

1. Абрамовский Е.Р. Комбинированные функции и их применение в инженерной практике. / Е.Р.Абрамовский // Системне проєктування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки, т.3, Д., 2001. – С. 123–130.

Надійшла до редколегії 05.11.08

УДК 536.6

Т. И. Русакова

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

РАСЧЕТ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

Розглянуто задача формування нестационарної течії навколо пластини при її обтіканні потоком ідеальної нестисливої рідини. На основі методу дискретних вихорів створений алгоритм та проведені чисельні розрахунки вихрових структур та поля швидкостей при відривному обтіканні пластинки. Досліджені симетричні та несиметричні структури течії, їхні утворення залежно від кута атаки. Представлені результати підтверджуються як експериментальними даними так і розрахунками інших авторів.

Введение. В работе используется численный метод дискретных вихрей [1; 4; 5], на основе которого можно изучать физический процесс формирования структуры обтекания. Модель течения строится на основе идеальной среды, используется только условия, имеющие физический смысл: о непротекании поверхности тела и о конечности скоростей и давлений во всем пространстве. Конечность скоростей на острых краях и изломах образующей обеспечивается сходом в поток свободных вихрей, которые движутся с жидкими частицами, выполняя условие о непрерывности давлений на вихревом следе. Задача формулируется и решается на основе дискретных представлений по координате и во времени. Такой дискретный подход позволяет описать течения, в которых вихревые поверхности теряют свою устойчивость [2; 3; 4; 5], что затруднительно выполнить в классе непрерывных представлений. Например, отрывное обтекание пластины с образованием дорожки из вихревых сгустков, представляющих собой совокупность большого количества свободных дискретных вихрей.

На основе метода дискретных вихрей получена структура вихревого следа и расчетные поля скоростей при обтекании пластины при разных углах атаки. Исследовано влияние числа вихрей и расчетного шага по времени на вихревую структуру. Достоверность полученных результатов подтверждается экспериментальными данными [2; 3; 4].

Формулировка задачи. В потоке идеальной несжимаемой среды рассматривается пластина, которая внезапно переходит от состояния покоя к движению под постоянным углом атаки и с постоянной скоростью U_0 . Водится связанная с телом система координат Oxy рис. 1. За характерный размер принимается длина пластины ℓ .

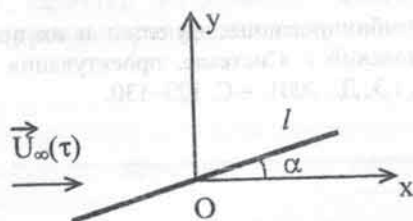


Рис. 1. Расположение пластины в системе координат Oxy

Скорость поступательного движения пластины описывается зависимостью (1),

$$U(\tau) = \begin{cases} 0, \tau < 0 \\ U_0, \tau \geq 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где τ – безразмерное время, которое в случае закона (1) определяется $\tau = U_\infty \cdot t / \ell$, $\Delta \tau \approx 1/m$ – безразмерный шаг по времени, m – число присоединенных вихрей, которыми моделируется тело.

Схема разбиения поверхности пластины включает: n контрольных точек, где выполняется граничное условие непротекания и m дискретных вихрей. Первые располагаются на линиях ν , а вторые – на линиях μ между контрольными точками рис. 2.

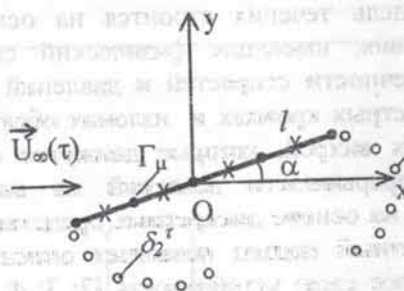


Рис. 2. Моделирование поверхности пластины системой дискретных вихрей (•) и контрольных точек (x)

Циркуляции присоединенных вихрей Γ_μ на k -м шаге по времени определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (2), которая выражает собой условие непротекания поверхности и постоянство циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему профиль и его след [1; 4; 5].

$$\begin{cases} \sum_{\mu=0}^m \Gamma_\mu a_{\nu\mu} = -\cos(U_\infty, \vec{n})_\nu - \sum_{kk=1}^2 \sum_{i=1}^k \delta_{kk\ i} (a_{kk\ i})_\nu, \\ \nu = 0, \dots, n; \\ \sum_{\mu=0}^m \Gamma_\mu = C - \sum_{kk=1}^2 \sum_{i=1}^k \delta_{kk\ i}; \end{cases}, \quad (2)$$

