УДК 551.509

Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ ГОРОДСКИХ ЛАБИРИНТОВ

Предложена фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере больших городов с плотной и высотной застройкой городских лабиринтов. Получена система дифференциальных уравнений фильтрационной модели приземного и пограничного слоя атмосферы , уравнение распространения загрязняющей примеси в условиях городского лабиринта.

Ключевые слова: распространение загрязнений в атмосфере, атмосфера больших городов, математические модели распространения загрязнений.

Запропоновано фільтраційну модель розповсюдження забруднюючих домішок в атмосфері великих міст зі щільною та висотною забудовою міських лабіринтів. Отримано систему диференціальних рівнянь фільтраційної моделі приземного та пограничного шарів атмосфери, рівняння поширення забруднюючої домішки в умовах міського лабіринту.

Ключові слова: розповсюдження забруднень в атмосфері, атмосфера великих міст, математичні моделі розповсюдження забруднень.

The filtration model of the distribution of pollutions in the atmosphere of the big cities with dense and tall building up of city labyrinths was proposed. The system of differential equation of surface air and boundary layer atmosphere filtration model was calculated as well as the equation of contaminant distribution in city labyrinth conditions.

Keyword: the distribution of pollutions in the atmosphere, the big city atmosphere, the mathematic model of contaminants distribution.

Введение. Проблема загрязнения атмосферы больших городов, крупных промышленных центров, т. н. мегаполисов, является одной из важнейших проблем современной экологической науки [1, 2]. Наиболее опасная ситуация с атмосферными загрязнениями складывается в больших городах в районах плотной и высокой застройки, т.н. «городских лабиринтах», что обусловлено в первую очередь резким ухудшениям проветривания этих территорий, больших концентрацией автомобильного транспорта, наличием промышленных и коммунальных предприятий с их многочисленными источниками вредных для здоровья человека выбросов в атмосферу.

Плотная высотная застройка в значительной степени осложняет возможность расчётного определения поля скоростей ветра в условиях городского лабиринта, т. к. городские здания и сооружения являются, как правило, плохообтекаемыми объектами. При обтекании воздушным потоком одного отдельно взятого здания образуется заторможенный поток в окрестности лобовой части препятствия, ускоренный поток на боковых поверхностях и над крышей, отрывные вихревые течения на тыльной стороне объекта с образованием застойных зон сложной конфигурации. Чтобы определить расчетным путем такое поле скоростей ветра необходимо численно проинтегрировать систему уравнений гидродинамики турбулентного течения, затратив на это несколько десятков часов непрерывной работы компьютера. Но ведь в городском лабиринте имеются сотни, а то и тысячи зданий и сооружений, каждое из которых изменяет скорость ветра, как по величине, так и по направлению. Задача становится практически неразрешимой. А без знания поля скоростей ветра невозможно определить расчетным путем поле концентраций и характер распространения загрязняющих примесей в атмосфере городского лабиринта.

В настоящей работе предлагается фильтрационная модель расчета распространения атмосферных загрязнений в городском лабиринте. Она основана на предположении о существовании аналогии между течением воздушных масс в условиях городского лабиринта и течением жидкостей и газов в порах грунтов и трещинах скальных пород. Такие течения изучаются в теории фильтрации [3]. Дело в том, что в естественных условиях поры пластов грунта и трещины скальных пород имеют чрезвычайно сложные очертания. Это практически исключает возможность точного расчетного определения скорости жидкости в каждой конкретной точке пор или трещины. Однако в теории фильтрации вводится понятие т. н. фильтрационного поля скоростей жидкости, на основе которого решаются все теоретические и практические задачи. Аналогичный подход предлагается использовать и в условиях городского лабиринта.

Основные понятия и определения фильтрационной модели. Введем понятие пор и скелета городского лабиринта. Под парами городского лабиринта будем понимать пустоты между знаниями и различного рода сооружениями, в том числе улицы, переулки, дворы и т. д., а под скелетом – собственно сами эти здания и сооружения.

