5. **Абрамовский Е.Р.** Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик. – Дн., - 2007. – 187 с.
6. **Белоцерковский С.М.** Математичесое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, - М., - 1988. – 232 с.
7. **Русакова Т.И.** Задача численного расчета обтекания зданий воздушным потоком / Т.И. Русакова, В.И. Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, Т.1, вип.11, 2007. С. 53 - 59.

Надійшла до редколегії 28.12.09.

УДК 532.516

О.Г. Гоман*, В. И. Давыдов*, Ю.К. Романовский**, Ю.Т. Шипилов**
**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*
***Производственно-комерческая фирма «Курс»*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ПОМОЩИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Рассмотрена методика определения расходной скорости потока газа в трубопроводе при помощи ультразвуковых измерителей скорости. Способ использования указанных измерителей основан на экспериментальной фиксации промежутков времени движения звукового импульсного сигнала от источника звука к его приемнику вдоль пути, расположенного наискосок по и против потока в некоторой измерительной плоскости, параллельной диаметральной. В работе дается алгоритм вычисления расходной скорости по данным измерения указанных промежутков времени.

Ключевые слова: ультразвуковые измерители скорости, турбулентные течения, техника измерения скорости потока в трубопроводах.

Розглянуто методику визначення витратної швидкості потоку газу в трубопроводі за допомогою використання ультразвукових вимірювачів швидкості. Ідея використання ультразвукових вимірювачів ґрунтується на експериментальному визначенні проміжків часу руху звукового імпульсного сигналу від джерела до приймача вздовж путі, розташованого навкіс за і проти потоку в деякій вимірювальній площині, паралельній діаметральній. У роботі дається алгоритм розрахунку витратної швидкості за даними вимірювання вказаних проміжків часу.

Ключові слова: ультразвукові вимірювачі швидкості, турбулентні течії, техніка вимірювання швидкості потоку в трубопроводах.

The method of measurement consumables velocity of the gas flow in the pipeline with using ultrasonic velocity devices was considered. The method of specified indexes is based on experimental fixation of periods of movement of sonic pulsed signal from the source of sound to its receiver along the way, which is situated obliquely down- upstream in some metrical plan and paralleled to its diametrical plan. The algorithm of calculation feet velocity according to dimensions of the specified intervals of time was given in this work.

Keywords: the ultrasonic velocity devices, turbulent flow, measuring techniques.

Введение. В последнее время в качестве расходомеров газа все чаще используются ультразвуковые измерители скорости. Идея их использования основана на том факте из гидромеханики, что скорость передачи возмущений в движущейся сжимаемой среде в данном направлении $\vec{s}$ равна $a+u_S$, где a – скорость звука, а u_S – проекция скорости газа на данное направление. В связи с этим, скорость движения звукового сигнала, произведенного источником, непосредственно против потока (или под некоторым углом против потока) будет меньше, чем скорость движения сигнала вдоль потока (или под углом вдоль потока).

Измеряя прибором промежутки времени движения сигнала от источника звукового импульса до приемника, расположенного несколько наискосок против потока и наискосок по потоку, можно по разности этих времен и расстоянию между источником и приемником судить о скорости движения потока.

Основная трудность использования этой процедуры (мы здесь не касаемся чисто инструментальных проблем) заключается в том, что вдоль пути акустического луча скорость потока переменна, и связь указанных измеряемых промежутков времени со средней скоростью потока весьма сложна.

Применяемые в настоящее время ультразвуковые измерители скорости работают в автоматическом режиме, вырабатывают довольно узкие импульсы с некоторым заданным шагом по времени и снабжены микрокалькуляторами, которые по встроенной программе могут вычислять расходную скорость потока по результатам фиксации оговоренных промежутков времени, то есть ультразвуковые измерители могут в принципе обеспечить выдачу с определенным временным шагом текущей информации о величине расходной скорости потока, если известен алгоритм расчета этой скорости по данным измерений.

В работе получены аналитические зависимости, позволяющие разработать алгоритм вычисления расходной скорости по результатам замеров указанных промежутков времени.

Поле скорости газа в трубопроводе. Особенностью работы ультразвуковых датчиков для измерения скорости потока в трубопроводе является то, что величина скорости в поперечном сечении трубопровода неоднородна, так что вдоль «акустического луча», соединяющего источник звука и приемник и пересекающего трубопровод под некоторым углом к его оси, скорость распространения возмущений является переменной. Поэтому время распространения звукового сигнала от источника к приемнику определяет только среднюю скорость распространения сигнала на этом пути, которая достаточно сложным образом связана с расходной скоростью газа. Для установления взаимосвязи средней скорости вдоль измерительного луча и расходной скорости рассмотрим известные классические аналитические зависимости, принятые в гидродинамике для поля скоростей при стабилизированном течении в поперечном сечении цилиндрического трубопровода, [1; 2].