где Γ_μ – циркуляция μ -го присоединенного вихря; $a_{\nu\mu}$ – нормальная составляющая скорости в ν -й контрольной точке от μ -го присоединенного вихря; $(a_{kk\ i})_\nu$ –

нормальная составляющая скорости в i -й контрольной точке от i -го вихря свободных вихревых систем δ_1^r и δ_2^r ; kk – порядковый номер вихревой пелены; k – количество свободных вихрей в потоке в момент времени τ в соответствующей вихревой пелене kk ; $\cos(\vec{U}_\infty, \vec{n})_i$ – косинус угла между вектором скорости потока $\vec{U}(\tau)$ и нормалью \vec{n} к поверхности тела в каждой контрольной точке.

Известные значения циркуляций присоединенных дискретных вихрей Γ_μ ближайших к острым краям определяют циркуляции свободных вихрей δ_1^r , δ_2^r , сходящихся с поверхности тел в расчетный момент времени τ .

Новое положение свободных вихрей определяется по методу Эйлера [1; 5], соотношениями:

$$\begin{cases} x_{kk}^{\tau+1} = x_{kk}^{\tau} + \left[\sum_{\mu=0}^n (V_x)_{i\mu} \cdot \Gamma_\mu + \sum_{kk=1}^2 \sum_{j=1}^k (V_x)_{ij} \cdot \delta_{kkj} + U(\tau) \right] \cdot \Delta t, \\ y_{kk}^{\tau+1} = y_{kk}^{\tau} + \left[\sum_{\mu=0}^n (V_y)_{i\mu} \cdot \Gamma_\mu + \sum_{kk=1}^2 \sum_{j=1}^k (V_y)_{ij} \cdot \delta_{kkj} \right] \cdot \Delta t; \quad i=1, \dots, k; \quad kk=1, \dots, 2; \end{cases} \quad (3)$$

где компоненты скорости $(V_x)_{i\mu}$, $(V_x)_{ij}$, $(V_y)_{i\mu}$, $(V_y)_{ij}$, вычисляются по соотношениям (5).

Построение поля скоростей при $\tau > 40 \cdot \Delta t$ позволяет пронаблюдать за симметричной и несимметричной структурой течения, проанализировать особенности формирования спутного следа за пластиной при различном значении угла атаки.

Компоненты скорости V_{xi} , V_{yi} (4) в рассматриваемой точке плоскости (x_i, y_i) можно рассчитать как сумму соответствующих компонент скорости от всей вихревой системы: присоединенных вихрей μ ; свободных вихрей, сошедших с острых краев δ_1 , δ_2 , на данный момент времени τ .

$$\begin{cases} (V_x)_i = \sum_{\mu=0}^m \Gamma_\mu (V_{x\mu})_i + \sum_{\delta_1=1}^k \Gamma_{\delta_1} (V_{x\delta_1})_i + \sum_{\delta_2=1}^k \Gamma_{\delta_2} (V_{x\delta_2})_i + U_\infty(\tau); \\ (V_y)_i = \sum_{\mu=0}^m \Gamma_\mu (V_{y\mu})_i + \sum_{\delta_1=1}^k \Gamma_{\delta_1} (V_{y\delta_1})_i + \sum_{\delta_2=1}^k \Gamma_{\delta_2} (V_{y\delta_2})_i; \end{cases} \quad (4)$$