Определим коэффициент плотности застройки городского лабиринта – аналог коэффициента пористости для грунтов и скальных пород в теории фильтрации [3], в виде

$$m = \frac{W'}{W}, \ 0<m<1, \tag{1}$$

где W' – пространственный объем всех пустот лабиринта; W – полный пространственный объём всего массива лабиринта.

Выберем в пространстве городского лабиринта, состоящем из пор и скелета, произвольную площадку ΔS, малую по сравнению с площадью подстилающей поверхности самого лабиринта. Вместе с тем её размеры достаточно велики по сравнению со средней площадью поперечного сечения пор и элементов скелета (зданий) лабиринта. Пусть объёмный расход воздуха через эту площадку ΔQ, (м^3/с) равен действительному расходу воздуха, осуществляемому через поры площадки. Тогда под скоростью фильтрационного потока воздуха в городском лабиринте $\vec{V}$, (м/с), будем понимать скорость, постоянную в пределах площадки ΔS, определяемую соотношением

$$\vec{V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \tag{2}$$

а под средней скоростью воздуха в порах лабиринта, при действительном расходе ΔQ, скорость

$$\vec{V}* = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta S} = \frac{1}{m} \cdot \vec{V}. \tag{3}$$

Фильтрационный поток воздуха с полем скоростей $\vec{V}$ является некоторым фиктивным усреднённым потоком, непрерывно заполняющим всё пространство городского лабиринта, включая объёмы пор и скелета. Однако скелет оказывает активное воздействие на этот поток через силы сопротивления $\vec{R}$, возникающие при реальном обтекании городских зданий и сооружений и включающие в себя силы сопротивления давления и трения. Если в пространстве городского лабиринта выделить элементарный объём $d\tau$, включающий в себя площадку ΔS и состоящий из объема пор $md\tau$ и объема скелета $(1-m)d\tau$, то при достаточно плотной застройке лабиринта выделенный объём будет включать в себя большое число элементов скелета. В таком случае можно полагать, что силы сопротивления $\vec{R}$ распределены внутри объема $d\tau$ равномерно и допустить, что они пропорциональны величине $d\tau$. Таким образом, упомянутые силы можно рассматривать как силы объемные или массовые.

Аналогично (2), (3) в атмосфере городского лабиринта необходимо ввести понятия фильтрационных полей температуры и концентрации атмосферной загрязняющей примеси. Через выделенную ранее площадку ΔS осуществляется не только действительный реальный расход воздуха ΔQ, но и действительные реальные расходы тепла ΔQ_T, (кДж/с), и атмосферной загрязняющей примеси ΔQ_ϕ, (кг/с). Тогда под фильтрационным полем температуры в атмосфере городского лабиринта будем понимать температуру, постоянную в пределах площадки ΔS и определенную соотношением

$$T = \frac{\Delta Q_T}{\Delta Q'_{TK}}, \tag{4}$$

где $\Delta Q'_{TK} = \Delta Q'_{TK} = \rho c_p \Delta Q$, (кДж/(град·с)) – удельный, отнесённый к единице температуры, действительный конвективный расход тепла через площадку ΔS; ρ – плотность воздуха, (кг/м^3); c_p – удельная теплоёмкость воздуха, (кДж/(кг·град)).

Средняя температура воздуха в порах городского лабиринта, при действительном расходе тепла ΔQ_T, определяется соотношением

$$T^* = \frac{\Delta Q_T}{m\Delta Q'_{TK}} = \frac{1}{m} T, \tag{5}$$

а средняя температура каркаса

$$T_1^* = \frac{\Delta Q_T}{(1-m)\Delta Q'_{TK}} = \frac{1}{1-m} T = \frac{m}{1-m} T^*. \tag{6}$$

Фильтрационное поле концентрации загрязняющей примеси в атмосфере городского лабиринта определим как концентрацию, постоянную в пределах площадки ΔS, соотношением

$$\phi = \frac{\Delta Q_\phi}{\Delta Q}, \tag{7}$$

где ϕ – объёмная концентрация загрязняющей примеси, (кг/м^3).