Для ламинарного течения имеем параболический профиль скорости

$$V_x(r) = V_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \tag{1}$$

где V_{max} – максимальная скорость на оси, R – радиус трубопровода, r – расстояние от оси до точки наблюдения.

При турбулентном режиме течения закон распределения скорости по поперечному сечению, как известно [1; 2], зависит от того, насколько влияет шероховатость внутренней поверхности трубопровода на течение. При любом турбулентном режиме течения в окрестности стенки трубопровода существует вязкий подслой, толщина которого равна

$$\delta_л = 11.6\frac{\nu}{u_*}, \tag{2}$$

где u_* – «динамическая скорость», связанная с напряжением трения на стенке зависимостью $\tau_0 = \rho u_*^2$. Величина динамической скорости u_* связана также с величиной расходной скорости V_0 посредством формулы

$$u_*^2 = \frac{\lambda}{8} V_0^2 , \qquad (3)$$

где λ – коэффициент гидравлических потерь согласно формуле Вейсбаха-Дарси.

В свою очередь, коэффициент λ в общем случае зависит от числа Рейнольдса $Re = \frac{DV_0}{\nu}$ и относительной шероховатости поверхности стенок трубопровода.

Согласно формуле (2) относительная толщина вязкого подслоя равна

$$\bar{\delta}_л = \frac{\delta_л}{R} = 11.6 \frac{\nu}{Ru_*} = \frac{11.6}{Re_*} , \qquad (4)$$

где $Re_* = \frac{u_* R}{\nu}$ – «динамическое» число Рейнольдса, так что в развитом турбулентном течении $Re_* \ge 11.6$, поскольку в таком течении величина $\delta_л$ меньше, чем радиус трубопровода *R*.

Если Δ – средняя высота шероховатостей внутренней поверхности стенки трубопровода, то в случае $\Delta < \delta_л$ шероховатость, будучи погруженной во вязкий подслой, не оказывает непосредственного влияния на закон распределения скорости по поперечному сечению. Такой режим течения называется гладкостенным, а сам трубопровод – гидравлически гладким. Для гладкостенного режима течения профиль скорости в поперечном сечении имеет двучленный вид:

а) в окрестности стенок, на расстояниях от стенки

$$y = R - r < \delta_л$$

имеет место линейный закон

$$V(r) = \frac{u_*^2}{\nu} y = u_* Re_* (1 - \frac{r}{R}) \; ; \qquad (5)$$

б) в ядре потока, $0 < r < R - \delta_л$ имеет место логарифмический закон

$$V(r) = u_* (A \ln \frac{u_* y}{\nu} + B) = u_* (A \ln Re_* (1 - \frac{r}{R}) + B) \; , \qquad (6)$$

где A=2,5; B=5,5.

Логарифмический закон (6) фактически справедлив при условии $\frac{u_* \Delta}{\nu} \le 4$;

в случае $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 4$ профиль скорости в ядре имеет вид

$$V(r) = u_* (A \ln \frac{y}{\Delta} + B_1) = u_* (A \ln \frac{R}{\Delta} (1 - \frac{r}{R}) + B_1) , \qquad (7)$$

причем в диапазоне $4 \le \frac{u_* \Delta}{\nu} \le 50$ величина B_1 является функцией от параметра $\frac{u_* \Delta}{\nu}$ ([1–3]), а при $\frac{u_* \Delta}{\nu}$>50 B_1=8,5. Последний режим называется квадратичным: для него коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса $Re = \frac{DV_0}{\nu}$, и определяется только величиной относительной шероховатости $\frac{\Delta}{D}$. Для квадратичного режима динамическая скорость пропорциональна средней расходной скорости

$$u_* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} V_0 \ .$$

Заметим, что для профиля скорости в ядре течения при турбулентном течении имеются и другие более точные, но и более сложные формулы, чем приведенные выше и используемые нами классические формулы Прандтля-Никурадзе.

Связь между динамической и расходной скоростью. При разработке алгоритма вычисления расходной скорости течения через данные замеров ультразвуковых измерителей оказалось удобным в качестве промежуточной переменной между определяемой расходной скоростью и средней скоростью течения вдоль измеряемого луча выбрать «динамическую скорость» u_*. Установим связь между динамической скоростью и расходной. Эта связь определяется из уравнения расхода

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_0 = \int_0^R 2\pi r V(r) dr \ . \qquad (8)$$

Для ламинарного течения с квадратичным профилем скорости это равенство приводит к связи

$$V_0 = \frac{u_*}{4} Re_* \ . \qquad (9)$$

Для турбулентного течения в случае гидравлически гладкого трубопровода имеем

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_0 = 2\pi u_* Re_* \int_{R-\delta_л}^{R} r(1 - \frac{r}{R}) dr + 2\pi u_* \int_0^{R-\delta_л} r(A \ln Re_* (1 - \frac{r}{R}) + B) dr \ . \quad (10)$$

