

$\delta = \frac{|N - \bar{N}|}{N}$  будет меньше назначенной, то процесс вычисления  $I_E$  может быть завершён. В противном случае – вычисления необходимо повторить, используя найденное значение  $\bar{N}$ .

**Заключение.** В работе обоснован выбор метода решения задачи о переносе концентрированного солнечного излучения, подробно проанализированы основные этапы расчёта, которые были положены в основу создания компьютерной программы для моделирования процессов теплообмена в данных системах.

#### Библиографические ссылки

1. Книш Л.И. Математическое моделирование процесса переноса солнечного излучения в энергетической системе с параболоцилиндрическим концентратором / Л.И. Книш. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2008, №5. – С. 60–68.
2. Исаченко В.П. Теплопередача. / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М., 1975. – 485 с.
3. Грилихес В.А. Солнечные высокотемпературные источники тепла для космических аппаратов / В.А. Грилихес, В.М. Матвеев, В.П. Полуектов. – М., 1975. – 248 с.
4. Ермаков С.М. Статистическое моделирование / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. – М., 1982. – 295 с.

Надійшла до редколегії 05.11.08.

УДК 502:519.6(0.75.8)

Е.Р. Абрамовский, О.А. Загний

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРОДСКОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В РАСЧЕТАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ

Для розв'язування задач розповсюдження забруднень і, зокрема, біологічних поліутантів, у повітряному середовищі міст важливе значення має форма підстилаючої поверхні. Пропонується певна математична модель зображення цієї поверхні у вигляді набору деяких стандартних комбінованих функцій, зручних до використання.

**Введение.** Характер подстилающей поверхности является одним из основных факторов, определяющих законы миграции поллютантов в воздушной среде городов. Форма земной поверхности непосредственно на городском участке территории, или орография, является её основным определяющим элементом. Последующими элементами являются объекты, расположенные на поверхности земли. В первую очередь – это застройка жилой и промышленной зоны. На территории городов могут быть расположены, или примыкать к ней, различные растительные массивы (парки, рекреационные участки), а также водные объекты (река, озеро, морское побережье). Городская подстилающая поверхность существенно отличается от сельской совокупностью значительного числа источников загрязнения, таких, как дымовые трубы промышленных, энергетических и коммунальных предприятий, а

также линейные источники, то есть разветвленная сеть автомобильных дорог, по которым в больших городах движутся и загрязняют атмосферу сотни тысяч транспортных средств. Есть и другие менее значимые элементы, например, участки сильно нагретой территории (заасфальтированные площади), участки повышенной влажности и т. п. В принципе, характер подстилающей поверхности и размещенных на ней объектов определяет общее состояние атмосферы, включая не только степень её загрязнения, но также и значения локальных метеопараметров, таких как температура, влажность, характер воздушных потоков и других величин.

**Математическая модель подстилающей поверхности.** Для описания подстилающей поверхности любого города обычно применяют ряд упрощенных моделей. Здесь предлагается модель, в которой территория города изображается в декартовой системе координат  $x, y, z$  ( $x, y$  – примыкают к поверхности,  $z$  – направлена вертикально вверх). При этом сама территория размещается в пределах координатного прямоугольника, ориентация которого выбирается в зависимости от расположения города на местности. Далее производится идентификация точечных, площадных и линейных объектов в заданной системе координат, то есть фиксация положения этих объектов на местности и описание их внешней формы. Кроме координатного описания объектов в систему их идентификации включаются также некоторые дополнительные данные. К примеру, для источников выбросов – это интенсивность и состав вредных веществ, для жилых массивов – средняя высота зданий и сооружений и плотность их застройки, а для жилых массивов – средняя высота деревьев и густота их размещения.

Вдоль каждой из линий, формирующих координатную сетку  $x_i = const$  и  $y_j = const$ , задаётся форма земной поверхности в виде  $z = z_i(x)$  и  $z = z_j(y)$ . Таким образом формируется сеточный каркас так называемого нулевого слоя. Далее создаётся следующий слой, описывающий отдельные наземные объекты, упомянутые ранее.

Итак, моделируемая земная поверхность представляет так называемый «первый слой». «Второй слой» – это различные наземные объекты. Наконец, «третий слой» – позволяет детализировать уже отдельные объекты. Для этого выбирают участки территории ограниченного размера (например,  $100 \text{ м} \times 100 \text{ м}$ ). В этом случае – производится построение моделей отдельных зданий, сооружений, уличных каньонов, растительных участков.

Математическое описание участков земной поверхности и расположенных на ней объектов в данной работе производится с применением так называемых комбинированных функций [1]. Комбинированная функция – это представленная единым аналитическим выражением совокупность функций различного типа  $F_i(x)$ , каждая из которых описывает характер изменения величины только на отдельном участке  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  заданного конечного отрезка числовой оси. Этот отрезок разбит на  $n$  отдельных участков  $\Delta x$  узловыми точками с координатами  $x_i$  ( $i = 0 \dots n$ ).