Средняя концентрация примеси в порах лабиринта, или действительном расходе примеси ΔQ_ϕ, определяется соотношением

$$\phi^* = \frac{\Delta Q_\phi}{m\Delta Q} = \frac{1}{m}\phi, \tag{8}$$

а средняя концентрация примеси в каркасе

$$\phi_1^* = \frac{\Delta Q_\phi}{(1-m)\Delta Q} \approx 0, \tag{9}$$

в силу того, что, в отличие от грунтов, процессы сорбции примеси на объектах городских сооружений пренебрежимо малы.

Как и фильтрационное поле скорости ветра (2), фильтрационное поля температуры (4) и загрязняющей примеси (7) являются фиктивными усредненными полями, непрерывным образам покрывающими все пространства городского лабиринта, включая объемы пор и скелета.

Фильтрационная математическая модель. Введём декартову прямоугольную систему координат *Oxyz* таким образом, чтобы она была правой, начало – точка *O*, находилась в центре городского лабиринта, оси *Ox*, *Oy* лежали на подстилающей земной поверхности, а ось *Oz* – перпендикулярна ей и направлена вверх. Кроме того, будем считать, что направление оси *Ox* совпадает с направлением скорости ветра вдали от территории городского лабиринта, т.е. при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Характерный горизонтальный масштаб территории городского лабиринта *L*, с учётом примыкающих к нему территорий, на которые распространяется его атмосферное влияние, будем считать значительно превосходящим среднюю высоту пограничного слоя атмосферы над лабиринтом $H_1 \approx 1\,\text{км}$ [1], а подстилающую поверхность, для простоты – плоской, $z=0$.

Ограничившись верхней границей пограничного слоя атмосферы $z = H_1$, будем считать, что воздух в атмосфере городского лабиринта представляет собой практически несжимаемую $(\rho \approx const)$, но неизотермическую $(T \neq const)$ среду.

Воздушные массы городского лабиринта движутся в его порах. Выделим элементарный объём пор $md\tau$ и рассмотрим баланс сил, действующих на воздух в этом объёме. Имеем

$$m\rho \frac{d\vec{V}^*}{dt} d\tau = \left[-grad\, P + m\rho \left(\vec{F}_g + \vec{R} + \vec{F}_{пл} \right) \right] d\tau\,, \tag{10}$$

где t – время, (с); P – давление, (Па); $\vec{F}_g$, $\vec{R}$, $\vec{F}_{пл}$ – удельные, отнесённые к единице массы воздуха, плотности сил тяжести, сопротивления твёрдого каркаса, плавучести, (м/с^2).

Плотность сил тяжести в атмосфере равна

$$\vec{F}_g = -grad(gz)\,, \tag{11}$$

где g – ускорение земного тяготения (≈9,81 м/с^2).

Течение воздушных масс в порах городского лабиринта существенно турбулентное и, согласно [3], сила сопротивления каркаса в этом случае пропорциональная квадрату скорости фильтрации. Определим ее плотность в виде

$$\vec{R} = -gB\left|\vec{V}\right|\vec{V}\,, \tag{12}$$

где B – эмпирический коэффициент, зависящий от характерных размеров городских сооружений и вязкости воздуха, (с/м)^2.

При умеренных перепадах температуры плотность силы плавучести определяется выражением [4]:

$$\vec{F}_{пл} = -g\left(\beta \Delta T\right)\vec{k}\,, \tag{13}$$

где β коэффициент объемного термического расширения воздуха, 1/^{0}К; $\Delta T = T - T_0$ – избыточная фильтрационная температура воздуха над уровнем подстилающей поверхности, (^{0}К); $\vec{k}$ – орт оси *Oz*.

Учитывая (11) – (13), приведем уравнение (10) к виду Громеко-Ламба [4]:

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t}+grad\left(\frac{V^{*2}}{2}+\frac{P-P_0}{m\rho}+gz\right)-\vec{V}^*\times rot\,\vec{V}^*=-g\left[B\left|\vec{V}\right|\vec{V}+\left(\beta\Delta T\right)\vec{K}\right], \tag{14}$$

где P – P$_0$ – избыточное давление над постилающей поверхностью, (Па).