В результате интегрирования получим соотношение

$$V_0 = u_* \left\{ (1 - \bar{\delta}_л)^2 (A \ln Re_* + B) - A \left[(2\bar{\delta}_л - \bar{\delta}_л^2) \ln \bar{\delta}_л + \frac{1}{2}(3 - 4\bar{\delta}_л + \bar{\delta}_л^2) \right] \right\} +$$

$$+ u_* (\frac{1}{3} Re_* (3\bar{\delta}_л^2 - 2\bar{\delta}_л^3)) \ . \qquad (11)$$

Таким образом, для трубопровода с фиксированным диаметром и заданной вязкостью (то есть с заданным составом газа и температурой) между средней расходной скоростью V_0 и динамической скоростью u_* имеется взаимно однозначная зависимость, которая может быть представлена в виде (11). Эта зависимость в общем случае может трактоваться как зависимость типа

$$V_0 = u_* f(Re_*) \ ,$$

поскольку кинематическая вязкость в неё входит только в комбинации $Re_* = \frac{u_* R}{\nu}$.

Для случая турбулентного течения с влиянием шероховатости (то есть при условии $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 4$) связь между расходной скоростью V_0 и динамической скоростью u_* будет выражаться зависимостью

$$V_0 = u_* \left\{ (1-\overline{\delta}_л)(B_1 - A \ln \overline{\Delta}) - A\left[(2\overline{\delta}_л - \overline{\delta}_л^{\,2}) \ln \overline{\delta}_л + \frac{1}{2}(3 - 4\overline{\delta}_л + \overline{\delta}_л^{\,2}) \right] \right\} +$$

$$+ u_* Re_* \overline{\delta}_л^{\,2} (1 - \frac{2}{3}\overline{\delta}_л), \qquad (12)$$

где $\overline{\Delta} = \dfrac{\Delta}{R}$ – относительная шероховатость внутренней поверхности трубопровода. При этом, поскольку $B_1 = B_1(\dfrac{u_* \Delta}{\nu}) = B_1(Re_* \overline{\Delta})$, то предыдущая зависимость имеет принципиально вид

$$V_0 = u_* f(Re_*, \overline{\Delta}).$$

Формулы (11) и (12) являются прямым следствием двучленных формул для профиля скорости в турбулентном потоке.

Заметим, что если воспользоваться формулой (3), то на формулы (11) и (12) можно смотреть как на один из вариантов закона гидравлического сопротивления

$$\lambda = F(Re, \overline{\Delta}).$$

Поэтому в качестве зависимости между V_0 и u_* (кроме указанных формул (11) и (12)), может быть использована совместно с формулой (3) любая известная теоретическая, эмпирическая или полуэмпирическая зависимостью от числа Рейнольдса коэффициента $\lambda = \lambda(Re)$ (если речь идет о гидравлически гладком трубопроводе), или зависимостью $\lambda = \lambda(Re, \overline{\Delta})$ (если речь идет о трубопроводе шероховатом).

В самом деле, в силу (3) имеем

$$u_* = \sqrt{\frac{1}{8} \lambda(Re, \overline{\Delta})} V_0.$$

Поскольку $Re = \dfrac{DV_0}{\nu}$, то последнее выражение можно рассматривать как функцию, выражающую V_0 явно или неявно через u_* (а также $\overline{\Delta}$) при заданном диаметре и фиксированной вязкости.

Например, для гидравлически гладкого трубопровода в диапазоне $4 \cdot 10^3 \le Re \le 10^5$ в качестве зависимости $\lambda = \lambda(Re)$ хорошо работает формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}},$$

откуда для взаимосвязи между V_0 и u_* получаем выражение

$$u_* = 0{,}1989 \left(\frac{\nu}{D} \right)^{1/8} V_0^{7/8}.$$

Поле скорости в измерительной плоскости ультразвукового измерителя скорости. Спецификой определения расходной скорости V_0 в трубопроводе при помощи ультразвукового измерителя является не непосредственное измерение этой величины, а косвенное; фактически непосредственно производится измерение средней скорости потока $V_{cp}(\overline{a})$ вдоль измерительных лучей в некоторой измерительной плоскости, находящейся на расстоянии h от диаметральной плоскости, и требуется найти алгоритм пересчета замеренной величины $V_{cp}(\overline{a})$ на требуемую величину V_0.

При использовании для определения скорости потока ультразвуковых измерителей измерительная плоскость (продольная плоскость, параллельная оси трубопровода и проходящая через источник и приемник звука) не обязательно совпадает с диаметральной плоскостью трубопровода.