При этом

$$\bar{F}(x) = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_n F_n. \quad (1)$$

Черта над  $F$  обозначает тот факт, что функция является комбинированной. Коэффициенты  $A_i$  в правой части отличны от нуля только для значений координаты  $x$ , лежащих в пределах  $\Delta x_i$ . В выражении (1)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \lambda_0(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_n) \\
 A_1 &= \lambda_0\lambda_1(1-\lambda_2)\dots(1-\lambda_n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_1 &= \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{n-1}(1-\lambda_n).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Множители  $\lambda_i$  обладают свойствами известной функции Хевисайда  $H(x) = 0; 0; 1$  при  $x < 0; x = 0$  и  $x > 0$  соответственно. В компьютерном представлении  $\lambda_i$  можно записать в виде

$$\lambda_i = 0.5[1 + \text{Sgn}(x - x_i)]\text{Sgn}(x - x_i).
 \tag{3}$$

Комбинированные функции могут быть многомерными. В роли независимой переменной может быть выбрано время  $t$  или другие величины.

В качестве базовых функций для описания формы земной поверхности  $z_k(x)$  вдоль координатной линии  $y_j = \text{const}$  на отрезке  $\Delta x_i$  можно применять выражения типа

$$F_i(x) = \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} = m \left( \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^{m-1} - (m-1) \left( \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^m.
 \tag{4}$$

Здесь  $m > 2$  – параметр определяющий степень крутизны подъема поверхности, или в трансформированном виде – степень крутизны спуска. Для описания формы холмов или поперечного сечения оврагов можно применять формулы типа функции Гаусса и другие выражения. Аналогично аппроксимируется поверхность вдоль  $x_i = \text{const}$ .

Форму отдельных зданий при детализированном описании объектов будем представлять в виде

$$\Phi_i(x, y) = \bar{H}_i(y) \sqrt{\frac{(x_i - x_{i-1})^2 - |x_i + x_{i-1} - 2x|}{(x_i - x_{i-1})^2 - M|x_i + x_{i-1} - 2x|}}.
 \tag{5}$$

Здесь  $H_i$  – высота прямоугольного здания, имеющего длину  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . При этом  $\bar{H}_i(y)$  есть комбинированная функция по координате  $y$  и в промежутке  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$   $H_j = \text{const}$ . В записанном выражении (5) коэффициент  $M$  постоянное число (обычно  $M \approx 0,9$ ), определяющее форму поперечного сечения здания.

Участок растительности моделируется следующей функцией:

$$R(x) = \frac{\bar{Hd}_i(y)}{2} \sin \frac{\pi(x - x_i)}{Sh_i} \left[ 1 + \text{Sgn} \left( \sin \frac{\pi(x - x_i)}{Sh_i} \right) \right] \text{Sgn} \left( \sin \frac{\pi(x - x_i)}{Sh_i} \right),
 \tag{6}$$

где  $Hd_i$  – средняя высота,  $Sh_i$  – ширина деревьев или кустарника на данном участке,  $\bar{Hd}_i(y)$  – комбинированная функция по координате  $y$ . В принципе, возможно использование и других базовых функций.

В качестве примера было рассмотрено представление подстилающей поверхности г. Днепропетровска по одному из направлений  $x_i = \text{const}$ . Упрощенная схема ограниченного участка по оси  $x$  представлена на рис. 1. На рис. 2 представлена аналитическая модель отдельных зданий и растительного массива.

Отметим, что моделирование объектов подстилающей поверхности позволяет определить характер воздушных течений в приземном слое и рассчитать перенос загрязняющих веществ на различных участках городской территории.