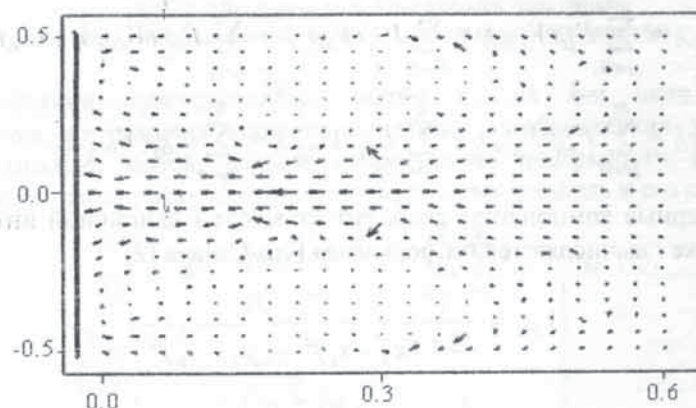
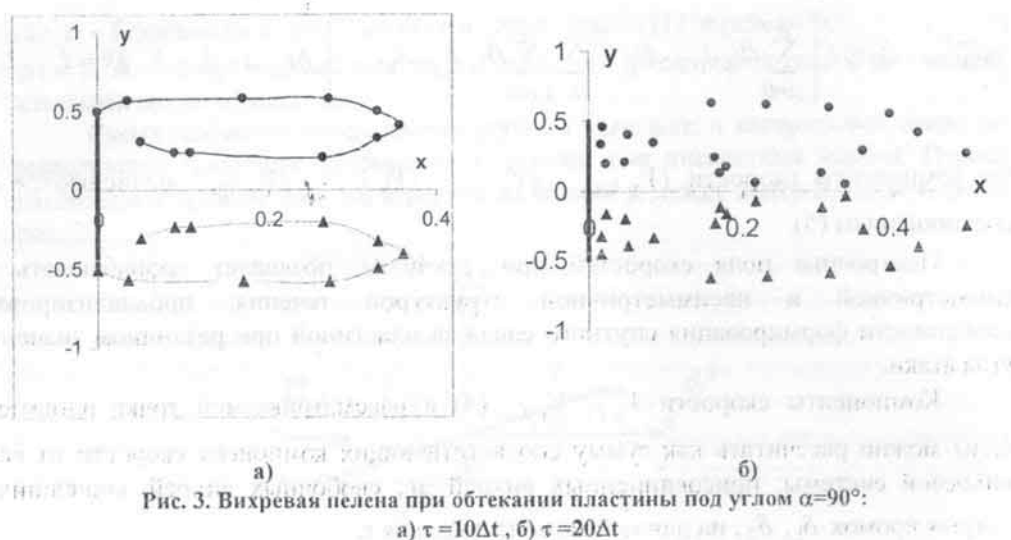
Безразмерные компоненты скорости от вихря j единичной интенсивности в некоторой точке i вычисляются по формулам Био-Савара [2]

$$\begin{cases} V_{xji} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y_j - y_i}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \\ V_{yji} = \frac{1}{2\pi} \frac{x_j - x_i}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \end{cases} \quad (5)$$

где (x_j, y_j) , (x_i, y_i) – координаты вихря j и рассматриваемой точки плоскости i .

Полученные результаты. Численные исследования показывают, что на предельных режимах, т.е. при больших значениях τ спутный след за пластиной принимает вид вихревых дорожек. В зависимости от начальных условий движения пластины режим течения при угле атаки $\alpha=90^\circ$ и больших τ получается различным. Имеют место две характерные структуры течения — симметричная и несимметричная. На рис. 3 представлена вихревая структура за пластиной в моменты времени $\tau=10\Delta t$ и $\tau=20\Delta t$. В непрерывных поверхностях уже имеются петлеобразные формы, вихревая структура является строго симметричной, и эта симметрия в процессе расчета сохраняется до $\tau=60\Delta t$. Поле скоростей (рис. 4), построенное для $\tau=20\Delta t$, тоже подтверждает абсолютную симметрию вихревого следа.

С течением времени спутная область расширяется, симметрия постепенно нарушается (рис. 5 и 6), образуя при больших $\tau = 100\Delta t$ несимметричную вихревую дорожку.



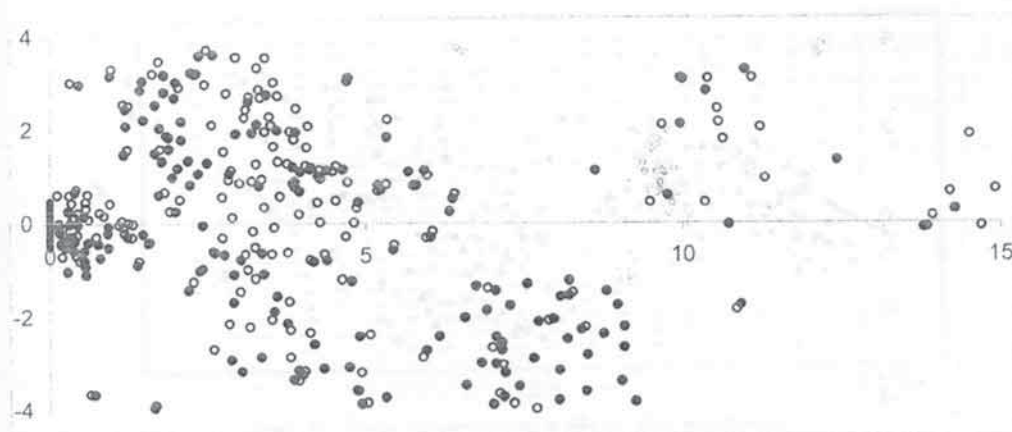


Рис. 5. Вихревая пелена при обтекании пластины под углом $\alpha=90^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