Пусть точка А является источником, а точка В – приемником звукового сигнала. Проведем через эти точки измерительную плоскость П. Расстояние между поперечным сечением трубопровода, в котором находится излучатель и поперечным сечением, в котором находится приемник, обозначим через l и будем называть базой измерения. Расстояние между источником и приемником звука обозначим через L. Имеем: $l = L\cos\alpha$, где через α обозначен угол наклона измерительного луча (линии АВ, соединяющей источник звука с приемником) к оси трубопровода. Введем величину a:

$$a^2 = R^2 - h^2 \ ,$$

или

$$\overline{a}^2 = 1 - \overline{h}^2 , \tag{13}$$

где $\overline{a} = \dfrac{a}{R}, \ldots \overline{h} = \dfrac{h}{R}$ и h – расстояние от измерительной плоскости до оси трубопровода.

Выразим поле скоростей в измерительной плоскости, в частности, на луче АВ, через поле скорости в поперечном сечении трубопровода.

Из геометрических соображений следует, что расстояние любой точки $P(x)$, расположенной на прямой АВ, до оси равно

$$r = \sqrt{h^2 + (a + \frac{2a}{l}(x - l))^2} \ . \tag{14}$$

где x – расстояние вдоль оси трубопровода от поперечного сечения, в котором находится источник звука, до текущего поперечного сечения, в котором находится точка $P(x)$. Подставив в эту формулу выражение (13), получим зависимость

$$r = R\sqrt{1 + 4\overline{a}^2\overline{x}(\overline{x} - 1)} \ . \tag{15}$$

Таким образом, поскольку в цилиндрическом трубопроводе при стабилизированном ламинарном или турбулентном течении поле скоростей представляет собой функцию только от r, $V = V(r)$, то в измерительной плоскости П, расположенной на расстоянии h от оси трубопровода, поле скоростей на луче АВ можно представить как функцию координаты $\overline{x}$ в виде

$$V = V(R\sqrt{1 + 4\overline{a}^2\overline{x}(\overline{x} - 1)}) \ . \tag{16}$$

Обозначим скорость звука через c. Согласно термодинамическим понятиям $c = \sqrt{\kappa R_0 T}$, где T – статическая температура, R_0 – газовая постоянная, $\kappa = \dfrac{c_p}{c_v}$ и c_p и c_v – теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме. При адиабатическом процессе имеет место зависимость

$$T_0 = T(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M^2) \ ,$$

где М – местное значение числа Маха, T_0 – температура торможения потока.

Рассматриваемый класс измерителей рассчитан на диапазон средних скоростей потока от 0,1 до 25 м/сек, так что при скорости звука порядка 300 – 400 м/сек и выше число Маха в потоке составляет не более, чем М=0,08. Но тогда из выше приведенной формулы следует, что изменением температуры по поперечному сечению за счет неравномерности поля скорости (и вообще эффектом сжимаемости газа в таком диапазоне скоростей) можно пренебречь, поскольку величина $\frac{\kappa-1}{2}M^2$ составляет не больше, чем 0,001.

Таким образом, скорость звука можно считать величиной, постоянной по поперечному сечению, которая определяется заданным составом газа и заданной внешней температурой.

Вычислим промежуток времени движения звукового сигнала от источника к приемнику. При рассмотрении распространения звукового сигнала будем пользоваться методом геометрической акустики, а именно: будем считать, что звуковой сигнал распространяется прямолинейно по лучу АВ от источника к приемнику. При этом, поскольку скорость звука представляет собой скорость перемещения возмущения от частицы газа к частице, то при движении сигнала от излучателя А к приемнику В, расположенному вверх по потоку наискосок, фактическое перемещение звукового сигнала по отношению к трубе будет происходить со скоростью

$$c_1 = c - V(x)cos\alpha \ , \tag{17}$$

где $V(x)$ – скорость газа в сечении x на измерительном луче в измерительной плоскости на пути движения от А до В. Эта величина изменяется в зависимости от координаты x и определяется формулой (16).

Абсолютное перемещение импульса ds за время dt равно $ds = c_1 dt,$ причем $dx = -\,ds cos\alpha,$ так что

$$dt = -\frac{dx}{cos\,\alpha(c - V\,cos\,\alpha)}\,.$$

Полное время движения сигнала от излучателя А к приемнику В, расположенному вверх по потоку, равно

$$t_1 = -\int_l^0 \frac{dx}{cos\,\alpha(c - V\,cos\,\alpha)} = \frac{1}{c\,cos\,\alpha}\int_0^l \frac{dx}{1 - \frac{V}{c}cos\,\alpha}\,. \tag{18}$$

Аналогично, если источником сигнала служит точка В, а приемником – точка А, расположенная вниз по потоку, то время движения сигнала от В к А будет равно

$$t_2 = \frac{1}{c\,cos\,\alpha}\int_0^l \frac{dx}{1 + \frac{V}{c}cos\,\alpha}\,. \tag{19}$$

Возможность выноса величины c в выражениях (18) и (19) за знак интеграла определяется тем, что эта скорость, согласно приведенной выше оценке, не изменяется по поперечному сечению.

