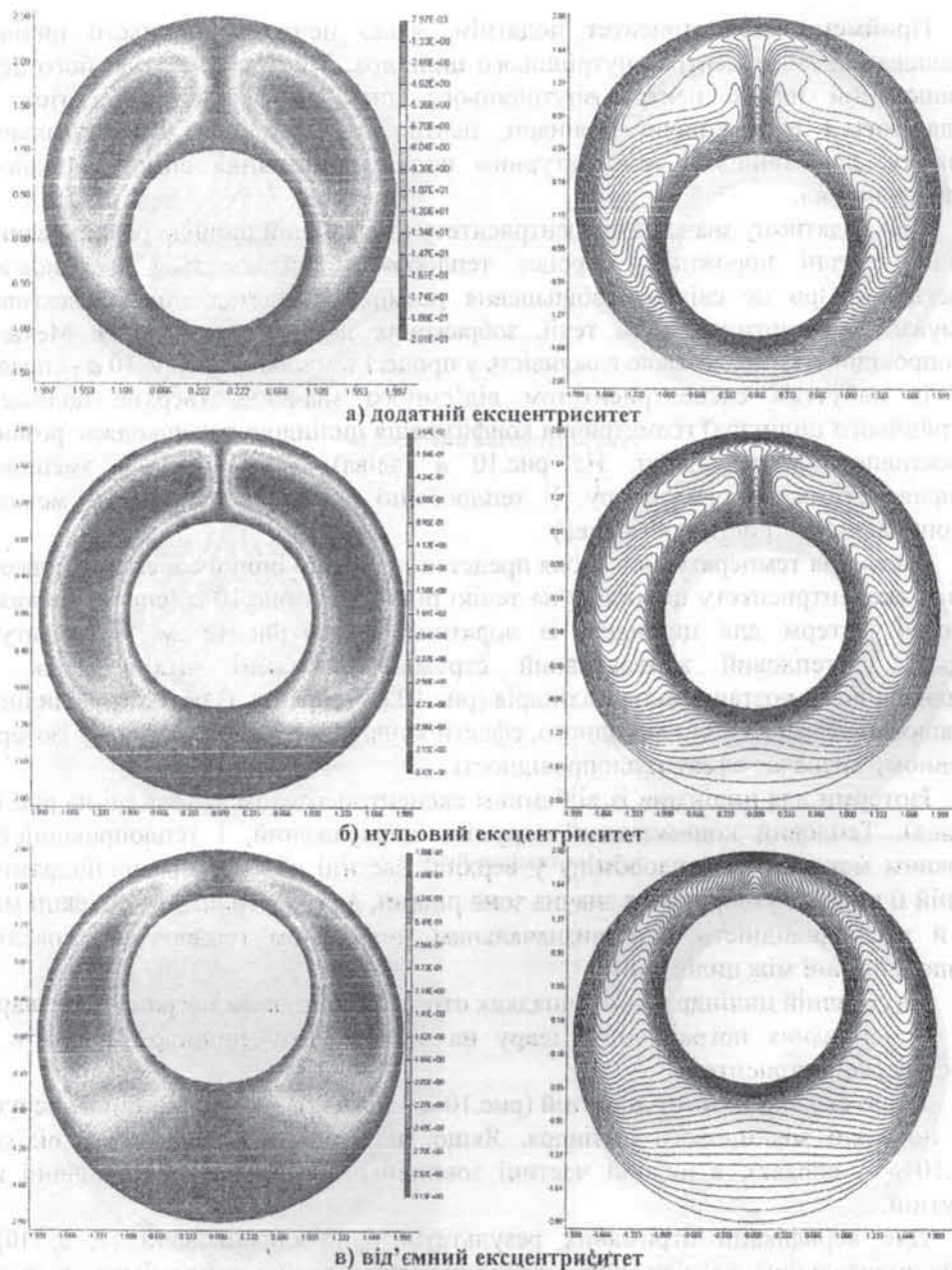


Рис. 10. Розподіли ліній течії (зліва) і ізотерм (справа) в залежності від значень ексцентриситету для $Gr=10000$

Дослідимо тепер вплив значення ексцентриситету на структуру і параметри течії між горизонтальними циліндрами. Ексцентричне розташування циліндрів суттєво впливає на теплові та динамічні характеристики течії. По-перше, внаслідок звуження області між окремими ділянками двох циліндричних поверхонь відбувається збільшення локального теплопереносу. По-друге, наявність ексцентриситету має вплив на відносну роль конвекції і теплопровідності у процесі теплообміну.