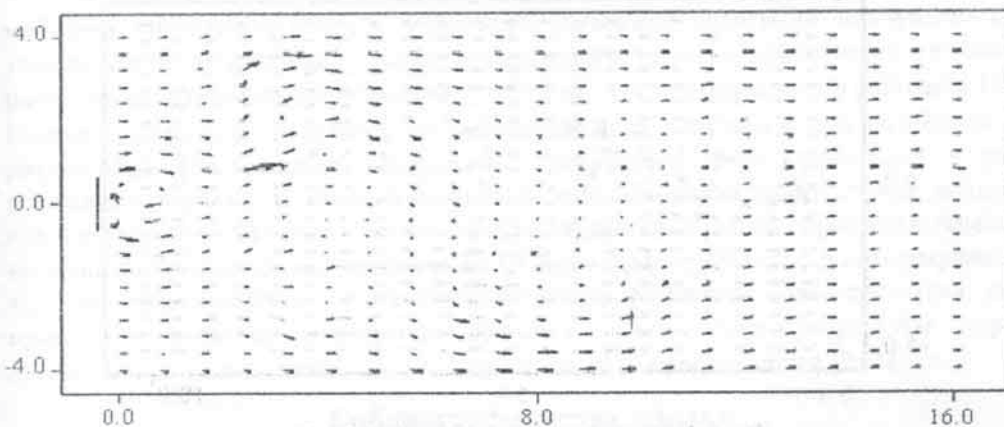


Рис. 6. Поле скоростей при обтекании пластины под углом $\alpha=90^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

На рис. 7 показано развитие вихревого следа за пластиной при $\alpha=45^\circ$, $\tau=100\Delta t$. По мере развития нестационарного течения происходит потеря устойчивости вихревых пелен. Пелена разрушается и происходит концентрация дискретных вихрей в сгустки конечных размеров. При этом формируются устойчивые вихреобразования и распадаются неустойчивые. Поле скоростей на рис. 8 подтверждает такую структуру обтекания. Этот процесс периодически повторяется.

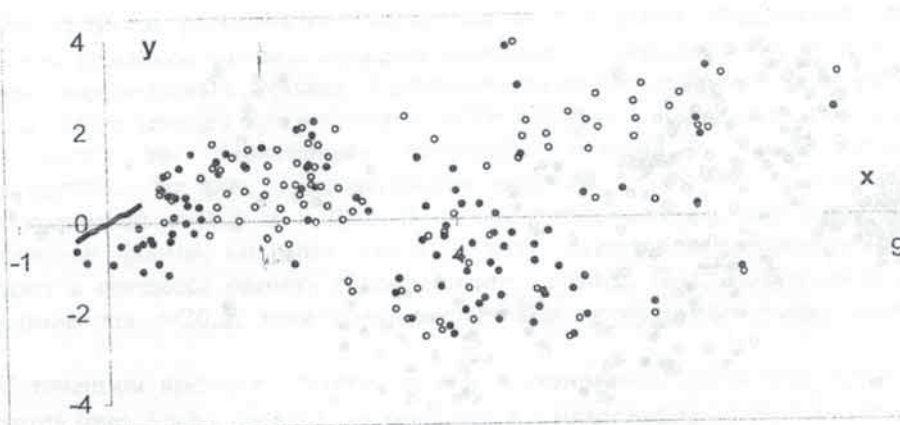


Рис. 7. Вихревая пелена при обтекании пластины под углом $\alpha=45^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