Вычисление интегралов (18) и (19) в принципе может быть осуществлено численно (и даже аналитически, например, для ламинарного течения), но для этого необходимо наперед знать величину скорости звука. Причем, при таком подходе алгоритм определения расходной скорости течения по результатам замеров величин t_1 и t_2 становится чрезвычайно сложным.

Указанной сложности можно избежать, если воспользоваться разложением подынтегральных выражений в интегралах (18) и (19) в ряды Тейлора. При этом удается разработать такую процедуру определения скорости V_0, которая не требует предварительного знания скорости звука; более того, как оказалось, при использовании указанных разложений результаты замеров t_1 и t_2 позволяют одновременно определить и расходную скорость потока V_0 и реальную скорости звука в газе c.

В самом деле, в исследуемом диапазоне скоростей и температур в диапазоне $-20 < t^\circ C < +40$, в котором скорость звука имеет порядок 300 – 400 м/сек, в любой точке поперечного сечения потока величина $\varepsilon = \frac{V}{c} cos\,\alpha$ не превышает значения 0.1, в связи с чем подынтегральные функции в выражениях (18) и (19) можно разложить в ряды Тейлора:

$$\frac{1}{1-\frac{V}{c}cos\,\alpha} = 1 + \frac{V\,cos\,\alpha}{c} + \left(\frac{V\,cos\,\alpha}{c}\right)^2 + \left(\frac{V\,cos\,\alpha}{c}\right)^3 + \ldots \qquad (20)$$

$$\frac{1}{1+\frac{V}{c}cos\,\alpha} = 1 - \frac{V\,cos\,\alpha}{c} + \left(\frac{V\,cos\,\alpha}{c}\right)^2 - \left(\frac{V\,cos\,\alpha}{c}\right)^3 + \ldots \qquad (21)$$

Подчеркнем, что при использовании указанных отрезков рядов (20) и (21) погрешность имеет порядок ε^4, то есть не превышает 10^{-4}.

В результате подстановки указанных рядов в (18) и (19) для промежутков времени движения сигнала вверх и вниз по потоку будем иметь такие выражения:

$$t_1 = \frac{L}{c}\left[1 + \frac{cos\,\alpha}{c}J_1 + \left(\frac{cos\,\alpha}{c}\right)^2 J_2 + \left(\frac{cos\,\alpha}{c}\right)^3 J_3\right], \qquad (22)$$

$$t_2 = \frac{L}{c}\left[1 - \frac{cos\,\alpha}{c}J_1 + \left(\frac{cos\,\alpha}{c}\right)^2 J_2 - \left(\frac{cos\,\alpha}{c}\right)^3 J_3\right], \qquad (23)$$

где введены обозначения

$$J_1 = \int_0^1 V(\bar{x})d\bar{x}, \ldots J_2 = \int_0^1 V^2(\bar{x})d\bar{x}, \ldots J_3 = \int_0^1 V^3(\bar{x})d\bar{x} \ . \qquad (24)$$

Величина интеграла

$$J_1 = \int_0^1 V(\bar{x})d\bar{x} = V_{cp}(\bar{a}),$$

где $V(\bar{x})$ определяется формулой (16), представляет собой среднюю скорость потока вдоль измерительного луча от источника звука до приемника, которую будем в дальнейшем обозначать как V_{cp}. Эта величина (кроме всего прочего) зависит от выбранной плоскости измерения, то есть от $\bar{a}$ (или от $\bar{h}$), так что $V_{cp} = V_{cp}(\bar{a})$, но, вообще говоря, величина V_{cp} не совпадает с расходной скоростью, то есть $V_{cp} \neq V_0$.

Времена t_1 *и* t_2 фиксируются (с некоторой инструментальной погрешностью) системой измерения прибора.

Традиционно в технике измерений скорости газа при помощи ультразвуковых измерителей пользуются обратными временами $1/t_1$ *и* $1/t_2$. Поэтому рассмотрим методику определения расходной скорости и скорости звука в трубопроводе через обратные величины $1/t_1$ и $1/t_2$ при использовании разложений (22) и (23). Обращая разложения (22) и (23), получим следующие представления для обратных величин:

$$\frac{1}{t_1}=\frac{c}{L}\left[1-\xi_1\frac{\cos\alpha}{c}+\xi_2\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^2-\xi_3\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^3\right], \tag{25}$$

$$\frac{1}{t_2}=\frac{c}{L}\left[1+\xi_1\frac{\cos\alpha}{c}+\xi_2\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^2+\xi_3\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^3\right], \tag{26}$$

