

19. **Xiao Q.** Numerical study of transonic buffet on a supercritical airfoil / Q. Xiao, H. M. Tsai // AIAA Journal – 2006, – Vol. 44, № 3. – P. 620–628.

Надійшла до редколегії 20.01.10

УДК 532.5+533.6

Л.И. Кныш, В.И. Давыдов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ПОЛЯ СКОРОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПОЛУКРУГЛОЙ ФОРМЫ

Представлены результаты аналитического и численного решения задачи вязкого течения несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале полукруглого сечения. Аналитическое решение получено с помощью рядов и интегралов Фурье, численное – итерационным конечно-разносным методом. Определены качественные характеристики течения, проведено сравнение результатов аналитического и численного решений.

Ключевые слова: вязкое течение несжимаемой жидкости, каналы полукруглого сечения, ряды и интегралы Фурье, приближённое аналитическое решение, численное решение.

Наведено результати аналітичного та чисельного розв'язку задачі в'язкої течії нестисливої рідини в циліндричному каналі напівкруглого перетину. Аналітичний розв'язок отримано за допомогою рядів та інтегралів Фур'є, чисельний – ітераційним скінченно-різницеvim методом. Визначено якісні характеристики течії, проведено порівняння результатів аналітичного та чисельного розв'язків.

Ключові слова: в'язка течія нестисливої рідини, канали напівкруглого перетину, ряди та інтеграли Фур'є, наближений аналітичний розв'язок, чисельний розв'язок.

Analytic and numerical results of problem about viscous incompressible liquid motion in cylindrical canal, which has semicircular form, were presented. Analytical solution was found with Fourier series and integrals, and numerical – with finite differences method. Qualitative characteristics of motion were determined and comparison of analytic and numerical solutions was done.

Keywords: viscous incompressible liquid motion, semicircular form of canals, series and integrals of Fourier, analytic solution, numerical solution.

Введение. Постоянное усовершенствование современного технологического оборудования выдвигает новые требования к качеству проведения опытно-конструкторских работ, что влечёт за собой необходимость более глубокой детализации при расчёте основных элементов и узлов.

В частности, дальнейшее развитие приоритетных в настоящее время энерго-сберегающих технологий и нетрадиционной энергетики невозможно без поиска новых проектных решений при конструировании теплообменного оборудования, без выбора нестандартных схемных решений компоновки основных агрегатов системы. Перспективным в этом смысле является использование в качестве магистралей для теплоносителей каналов некруглого сечения, труб с различными перегородками, которые могут служить как для интенсификации теплообмена, так и для разделения потоков в рекуперативных теплообменных аппаратах.

Особый интерес с точки зрения использования в объектах нетрадиционной энергетики представляют каналы полукруглой формы, динамика течения и теплообмен в которых являются недостаточно исследованными.

© Л.И. Кныш, В.И. Давыдов, 2010

Постановка задачі. Математическая постановка задачи основывается на классической системе уравнений движения Навье-Стокса, записанной для вязкой несжимаемой жидкости, которая стационарно движется в цилиндрической трубе, ось которой направлена по оси z . Уравнение неразрывности показывает, что в этом случае скорость V не зависит от z и является функцией только радиуса r и угла ϕ , $V = V(r, \phi)$. Система уравнений при этом будет иметь вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Обозначим через $P = -\frac{\partial p}{\partial z}$ градиент давления вдоль трубы в направлении течения.

Этот градиент представляет собой постоянную величину, поскольку $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{P}{\mu}, \quad (2)$$

и на контуре сечения $V(r, \phi) = 0$.

Функцию $V(r, \phi)$ будем искать в виде [1]:

$$V(r, \phi) = \psi(r, \phi) - \frac{P \cdot r^2}{4\mu}, \quad (3)$$

при этом очевидно, что

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (4)$$

Поскольку на контуре сечения $V(r, \phi) = 0$, то можно сделать вывод, что гармоническая функция $\psi(r, \phi)$ является функцией тока для невязкой несжимаемой жидкости, которая заполняет цилиндр такого же полукруглого поперечного сечения, что и рассматриваемая труба, и вращается вокруг оси с угловой скоростью $\omega = \frac{P}{2\mu}$.

Определение граничных условий для функции $\psi(r, \phi)$. Рассмотрим цилиндрическое тело, поперечным сечением которого является полукруг, который вращается вокруг выбранного начала координат O с угловой скоростью ω (рис. 1).