Обозначив, согласно [3], через h величину полного напора воздуха в порах городского лабиринта, (м)

$$h=\frac{V^2}{2m^2g}+\frac{P-P_0}{m\gamma}+z\,, \tag{15}$$

где $\gamma=\rho g$ – удельный вес воздуха, (н/м^3), и, воспользовавшись (3), приведем уравнение (14) к виду

$$m\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+m^2g\left[grad\,h+B\left|\vec{V}\right|\vec{V}+\left(\beta\Delta T\right)\vec{k}\right]-\vec{V}\times rot\,\vec{V}=0\,, \tag{16}$$

К уравнению (16) необходимо добавить уравнение неразрывности фильтрационного поля скоростей ветра

$$div\,\vec{V}=0\,, \tag{17}$$

и уравнение, описывающее распространение фильтрационного поля температуры в атмосфере городского лабиринта. С этой целью рассмотрим полное изменение внутренней энергии воздуха в объеме $md\tau$. Имеем

$$m\rho\frac{dU^*}{dt}d\tau=mdiv\left[\left(\lambda+\lambda^T\right)grad\,T^*\right]d\tau+mQ^*d\tau-\left(1-m\right)\rho_1\frac{dU_1^*}{dt}d\tau\,, \tag{18}$$

где $U^*=C_pT^*$ – удельная, отнесенная к единице массы, внутренняя энергия воздуха в порах лабиринта, (кДж/кг); λ,λ^T – молекулярный и турбулентный коэффициенты теплопроводности воздуха, $\frac{\text{кДж}}{(\text{м}\cdot\text{с})^0\text{K}}$; $\dot{Q}^*$ – отнесенная к единице объема, быстрота прироста (убыли) тепла за счет действия внутренних источников (стоков), $\left(\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}\right)$; $U_1^*=C_1T_1^*$ – удельная, отнесенная к единице массы, внутренняя энергия материала твердого каркаса, (кДж/кг); ρ_1,C_1 – плотность и удельная теплоёмкость материала каркаса, (кг/м^3), $\left(\frac{\text{кДж}}{\text{кг}^0\text{K}}\right)$.

Поскольку

$$\frac{dU^*}{dt}=C_p\cdot\left(\frac{\partial T^*}{\partial t}+\vec{V}^*\cdot grad\,T^*\right);\frac{dU_1^*}{dt}=C_1\cdot\frac{\partial T_1^*}{\partial t}\,,$$

то, учитывая (3), (5), (6), приведём уравнение (18) к виду

$$m\left[1+\left(\frac{\rho_1C_1}{\rho C_p}\right)\right]\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\,grad\,T=m\cdot div\left[\left(\frac{\nu}{P_r}+\frac{\nu^T}{P_r^T}\right)grad\,T\right]+\frac{\dot{Q}}{\rho C_p}\,, \tag{19}$$

где ν , ν^T – молекулярный и турбулентный кинематические коэффициенты трения, (м²/с); P_r , P_r^T – молекулярное и турбулентное числа Прандтля; $\dot{Q} = m^2\dot{Q}^*$ – фильтрационное значение удельной быстроты прироста (убыли) тепла за счет действия внутренних источников (стоков), $\left(\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}\right)$.

Система уравнений (16), (17), (19) описывает фильтрационные поля скорости ветра и температуры в атмосфере городского лабиринта. Для отыскания фильтрационного поля концентрации загрязняющей примеси в этой атмосфере рассмотрим полное изменение средней концентрации примеси в объёме $md\tau$.

Имеем

$$m\rho\frac{d\phi^*}{dt}d\tau = mdiv\left[\left(D + D^T\right)grad\,\phi^*\right]d\tau - m\rho\sigma\phi^*d\tau + m\rho\dot{M}^*d\tau\,, \tag{20}$$

где D^T , D^T – молекулярный и турбулентный динамические коэффициенты диффузии, $\left(\frac{кг}{мс}\right)$; σ – параметр нейтрализации примеси в атмосфере, 1/с; $\dot{M}^*$ – отнесенная к единице объёма быстрота прироста массы примеси за счёт действия внутренних источников, $\left(\frac{кг}{м^3 с}\right)$.