где введены такие обозначения:

$$\xi_1=J_1,\ldots\xi_2=J_1^2-J_2,\ldots\xi_3=J_3-2J_1J_2+J_1^3\ . \tag{27}$$

Составим из обратных величин замеренных временных промежутков t_1 и t_2 (для фиксированных параметров L и α) два числа

$$N_1=\frac{L}{2}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)\ \text{ и }\ N_2=\frac{L}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right). \tag{28}$$

Величины N_1 и N_2 – два основных экспериментальных параметра, которыми приходится оперировать, если проводятся замеры обратных времен движения сигнала вверх по потоку и вниз по потоку на одной и той же базе l при одном и том же угле α. Комбинируя представления (25) и (26), получим

$$N_1=c\left[1+\xi_2\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^2\right], \tag{29}$$

$$N_2=\xi_1\left[1+\frac{\xi_3}{\xi_1}\left(\frac{\cos\alpha}{c}\right)^2\right]. \tag{30}$$

Подчеркнем, что формулы (29) и (30) справедливы вплоть до четвертого порядка относительно малого параметра ε.

Систему (29) и (30) можно рассматривать как систему двух уравнений для определения динамической скорости u_* (или расходной скорости V_0) и скорости звука c через два экспериментально определяемых параметра N_1 и N_2. При этом, как видно из уравнения (29), скорость звука из этой системы можно исключить. Действительно, равенство (29) представляет собой уравнение второго порядка относительно c, откуда имеем

$$c=\frac{1}{2}\left(N_1+\sqrt{N_1^2-4\xi_2\cos^2\alpha}\right). \tag{31}$$

Подставляя это выражение в (30), придем к уравнению для определения скорости u_* (или V_0, поскольку между V_0 и u_* имеется однозначная взаимосвязь, например, в виде формулы (11) и (12)). Это уравнение принимает вид

$$N_2 = \xi_1 \left[1 + \frac{\xi_3}{\xi_1} \frac{4 cos^2 \alpha}{\left(N_1 + \sqrt{N_1^2 - 4\xi_2 cos^2 \alpha} \right)^2} \right]. \quad (32)$$

Уравнение (32), вообще говоря, является трансцендентным. Принципиально для его решения следует применять или метод Ньютона или метод последовательных приближений. После того, как из уравнения (32) определена величина u_*, по формуле (31) можно произвести вычисление уточненного значения скорости звука.

Таким образом, при указанном подходе (то есть при использовании разложения по Тейлору) знание величины скорости звука не является необходимым для вычисления скорости потока по результатам замеров. Более того, скорость звука сама вычисляется по результатам замеров N_1 и N_2 и может использоваться для контроля состава газа или его температуры.

Отметим еще одно преимущество использования рядов Тейлора для определения величины u_* и скорости звука по сравнении с использованием исходных формул (18) и (19): при использовании разложений (20) и (21) вычисление интегралов (24) можно провести численно предварительно, не зная фактической величины скорости звука, тогда как использование исходных выражений (18) и (19) не позволяет провести предварительное интегрирование без заблаговременного знания величины скорости звука.

Ниже будет показано, что в исследованном диапазоне скоростей во всех разложениях достаточно ограничиться только первым приближением, благодаря чему процедура определения расходной скорости (или динамической скорости) значительно упрощается.

Определение расходной скорости потока через среднюю скорость вдоль измерительного луча. Интегралы J_1, J_2, J_3 удобно представить в виде

$$J_1 = \int_0^1 V(\overline{x})d\overline{x} = u_* f_1(u_*), \ J_2 = \int_0^1 V^2(\overline{x})d\overline{x} = u_*^2 f_2(u_*), \ J_3 = \int_0^1 V^3(\overline{x})d\overline{x} = u_*^3 f_3(u_*) .$$

Все указанные интегралы могут быть вычислены численно (и даже аналитически) наперед и представлены как функции параметра u_*, поскольку при фиксированных значениях диаметра трубопровода и кинематической вязкости величины f_1, f_2, f_3 являются функциями только от динамической скорости u_* (и, в конечном итоге, от скорости V_0). Как будет показано ниже, в указанном диапазоне скоростей для определения расходной скорости необходим только интеграл J_1, который представляет среднюю скорость потока вдоль звукового луча от источника до приемника $V_{cp} = V_{cp}(\overline{a})$.