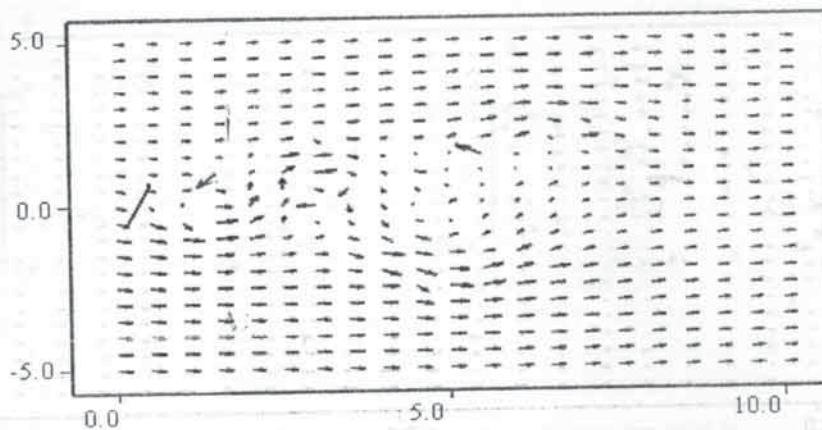


Рис. 8. Поле скоростей при обтекании пластины под углом $\alpha=45^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

Отрывное обтекание пластины под углом атаки $\alpha=135^\circ$, $\tau=100\Delta t$ представлено в виде структуры вихревого следа на рис. 9, и поля скоростей на рис. 10. Можно видеть, что даже при больших τ спутная область расширяется более медленно, образуя слабо выраженную симметричную вихревую дорожку. С течением времени вихревые сгустки не образуются, след за пластиной не принимает периодический характер.

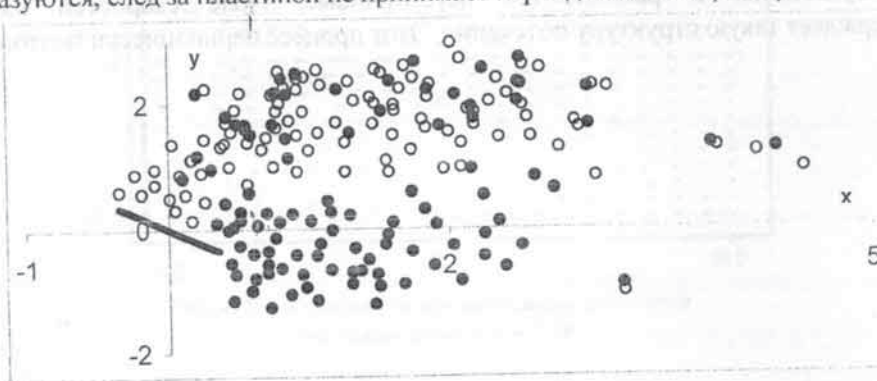


Рис. 9. Вихревая пелена при обтекании пластины под углом $\alpha=135^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

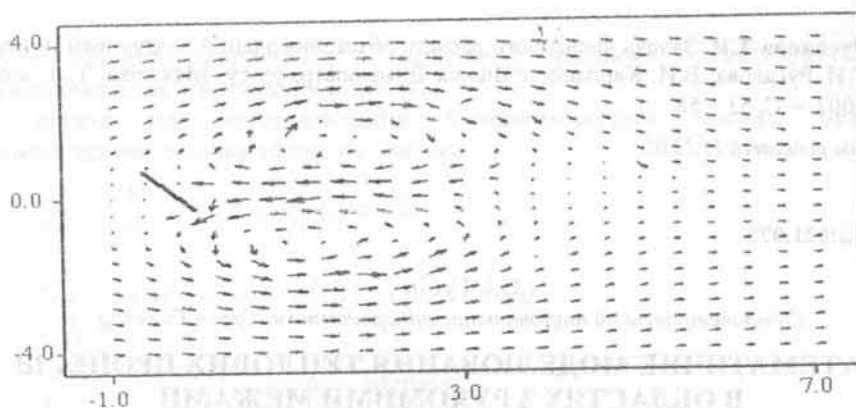


Рис. 10. Поле скоростей при обтекании пластины под углом $\alpha=135^\circ$ и $\tau=100\Delta t$

Выводы. На основе метода дискретных вихрей [1; 4; 6–9] разработана методика численного расчета отрывного обтекания пластинки под различными углами атаки. Исследовано влияние расчетного шага по времени на результаты расчетов, его оптимальное значение $\Delta t \approx 1/m$, что подтверждается работами [2–4]. Получена структура развитого вихревого следа за пластиной при обтекании под различными углами атаки. Нарушение симметрии следа происходит в месте сближения верхней и нижней вихревых цепочек, происходит отрыв вихревых комков, несимметрия следа все больше усиливается. В итоге образуется течение в виде шахматной вихревой дорожки. Если симметрия достаточно долго сохраняется, то с течением времени область спутного следа становится более размытой, но не принимает характер шахматной дорожки. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами численных расчетов и экспериментов [2–4].