Приймемо ексцентриситет додатнім, якщо центр зовнішнього циліндра розташований вище центра внутрішнього циліндра, і від'ємним, якщо його центр розташований нижче центра внутрішнього циліндра. У зв'язку з тим, що розглядаються ексцентричні циліндри, центри яких зміщені у вертикальному напрямку, динамічним і температурним полям притаманна симетрія відносно вертикальної осі.

При додатному значенні ексцентриситету (внутрішній циліндр розташований у нижній частині порожнини) процес теплообміну визначається в основному конвекцією. Про це свідчить збільшення розмірів серпоподібних конвективних формувань на картинах ліній течії, зображених на рис.10 *a* (зліва). Механізм теплопровідності втрачає свою важливість у процесі теплообміну (рис.10 *a* - справа).

Із набуттям ексцентриситетом від'ємного значення (верхнє положення внутрішнього циліндра) геометрична конфігурація циліндрів перешкоджає розвитку конвективного руху рідини. На рис.10 *b* (зліва) спостерігається зменшення інтенсивності основного вихору. У теплообміні більшу роль відіграє механізм теплопровідності (рис.10 *b* - справа).

Вивчення температурного поля представляє собою інший аспект дослідження впливу ексцентриситету циліндрів на течію рідини. На рис.10 *a* (справа) показано розподіл ізотерм для циліндрів із додатнім ексцентриситетом. Температурна інверсія і тепловий конвективний струмінь виражені чіткіше, ніж для концентричного розташування циліндрів (рис.10 *b* - справа). В області, де циліндри розташовані близько один від одного, ефекти конвекції незначні, а форму ізотерм в основному визначає ефект теплопровідності.

Ізотерми для циліндрів із від'ємним ексцентриситетом зображені на рис.10 *b* (справа). Тепловий конвективний струмінь невиражений, і теплопровідність є основним механізмом теплообміну у верхній частині області між циліндрами. У нижній її частині утворюється значна зона рідини, де інтенсивність конвекції мала, але й теплопровідність не є визначальним механізмом теплообміну внаслідок більшої відстані між циліндрами.

Внутрішній циліндр у всіх випадках оточений тепловим пограничним шаром, тоді як існування пограничного шару на зовнішньому циліндрі залежить від значення ексцентриситету.

Якщо ексцентриситет додатній (рис.10 *a* - справа), пограничний шар існує на всій поверхні зовнішнього циліндра. Якщо значення ексцентриситету від'ємне (рис.10 *b* - справа), в нижній частині зовнішнього циліндра пограничний шар відсутній.

Для верифікації отриманих результатів було опрацьовано [7; 8; 10] із експериментальним дослідженням гідродинамічної течії і теплообміну в умовах вільної конвекції в області між концентричними і ексцентричними циліндрами. К'юеном і Голдстейном [8; 7] проведені детальні експериментальні і чисельні дослідження і за допомогою інтерферометра Маха-Цандера візуалізовані температурні поля і знайдені локальні коефіцієнти тепловіддачі для повітря і води. На рис.11 наведені розподіли ізотерм у залежності від міри ексцентричності розташування циліндрів, отримані в даній роботі, у порівнянні з інтерферограмами поля течії, отриманими в [8]. Видно, що в якісному відношенні має місце добре узгодження чисельних результатів з розподілами температур експерименту. Похибку слід віднести на рахунок задання дещо різних співвідношень діаметрів циліндрів, значень числа Прандтля і Грасгофа в експериментах і чисельних розрахунках.