Если ввести еще обозначения:

$$\xi_2 = u_*^2 (f_1^2 - f_2) = u_*^2 f_4(u_*), \ \xi_3 = u_*^3 (f_3 - 2f_1 f_2 + f_1^3) = u_*^3 f_5(u_*),$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = u_*^2 \frac{f_5(u_*)}{f_1(u_*)} = u_*^2 f_6(u_*),$$

то в результате система уравнений (29), (30) сведется к виду

$$N_1 = c \left[1 + f_4(u_*) \frac{u_*^2 cos^2 \alpha}{c^2} \right], \ N_2 = u_* f_1(u_*) \left[1 + f_6(u_*) \frac{u_*^2 cos^2 \alpha}{c^2} \right]. \quad (33)$$

Были выполнены обширные расчеты всех функций, входящих в уравнения (33). При этом широко варьировался коэффициент кинематической вязкости (на порядок в одну и другую сторону от вязкости метана при нормальных условиях), расходная скорость потока в диапазоне 0.1 – 40 м/сек, диаметр трубопровода D =0.08 – 0.2 м, и параметр $\overline{a}$ =0.5 – 1.0. В результате оказалось, что функция f_4 не превышает величины 20, а функция f_6 не превышает величины 10 (эти функции безразмерные). Кроме того, в рассматриваемом диапазоне скоростей V_0 динамическая скорость не превышает величины $1{,}5 м/с$, так что справедливы следующие оценки (даже если выбрать заниженное значение скорости звука $c \approx 300 м/с$):

$$f_4 \cos^2 \alpha \frac{u_*^2}{c^2} < 2 \cdot 10^{-4}, \quad f_6 \cos^2 \alpha \frac{u_*^2}{c^2} < 10^{-4} .$$

Из приведенных оценок следует, что с погрешностью, не превышающей 0,05 % квадратичными слагаемыми в выражениях (33) можно пренебречь, так что окончательные формулы для определения расходной скорости потока и скорости звука в потоке и принимают вид:

$$V_{cp}(\overline{a}) = u_* f_1(u_*, \overline{a}) = N_2 \tag{34}$$

$$c = N_1 . \tag{35}$$

Выражение (34) целесообразно записать в виде

$$u_* = \frac{N_2}{f_1(u_*, \overline{a})}, \tag{36}$$

который удобен для определения величины u_* через N_2 методом последовательных приближений, поскольку функция $f_1(u_*, \overline{a})$ может быть определена или численным интегрированием или в аналитическом виде в зависимости от u_* и $\overline{a}$.

Аналитические выражения для средней скорости потока вдоль измерительного луча. Теоретическое значение величины $V_{cp}(\overline{a})$ для ламинарного течения получается путем использования формул (1) и (16) и равно

$$V_{cp}(\overline{a}) = \frac{4}{3} \overline{a}^2 V_0 . \tag{37}$$

Точное теоретическое значение средней скорости $V_{cp}(\overline{a})$ вдоль измерительного луча при турбулентном течении для гидравлически гладкого трубопровода с двучленным полем скорости (5) и (6) имеет следующий вид:

а) в случае, когда $0 < h < R - \delta_л$,

$$V_{cp}(\overline{a}) = u_* f_1(Re_*, \overline{a}) = \frac{u_*}{\overline{a}} \{ (A \ln Re_* + B) \phi(\overline{\delta}_л) +$$

$$+ A[\phi(\overline{\delta}_л)(\ln \overline{\delta}_л - 1) + \ln \frac{1 - \overline{\delta}_л - \phi(\overline{\delta}_л)}{\overline{h}} + \overline{a} \ln \frac{\overline{a}\phi(\overline{\delta}_л) + \overline{a}^2 - \overline{\delta}_л}{\overline{\delta}_л \overline{h}}] +$$

$$+ \frac{1}{2} Re_* [\overline{a} - (1 + \overline{\delta}_л)\phi(\overline{\delta}_л) + (1 - \overline{a}^2) \ln \frac{1 - \overline{\delta}_л + \phi(\overline{\delta}_л)}{1 + \overline{a}}]\}, \tag{38}$$

где

$$Re_* = \frac{Ru_*}{\nu}, \phi(\overline{\delta}_л) = \sqrt{\overline{\delta}_л^{\,2} - 2\overline{\delta}_л + \overline{a}^2}, \overline{a}^2 = 1 - \overline{h}^2 .$$

б) в случае $\overline{h} = 0\,(\overline{a} = 1)$:

$$V_{cp}\Big|_{\overline{a}=1} = u_*\{(1-\overline{\delta}_л)(A\ln Re_* + B) - A(1-\overline{\delta}_л + \overline{\delta}_л \ln\overline{\delta}_л) + \frac{1}{2} Re_* \overline{\delta}_л^{\,2}\} \tag{39}$$

в) в случае, когда $\delta_л \geq R - h$

$$V_{cp}(\overline{a}) = \frac{u_* Re_*}{2\overline{a}}\left[\overline{a} + (1-\overline{a}^2)\ln\sqrt{\frac{1-\overline{a}}{1+\overline{a}}}\right]. \tag{40}$$

Если проявляется шероховатость стенок трубопровода, то выражения для $V_{cp}(\overline{a})$ имеют следующий вид