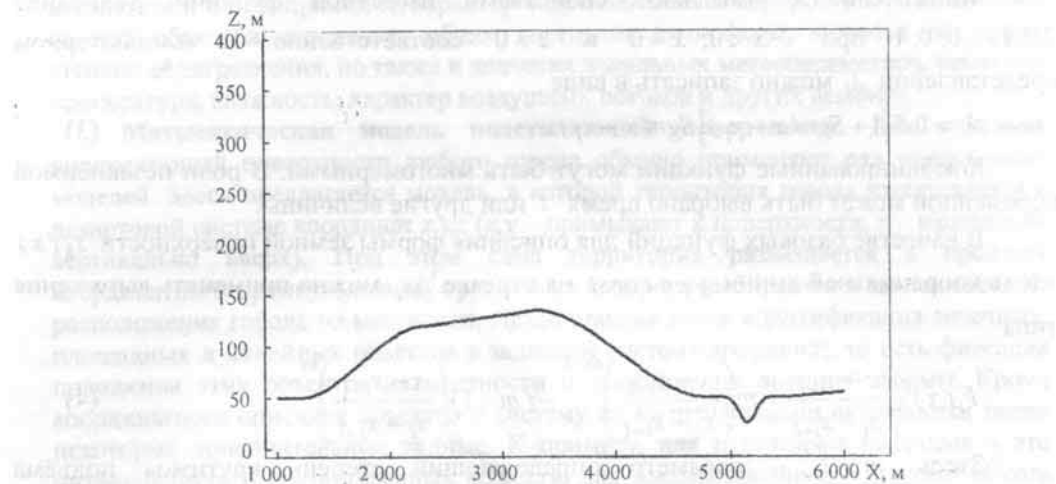


Рис. 1. Моделирование рельефа земной поверхности

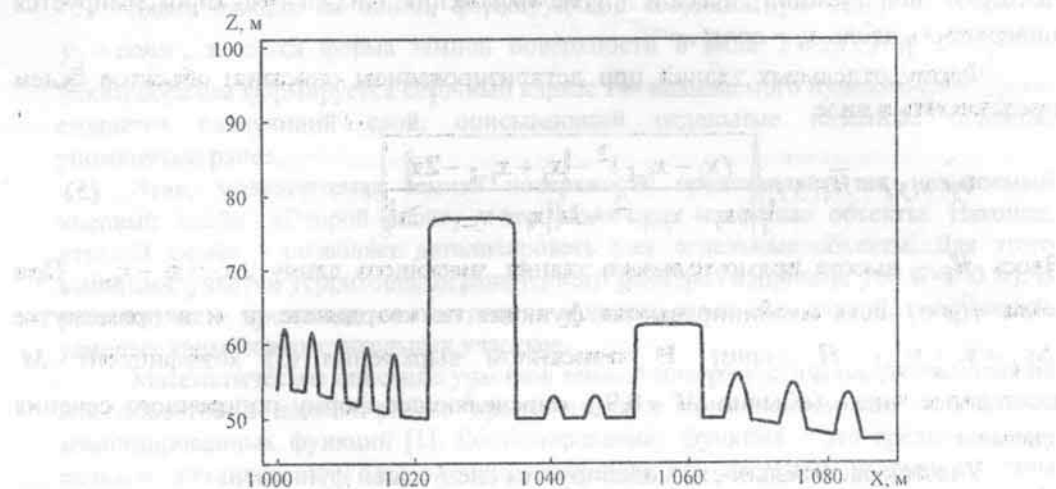


Рис. 2. Моделирование прямоугольных зданий и растительного массива

**Заключение.** Таким образом, разработанная математическая модель формы подстилающей поверхности может быть эффективно реализована в виде аналитической зависимости высоты от двух переменных путем суперпозиции некоторых комбинированных функций стандартного вида. Указанная зависимость принципиально с любой степенью детализации может быть построена для любого участка территории города и даже для всего города в целом на основании топографических карт и спутниковой съемки.

1. Абрамовский Е.Р. Комбинированные функции и их применение в инженерной практике. / Е.Р.Абрамовский // Системне проєктування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки, т.3, Д., 2001. – С. 123–130.

Надійшла до редакції 05.11.08

УДК 536.6

Т. И. Русакова

Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара

## РАСЧЕТ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Розглянуто задача формування нестационарної течії навколо пластини при її обтіканні потоком ідеальної нестисливої рідини. На основі методу дискретних вихорів створений алгоритм та проведені чисельні розрахунки вихрових структур та поля швидкостей при відривному обтіканні пластинки. Досліджені симетричні та несиметричні структури течії, їхні утворення залежно від кута атаки. Представлені результати підтверджуються як експериментальними даними так і розрахунками інших авторів.

**Введение.** В работе используется численный метод дискретных вихрей [1; 4; 5], на основе которого можно изучать физический процесс формирования структуры обтекания. Модель течения строится на основе идеальной среды, используется только условия, имеющие физический смысл: о непротекании поверхности тела и о конечности скоростей и давлений во всем пространстве. Конечность скоростей на острых кромках и изломах образующей обеспечивается сходом в поток свободных вихрей, которые движутся с жидкими частицами, выполняя условие о непрерывности давлений на вихревом следе. Задача формулируется и решается на основе дискретных представлений по координате и во времени. Такой дискретный подход позволяет описать течения, в которых вихревые поверхности теряют свою устойчивость [2; 3; 4; 5], что затруднительно выполнить в классе непрерывных представлений. Например, отрывное обтекание пластины с образованием дорожки из вихревых сгустков, представляющих собой совокупность большого количества свободных дискретных вихрей.

На основе метода дискретных вихрей получена структура вихревого следа и расчетные поля скоростей при обтекании пластины при разных углах атаки. Исследовано влияние числа вихрей и расчетного шага по времени на вихревую структуру. Достоверность полученных результатов подтверждается экспериментальными данными [2; 3; 4].

**Формулировка задачи.** В потоке идеальной несжимаемой среды рассматривается пластина, которая внезапно переходит от состояния покоя к движению под постоянным углом атаки и с постоянной скоростью  $U_0$ . Водится связанная с телом система координат  $Oxy$  рис. 1. За характерный размер принимается длина пластины  $l$ .