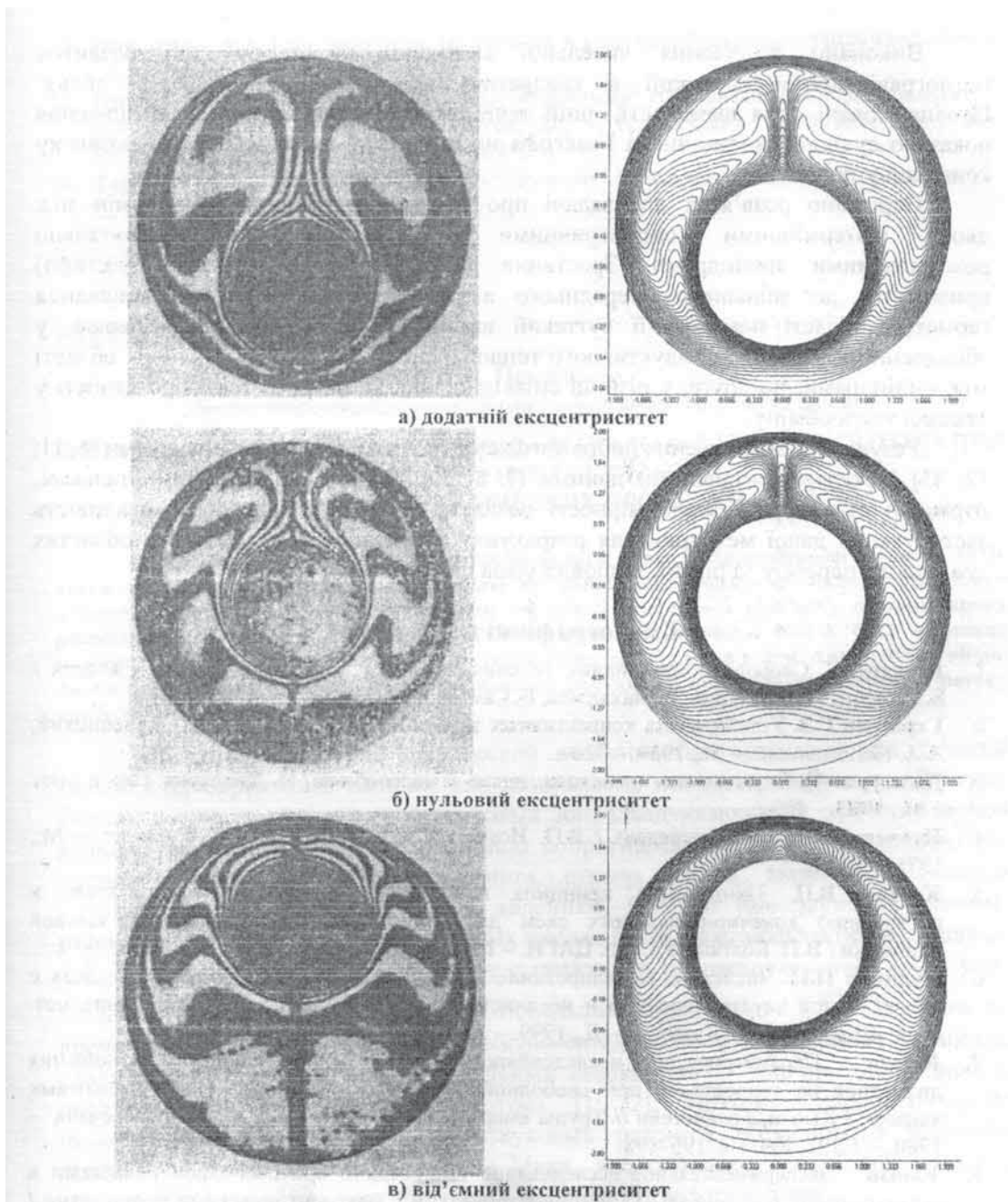


Рис. 11. Порівняння розподілів ізотерм даної роботи (справа) з інтерферограф [8] (зліва)

Висновки. Розроблено чисельну методику розрахунку ламінарної термогравітаційної конвекції у двовимірних замкнених областях на основі рівняння теплопровідності і рівнянь Нав'є-Стокса в наближенні Буссинеска. Для розв'язання вихідної системи рівнянь у фізичних змінних гідродинамічне і температурне поля узгоджуються за допомогою методу штучної стисливості. Дискретизація здійснюється за методом контрольних об'ємів. З метою підвищення точності апроксимації конвективних похідних використовується схема TVD. Інтегрування за часом виконується за допомогою явної тришарової схеми з підітераціями.

Виконано тестування чисельної методики на задачі про розвиток термогравітаційної конвекції в квадратній порожнині при підігріві збоку. Проаналізовані поля швидкості, ліній течії, ізотерм. Параметричне дослідження показало суттєвий вплив числа Грасгофа на структуру і закономірності розвитку конвекції у порожнині.

Отримано розв'язок для задачі про вільноконвективний теплообмін між двома ізотермічними концентричними і ексцентричними горизонтально розташованими циліндрами. Зростання підйомної сили (числа Грасгофа) призводить до збільшення середнього коефіцієнта тепловіддачі. Варіювання геометрії області показало її суттєвий вплив на течію рідини, по-перше, у збільшенні локального кондуктивного теплопереносу для окремих ділянок області між циліндрами, по-друге, у різниці співвідношень конвекції і теплопровідності у процесі теплообміну.