а) при $0 < h < R - \delta_л$:

$$V_{cp}(\overline{a},\overline{\Delta}) = u_* f_1(Re_*,\overline{a},\overline{\Delta}) = \frac{u_*}{\overline{a}}\{(B_1 - A\ln\overline{\Delta})\phi(\overline{\delta}_л) +$$

$$+ A[\phi(\overline{\delta}_л)(\ln\overline{\delta}_л - 1) + \ln\frac{1-\overline{\delta}_л - \phi(\overline{\delta}_л)}{\overline{h}} + \overline{a}\ln\frac{\overline{a}\phi(\overline{\delta}_л) + \overline{a}^2 - \overline{\delta}_л}{\overline{\delta}_л \overline{h}}] +$$

$$+\frac{1}{2}Re_*[\overline{a} - (1+\overline{\delta}_л)\phi(\overline{\delta}_л) + (1-\overline{a}^2)\ln\frac{1-\overline{\delta}_л + \phi(\overline{\delta}_л)}{1+\overline{a}}]\} , \tag{41}$$

б) при $\overline{h} = 0\,(\overline{a} = 1)$:

$$V_{cp}(\overline{a},\overline{\Delta})\Big|_{\overline{a}=1} = u_*\{(1-\overline{\delta}_л)(B_1 - A\ln\overline{\Delta}) - A(1-\overline{\delta}_л + \overline{\delta}_л\ln\overline{\delta}_л) + \frac{1}{2}Re_*\overline{\delta}_л^{\,2}\}. \tag{42}$$

в) в случае $\delta_л \geq R - h$ выражение $V_{cp}(\overline{a})$ для шероховатого трубопровода имеет формально тот же самый вид, что и для гладкого, то есть (40).

Выводы. Из приведенных оценок следует, что в рассмотренном диапазоне скоростей для определения средней скорости потока $V_{cp}(\overline{a})$ вдоль измерительного луча ультразвукового измерителя достаточно ограничиться приближением

$$t_1 = \frac{L}{c}\left[1 + \frac{\cos\alpha}{c}V_{cp}(\overline{a})\right], \quad t_2 = \frac{L}{c}\left[1 - \frac{\cos\alpha}{c}V_{cp}(\overline{a})\right]$$

и соответственно

$$\frac{1}{t_1} = \frac{c}{L}\left[1 - \frac{\cos\alpha}{c}V_{cp}(\overline{a})\right], \quad \frac{1}{t_2} = \frac{c}{L}\left[1 + \frac{\cos\alpha}{c}V_{cp}(\overline{a})\right].$$

В этом случае будем иметь:

$$c = N_1,$$
$$V_{cp}(\overline{a}) = N_2, \tag{43}$$

где числа N_1 и N_2 определяются согласно формуле (28).

Для ламинарного течения в соответствии с (37)

$$V_{cp}(\overline{a}) = \frac{4}{3}V_0\overline{a}^2,$$

так что для ламинарного режима величина расходной скорости V_0 определяется непосредственно через величину $V_{cp}(\overline{a}) \equiv N_2$:

$$V_0 = \frac{3N_2}{4\overline{a}^2} = \frac{3N_2}{4(1-\overline{h}^2)},$$

найденную по результатам замеров в любой измерительной плоскости (при любом значении $\overline{a}$), независимо от фактического числа Рейнольдса, лишь бы соблюдался параболический профиль скорости.

В случае турбулентного режима по результатам замера в соответствии с формулой (43) определяется только величина средней скорости $V_{cp}(\overline{a})$ вдоль измерительного луча (в заданной измерительной плоскости), а для определения расходной скорости V_0 необходимо выполнить следующую процедуру:

а) сначала по экспериментально найденной величине $V_{cp}(\overline{a}) \equiv N_2$ необходимо разрешить относительно u_* уравнение (36)

$$u_* f_1(Re_*, \overline{a}) = V_{cp}(\overline{a})$$

при заданных значениях R, ν и $\overline{a}$, воспользовавшись полученными выше выражениями для $V_{cp}(\overline{a})$;

б) затем по найденной величине u_* из формулы (11) (или, в более общем случае, из формулы типа (12)) определить расходную скорость V_0.

Подчеркнем, что такой расчет может быть выполнен лишь при том условии, что заранее известно число $Re_* = \dfrac{Ru_*}{\nu}$ (то есть, когда при заданном диаметре трубопровода известен коэффициент кинематической вязкости), поскольку функция f_1 зависит от u_* только через посредство числа Re_*.

Библиографические ссылки

1. **Шлихтинг Г**. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг – М., 1969. – 742 с.
2. **Емцев Б.Т.** Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев – М., 1978. – 464 с.
3. **Идельчик И.Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик – М., 1975. – 560 с.

Надійшла до редколегії 02.12.09

УДК 532.5 + 523.9

В.І. Перехрест, М.М. Осипчук
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО СТРУКТУРИ ПЛАНЕТАРНИХ ВИХОРІВ І ЗАКОНОМІРНОСТІ ЇХ ОБЕРТАННЯ