Поскольку

$$\frac{d\phi^*}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \vec{V}*grad\,\phi^*,$$

то, учитывая (3), (8) приведём уравнение (20) к виду

$$m\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V}\,grad\,\phi = mdiv\left[\left(\nu_\phi + \nu_\phi^T\right)grad\,\phi\right] - m\sigma\phi + \dot{M}\,, \tag{21}$$

где ν_ϕ, ν_ϕ^T – молекулярный и турбулентный кинематические коэффициенты диффузии; $\dot{M} = m^2\dot{M}^*$ – фильтрационное значение удельной быстроты прироста массы примеси за счет действия внутренних источников, $\left(\frac{кг}{м^3 с}\right)$.

Уравнения (19), (21) замыкаются путем использования для вычисления коэффициентов турбулентного обмена ν^T , ν_ϕ^T хорошо зарекомендовавшие себя на практике полуэмпирические теории турбулентности [1, 4, 5].

Система уравнений фильтрационной атмосферы городского лабиринта (16), (17), (19), (21) решается при следующих начальных и граничных условиях

1) $\vec{V} = \vec{V}^{(0)}(x,y,z)$; $h=h^{(0)}(x, y, z)$; $T=T^{(0)}(x, y, z)$; $\phi = \phi^0(x,y,z)$ при $t = 0$, (22)

2) $\vec{V} = h = 0$; $T=T_0(x, y, t)$; $\phi = \phi_0(x,y,t)$ при $z = 0$, (23)

где функции $T_0(x,y,t)$, $\phi_0(x,y,t)$ удовлетворяют условиям баланса на подстилающей поверхности

$$\rho C_\rho \left[\left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_z^T}{Pr^T} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \Bigg|_{z=0} = m\left(\Phi_0 - R_0\right)\Big|_{z=0},$$
$$\left(\nu_z^T + \nu_{\phi z}^T\right) \frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \left(\lambda_\phi - w_s\right)\phi\Big|_{z=0}, \tag{24}$$

Φ_0, R_0 – поток тепла в почву и радиационный баланс подстилающей поверхности городского лабиринта, $\left(\frac{кДж}{м^2 с}\right)$, $\nu_z^T, \nu_{\phi z}^T$ – вертикальные кинематические коэффициенты турбулентного трения и диффузии, (м^2/с), λ_ϕ, w_s – скорости поглощения загрязняющей примеси подстилающей поверхностью и оседания тяжелой примеси, (м/с).

3) $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \text{ при } x^2 + y^2 \to \infty. \tag{25}$$

4) $$\vec{V} = \vec{V}_g\left(x, y, t\right), \ h = h_g(x,y,t), \ T = T_g(x,y,t), \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \text{ при } z = H_1\left(x, y, t\right), \tag{26}$$

где $\vec{V}_g$, h_g, T_g – скорость ветра, полный напор, температура в зоне геострофического ветра; $z = H_1\left(x, y, t\right)$ – уравнение верхней границы пограничного слоя атмосферы, удовлетворяющее кинематическому граничному условию

$$\vec{V}\vec{n} = -\frac{\dfrac{\partial H_1}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial y}\right)^2}}, \text{ при } z = H_1\left(x, y, t\right); \tag{27}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности $z = H_1\left(x, y, t\right)$.

Фильтрационная модель переноса примеси в приземном и пограничном слоях атмосферы. Известно [1; 2; 5], что приземный слой земной атмосферы имеет высоту $H_0 \approx (50 \div 100)$ м, характеризуется высокой турбулентностью и большими вертикальными градиентами величин скорости ветра, температуры, концентрации примеси.

Будем считать, что средняя высота зданий и сооружений городского лабиринта $H_{cp} \approx H_0$, а окрестность верхней границы делает вертикальные диффузионные потоки преобладающими над горизонтальными, в связи с чем в уравнениях (19), (21) положим

$$div\left[\left(\frac{\nu}{p_r} + \frac{\nu^T}{p_r^T}\right) grad\, T\right] \approx \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\nu}{p_r} + \frac{\nu_z^T}{p_r^T}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right],$$
$$div\left[\left(\nu_\phi + \nu_\phi^T\right) grad\, \phi\right] \approx \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\nu_\phi + \nu_{\phi z}^T\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]. \tag{28}$$