Результати дослідження добре узгоджуються з відомими розрахунками [6; 11; 12; 13] і експериментальними даними [7; 8; 10]. Близькі до експериментальних, отримані структура і закономірності розвитку течії підтверджують можливість застосування даної методики для розрахунку конвекції і теплообміну в областях довільного перерізу за різних теплових умов на границях.

Бібліографічні посилання

1. Гебхарт Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. – в 2-х книгах / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. – М., 1991. – 678 с., 528 с.
2. Гершуни Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. – М., 1989. – 320 с.
3. Джалурия Й. Естественная конвекция: тепло- и массообмен / Й. Джалурия. Пер. с англ. – М., 1983. – 400 с.
4. Исаченко В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М., 1975. – 480 с.
5. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики / В.П. Колган // Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – Т.3, №6. – с.68–77.
6. Кудинов П.И. Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в задачах с конвективной неустойчивостью и неединственным решением: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / П.И. Кудинов. – Д., 1999. – 229 с.
7. Кьюэн . Параметрическое исследование влияния числа Прандтля и отношения диаметров на теплоотдачу при свободной конвекции в горизонтальных кольцевых каналах / Кьюэн, Гольдстейн // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. – 1980. – Т.102, №4. – с. 196–198.
8. Кьюэн . Экспериментальное исследование теплоотдачи при свободной конвекции в зазорах между горизонтальными концентрическими и эксцентрическими цилиндрами / Кьюэн, Гольдстейн // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. – 1978. – Т.100, №4. – с. 80–86.
9. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.В. Патанкар. М., 1984. – 152 с.
10. Пау. Картины течения при свободной конвекции в цилиндрических кольцевых каналах / Пау, Карли, Бишоп // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. – 1969. – №3. – с. 18–24.
11. Полежаев В.И. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунз, Н.А. Вerezуб. – М., 1987. – 272 с.

12. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А.А. Приходько. – К., 2003. – 380 с.
13. Пруса, Яо. Теплообмен между эксцентричными горизонтальными цилиндрами в режиме свободной конвекции / Пруса, Яо. // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. – 1983. – Т.105, №1. – с. 103–114.
14. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. – Иркутск, 1990. – 228 с.

Надійшла до редколегії 01.12.08

УДК 532.516

А.А. Пилипенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О ЗНАЧЕНИЯХ КРИТИЧЕСКОГО ЧИСЛА МАХА НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА ПРИ ТРАНЗЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

Проведено параметричне дослідження впливу чисел Маха незбуреного потоку, кутів атаки та форми аеродинамічного профілю на виникнення локальних надзвукових зон у дозвукових потоках. Розрахунки виконані на основі чисельного розв'язку нестационарних рівнянь Нав'с-Стокса, осереднених за Рейнольдсом. Для профілю NASA 0012 отримано залежність для критичних чисел Маха незбуреного потоку від кутів атаки. Аналізується вплив форми профілю та числа Рейнольдса на значення критичного числа Маха незбуреного потоку при нульовому куті атаки.

Введение. Основной физической особенностью трансзвуковых течений является одновременное наличие как дозвуковых, так и сверхзвуковых областей. Возникновение локальных сверхзвуковых зон, заканчивающихся обычно ударной волной, может привести к возрастанию сопротивления крыла, уменьшению его подъемной силы, появлению бафтинга, отрыва потока, вызванного скачком уплотнения, и другим негативным явлениям. Обычно трансзвуковые режимы рассматривают при достаточно высоких числах Маха набегающего потока, равных $0.6 \div 0.8$. Это связано, прежде всего, с практикой самолетостроения, когда угол установки крыла (профиля) является небольшим и составляет $1.5^{\circ} \div 2^{\circ}$. В то же время известны отдельные экспериментальные и расчетные данные, свидетельствующие о наличии локальных сверхзвуковых зон при более низких числах Маха невозмущенного потока [1; 2]. Поэтому, параметрические исследования возникновения трансзвуковых режимов обтекания в широком диапазоне углов атаки и чисел Маха набегающего дозвукового потока представляют собой как теоретический, так и практический интерес.

Физическая постановка задачи. Одним из ключевых параметров трансзвуковой аэродинамики является критическое число Маха набегающего потока $M_{\infty} = M_{кр}$, при котором в дозвуковом течении появляется единственная точка с локальным значением числа Маха $M = 1$ [3]. Критическое число Маха играет существенную роль в трансзвуковой аэродинамике, поскольку оно разграничивает течения с наличием локальных сверхзвуковых зон от полностью дозвуковых.