Очевидно, что компоненты скорости точки $P(x, y)$, которая лежит на границы цилиндра, таковы $\vec{V} = \{-y\omega, x\omega\}$. Обозначив через θ угол наклона касательной к оси OX и проектируя компоненты скорости точки P на направление внешней нормали к границе в этой точке, получаем выражение для нормальной скорости

$$V_n = -y\omega \sin \theta - x\omega \cos \theta.$$

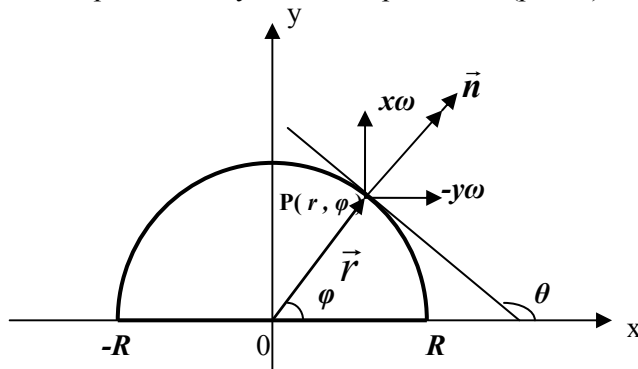


Рис. 1. Расчётная схема области течения

Далее, переходя к естественным координатами, имеем $\sin \theta = \frac{dy}{ds}$, $\cos \theta = \frac{dx}{ds}$ и тогда

$$V_n = -\frac{\partial \psi}{\partial s} = -y\omega \frac{dy}{ds} - x\omega \frac{dx}{ds}.$$

Интегрируя полученное равенство вдоль границы, находим

$$\psi = \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega r^2 + B,$$

где B – произвольная постоянная.

Таким образом, нахождение профиля скорости в цилиндрической трубе поперечным сечением которой является полукруг, сводится к нахождению гармоничной функции $\psi(r, \phi)$, которая удовлетворяет на контуре таким граничным условиям:

$$\psi(r, 0) = \psi(r, \pi) = \frac{1}{2} \omega r^2, \quad \psi(R, \phi) = \frac{1}{2} \omega R^2. \quad (5)$$

Особенности аналитического метода решения задачи. Проведя обзор известных фундаментальных исследований [1; 2; 3], первоначально, для решения поставленной задачи был избран метод конформного отображения, суть которого сводилась к отысканию функции, отображающей интересующую нас область – полукруг – на круг единичного радиуса. Такая функция была найдена, однако, при подстановке её в выражение для граничных условий на единичном круге, получался тривиальный результат, который невозможно использовать в дальнейшем. Поэтому для решения внутренней задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости выбран метод, основанный на введении специальной системы координат, что позволило решить задачу в виде рядов и интегралов Фурье [4].

В качестве вспомогательной удобно взять полулогарифмическую систему координат (t, ϕ) , которая связана с координатной системой (r, ϕ) зависимостями:

$$t = \ln \frac{r}{R}, \quad \text{или} \quad r = Re^t \quad \text{и} \quad \phi = \phi.$$

Тогда, воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi) &= \Phi(t, \phi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

для определения функции $\Phi(t, \phi)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0, \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\Phi(t, 0) = \Phi(t, \pi) = \frac{\omega R^2 e^{2t}}{2}, \quad \Phi(0, \phi) = \frac{\omega R^2}{2}. \quad (7)$$

Искомое решение $\Phi(t, \phi)$ будем искать в виде суммы двух функций

$$\Phi(t, \phi) = \Phi_1(t, \phi) + \Phi_2(t, \phi),$$

одна из которых соответствует граничному условию по криволинейной области, а вторая – граничному условию по прямолинейной области АОВ.

Для нахождения функций $\Phi_1(t, \phi)$ и $\Phi_2(t, \phi)$ использовался метод разделения переменных, при реализации которого учитывались основные особенности задачи, а именно её внутренний характер, а также то, что переменная t не имеет предела слева.

Общее решение краевой задачи (6)–(7) запишем в виде:

$$\Phi(t, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{nt} \sin n\phi + \int_0^{\infty} (C(z)shz\phi + D(z)chz\phi) \sin ztdz, \quad (8)$$

где $0 < \phi < \pi, -\infty < t < 0$.

Удовлетворяя первому из граничных условий (7):

$$\Phi(t, 0) = \int_0^{\infty} D(z) \sin ztdz = \frac{\omega R^2 e^{2t}}{2}, \quad -\infty < t < 0 \quad (9)$$

и воспользовавшись формулами преобразования Фурье [5]

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(z) \sin ztdz, \quad -\infty < t < 0,$$

$$b(z) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ztdt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(-t) \sin ztdt$$

получаем

$$D(z) = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4 + z^2)}.$$

Удовлетворим второму из граничных условий (7):

$$C(z)sh\pi z + D(z)ch\pi z = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4 + z^2)},$$

$$C(z) = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4 + z^2)} \cdot \frac{1 - ch\pi z}{sh\pi z}.$$

Удовлетворяя граничному условию (8), получаем

$$\Phi(0, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi = \frac{\omega R^2}{2}, \quad 0 < \phi < \pi.$$