Кроме того, в пограничном слое атмосферы вертикальная составляющая скорости ветра мала по сравнению с горизонтальными составляющими и сохраняется в уравнениях лишь перед производными по вертикальной координате [6]. Тогда система уравнений фильтрационного переноса загрязняющей примеси (16), (17), (19), (21) в приземном слое атмосферы городского лабиринта, при $0 \le z \le H_0(x,y,t)$, в проекции на оси декартовой системы координат представима в виде

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+m^2 g\left(\frac{\partial h}{\partial x}+Bu\sqrt{u^2+v^2}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$m\frac{\partial v}{\partial t}+m^2 g\left(\frac{\partial h}{\partial y}+Bu\sqrt{u^2+v^2}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$m^2 g\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\beta\Delta T\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{29}$$

$$m\left(1+\frac{\rho_1 c_1}{\rho c_p}\right)\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=m\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\nu}{p_r}+\frac{\nu_z^T}{P_r^T}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right]+\frac{\dot{Q}}{\rho c_p}$$

$$m\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}+\left(w-w_s\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}=m\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\nu_\phi+\nu_{\phi z}^T\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]-m\sigma\phi+\dot{M},$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости ветра $\vec{V}$ на оси декартовой системы координат; $h=\dfrac{U^2+v^2}{2m^2 g}+\dfrac{P-P_0}{jm}+z$.

Согласно [1, 2, 5, 6], вертикальные коэффициенты турбулентного обмена ν_z^T, $\nu_{\phi z}^T$ можно принять в виде

$$\nu_z^T=\begin{cases} k_1\left(\dfrac{z}{z_1}\right), & \text{при } z\le H_0,\\ k_1\left(\dfrac{H_0}{z_1}\right), & \text{при } z>H_0,\end{cases}\qquad \nu_{\phi t}^T=\begin{cases} k_1\left(\dfrac{z}{z_1}\right)^p, & \text{при } z\le H_0,\\ k_1\left(\dfrac{H_0}{Z_1}\right)^p, & \text{при } z>H_0,\end{cases} \tag{30}$$

где $k_1=\left(0{,}1\div 0{,}2\right)$ м²/с; p=0,8 ÷ 1,2 в зависимости от стратификации атмосферы; $z_1\approx 1$ м.

Для высот $H_0\left(x,y,t\right)<Z\le H_1\left(x,y,t\right)$, т. е. для верхних слоев пограничного слоя атмосферы, на которые еще оказывает влияние подстилающая поверхность городского лабиринта, система уравнений (29), (30) также справедливее, если в ней учесть влияние сил вязкости, силы Кориолиса и положить $m=1$; $B=\rho_1 c_1=0$.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial h}{\partial x}-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-fu=\left(\nu+\nu_z^T\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial y} + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + fu = \left(\nu + \nu_z^T\right)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (31)$$

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \beta\Delta T\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \left(\frac{\nu}{P_r} + \frac{\nu_z^T}{P_r^T}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \left(w - w_s\right)\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\nu_\phi + \nu_{\phi z}^T\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \delta\phi + \dot{M},$$

где f – параметр Кориолиса, (1/с).

Влияние подстилающей поверхности городского лабиринта на характер течения и перенос атмосферных загрязнений в верхних слоях пограничного слоя атмосферы будет осуществляться через граничные условия на поверхности верхней границы приземного слоя $Z = H_0(x,y,t)$, связывающие между собой решения систем уравнения (29) – (31):

$$u_- = u_+,\ v_- = v_+,\ w_- = w_+,\ h_- = h_+,\ T_- = T_+,\ \phi_- = \phi_+ \text{ при } z = H_0(x,y,t), \quad (32)$$

где индекс «–» соответствует значениям решений системы уравнений (29), (30), а индекс «+» – решениям системы уравнений (31). Кроме того, при $z = H_0(x,y,t)$ выполняется кинематическое граничное условие

$$\vec{n}\,\vec{V}_- = -\frac{m_- \dfrac{\partial H_0}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial H_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H_0}{\partial y}\right)^2}}. \quad (33)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности $z = H_0(x,y,t)$.