Библиографические ссылки

1. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Ништ – М., 1988. – 232 с.
2. Белоцерковский С.М. Исследование особенностей обтекания пластинки при больших углах атаки / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ // МЖГ. – 1973. №5.
3. Белоцерковский С.М. О двух режимах срывного обтекания пластины / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ // Доклады АН СССР 213. – 1973. №4.
4. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ – М., 1978. – 352 с.
5. Гоман О.Г. Численное моделирование осесимметричных отрывных течений несжимаемой жидкости / О.Г. Гоман, В.И. Карплюк, М.И. Ништ – М., 1993. – 288 с.
6. Русакова Т.И. Численное исследование влияния циркуляции свободных вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики цилиндра / Т.И. Русакова // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. Т.1, вип. 6, 2002. – С. 81 – 87.
7. Русакова Т.И. Численное исследование аэродинамических характеристик эллиптических цилиндров при нестационарном отрывном обтекании / Т.И. Русакова, В.И. Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. Т.1, вип. 9, 2005. – С. 81 – 87.
8. Русакова Т.И. Численное исследование структуры вихревого потока около высотных сооружений / Т.И. Русакова, В.И. Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. Т. 1, вип.10, 2006. – С. 154 – 160.

9. **Русакова Т.И.** Задача численного расчета обтекания зданий воздушным потоком / Т.И. Русакова, В.И. Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. Т. 1, вип.11, 2007. – С. 53 – 58.

Надійшла до редколегії 15.12.08

УДК 536.2:621.078

О.І. Губін

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Розроблено математичні моделі технічно важливих теплових процесів в областях з рухомими межами, а також технологічно суміжних з ними процесів прогріву. Розв'язки відповідних крайових задач теплопровідності отримані за допомогою методів малого параметра, степеневих рядів і скінчених різниць. Проведено параметричні дослідження, на основі яких встановлено основні закономірності протікання процесів.

Вступ. Велика кількість процесів теплообміну пов'язана зі зміною агрегатного стану або фізико-хімічної природи матеріалу. При цьому теплофізичні характеристики тіла змінюються стрибкоподібно, і для фазових переходів потрібна теплота плавлення (сорбції, випаровування) або теплота хімічних реакцій. Розв'язання такого роду задач має велике практичне значення в металургії, будівельній теплотехніці, ракетній і космічній техніці, а також в інших прикладних дисциплінах. З достатньою точністю ці процеси математично моделюються задачею Стефана. Істотно новою рисою подібного класу задач є наявність рухомої поверхні між фазами, причому доводиться визначати закон руху цієї поверхні, на якій відбувається виділення або поглинання тепла. У загальному випадку термічні властивості фаз з обох боків рухомої поверхні виявляються різними, і тому розв'язання таких задач із математичної точки зору принципово відмінне від класичних.

Зараз велика увага приділяється розв'язанню задач нестационарної теплопровідності для областей з рухомими межами [1]. Особливо гостра необхідність у розв'язанні таких задач відчувається при визначенні температурних полів у складених тілах з урахуванням руху фронтів фазових переходів, а також неідеальності теплового контакту між складовими тілами.

Задачі теплопереносу у системах тіл з рухомими межами відносяться до класу істотно нелінійних задач. Їхній точний розв'язок одержати, як правило, не вдається, тому звичайно застосовують наближені методи розв'язання, як аналітичні, так і чисельні. Однак, на сьогоднішній день, розроблено досить вузьке коло ефективних методів розв'язання задач типу Стефана й, як правило, вони застосовні лише для спрощених задач (одновимірних, однофазних, зі спеціальним виглядом залежності теплофізичних коефіцієнтів від температури). Тому актуальною є розробка нових методів розв'язання таких задач, а також удосконалення існуючих методів.

У зв'язку з розвитком нових технологій, де протікають високоінтенсивні процеси теплообміну, математичне моделювання яких не можливе на основі класичної теорії теплопровідності Фур'є й вимагає врахування скінченності швидкості розповсюдження тепла, перспективною стає розробка математичних