Выводы. Разработана фильтрационная математическая модель распространения атмосферных загрязнений в условиях городского лабиринта – районов плотной и высотной застройки больших городов, крупных промышленных центров, позволяющая учесть влияние характера плотности застройки на величину концентрации загрязняющей примеси в атмосфере города в различных условиях температурной стратификации.

Преимущество настоящей модели заключается в том, что она путем однократного интегрирования систем уравнений (29) – (31) позволяет получить поля скорости ветра и концентрации загрязнений во всём пограничном слое городского лабиринта, вместо того, чтобы расчётным путем определять эти поля в окрестности каждого городского здания или сооружения. Недостаток модели – результаты расчета могут не всегда точно соответствовать эмпирическим данным по концентрации атмосферных загрязнений в конкретно взятой точке городского лабиринта.

Библиографические ссылки

1. **Берлянд, М.Е.** Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнение воздуха / М.Е. Берлянд.–Л., 1985.–273с.
2. **Абрамовский, Е.Р.** Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик. – Д., 2007.–187с.
3. **Аравин, В.И.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В.И. Аравин, С.Н. Нумеров. – М., 1953.–616с.
4. **Лойцянский, Л.Г.** Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский – М., 1970.–904с.
5. **Обухов, А.М.** Турбулентность и динамика атмосферы / А.М. Обухов – Л., 1988.–413с.
6. **Бызова, Н.Л.** Рассеивание примесей в пограничном слое атмосферы / Н.Л. Бызова – Л., 1977.–190с.

Надійшла до редколегії 05.12.09

УДК 532.516

С. В. Тарасов, Э. П. Яскевич, Д. А. Редчиц, И. Ю. Костюков
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «ТРАНСМАГ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ОДИНОЧНОЙ ЛОПАСТИ Н-РОТОРА ДАРЬЕ

Представлены результаты вычислительного эксперимента по изучению аэродинамики лопасти вращающегося ротора Дарье. Для численного моделирования аэродинамики лопасти применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навьет-Стокса несжимаемой жидкости. При моделировании турбулентности используется однопараметрическая дифференциальная модель турбулентности. Решение системы исходных уравнений получены с помощью неявного оконченообъемного численного алгоритма, который базируется на методе искусственной сжимаемости. Выполнен анализ поля течения вокруг лопасти ротора Дарье. Выделены основные стадии формирования вихревой структуры. Установлено, что для большинства угловых положений одиночной лопате ротора Дарье центр давления находится на расстоянии 0.17-0.42 длины хорды.

Ключевые слова: ротор Дарье, уравнения Навье-Стокса, модель турбулентности, численное моделирование.

Представлено результати обчислювального експерименту з вивчення аеродинаміки лопаті ротора Дар’є, що обертається. Для чисельного моделювання аеродинаміки лопаті застосовуються осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав’є-Стокса нестисливої рідини. При моделюванні турбулентності використовується однопараметрична диференціальна модель турбулентності. Розв'язок системи вихідних рівнянь отримано за допомогою неявного скінчено-об'ємного чисельного алгоритму, що базується на методі штучної стисливості. Виконано аналіз поля течії навколо лопаті ротора Дар’є. Виділено основні стадії формування вихрової структури. Установлено, що для більшості кутових положень одиночної лопаті ротора Дар’є центр тиску перебуває на відстані 0.17–0.42 довжини хорди.

Ключові слова: ротор Дар’є, рівняння Нав’є-Стокса, модель турбулентності, чисельне моделювання.

The results of computing experiment on studying of aerodynamics of the rotated blade of Darrieus rotor are presented. The incompressible Reynolds averaged Navier-Stokes equations are applied to numerical simulation of blade aerodynamics. One-equation differential turbulence model is used. Solution of system of the initial equations is based on the implicit finite-volume numerical algorithm and artificial compressibility method. The analysis of flow field around blade of Darrieus rotor is carried out. The basic stages of formation of vortex structure are allocated. The pressure centre is on distance of 0.17-0.42 chord lengths for the majority of angular positions of single blade of Darrieus rotor.

Keywords: Darrieus rotor, Navier-Stokes equations, turbulence model, numerical simulation.