Используя метод Эйлера-Фурье, найдём коэффициенты полученного ряда Фурье:

$$A_n = \frac{2\omega R^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = \frac{2\omega R^2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}).$$

Подставляя найденные коэффициенты $A_n, C(z), D(z)$ в выражение (8), получаем:

$$\Phi(t, \phi) = \frac{2\omega R^2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{nt} \sin n\phi}{n} - \frac{\omega R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zt}{4+z^2} \frac{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2} - z\phi)}{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2})} dz,$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Вычисляем значение суммы

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{nt} \sin n\phi}{n} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{sh} t}\right), \quad t < 0,$$

и вспомогательного интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(z(\phi - \frac{\pi}{2}))}{z \operatorname{ch}(\frac{z\pi}{2})} \sin zt dz = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{sh} t}\right), \quad t < 0.$$

Окончательно получаем

$$\Phi(t, \phi) = \frac{\omega R^2}{2} + \frac{4\omega R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2} - z\phi)}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2})} \sin zt dz, \quad (10)$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Полученное решение (10) содержит несобственный интеграл от гиперболических функций, который не удастся вычислить аналитически. Однако, прибегнув к стандартной замене бесконечного предела интегрирования на конечный, интеграл был рассчитан по квадратурной формуле трапеций, что дало возможность получить приближённое аналитическое решения.

Численное решение задачи. Получить численное решение задачи по определению профиля скорости в трубе полукруглого сечения возможно не прибегая к переходу к новой системе координат, а лишь организовав итерационный процесс по определению значений для функции тока $\psi(r, \phi)$ на основании уравнений (4)–(5).

С помощью известных методов построения разностных схем [6] осуществлён переход к аппроксимирующему уравнение (4) разностному аналогу

$$r^2 \frac{\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k}}{h^2} + r \frac{\psi_{i+1,k} - \psi_{i-1,k}}{2h} + \frac{\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1}}{l^2} = 0 \quad (11)$$

на сетке $r_i = r_0 + ih$, $\phi_k = \phi_0 + kl$, $(0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq k \leq M)$.

Известно, что сходимость итерационного процесса для подобных разностных схем довольно низка. Для её ускорения применён метод введения релаксационного параметра. Оптимальное значение такого параметра найдено в ходе численного эксперимента и оказалось равным 1,7.

Обсуждение результатов. В ходе проведения исследований выявлена качественная картина течения в канале полукруглого сечения. На рис. 2 показаны кривые, полученные в результате аналитического решения тестовой задачи в полукруге единичного радиуса при $\omega = 1$. Как видно из графика, динамика течения существенно изменяется при изменении значения радиальной координаты.

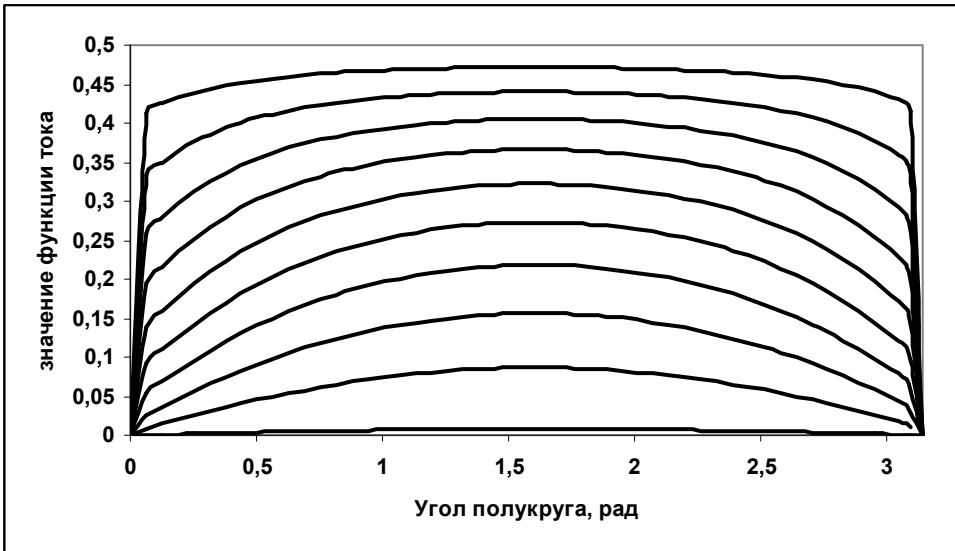


Рис. 2. Характер течения в полукруге при различных значениях радиальной координаты

На рис. 3 показаны кривые, характеризующие изменение параметров течения в радиальном направлении. Учитывая симметричную картину течения, кривые были построены для углов первой четверти, а именно $\varphi=3^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$. Как видно из графика, при малых углах в пристеночной прямолинейной области функция тока растёт значительно медленнее, с постепенным ускорением и достижением максимальной скорости роста при $\varphi=90^{\circ}$.

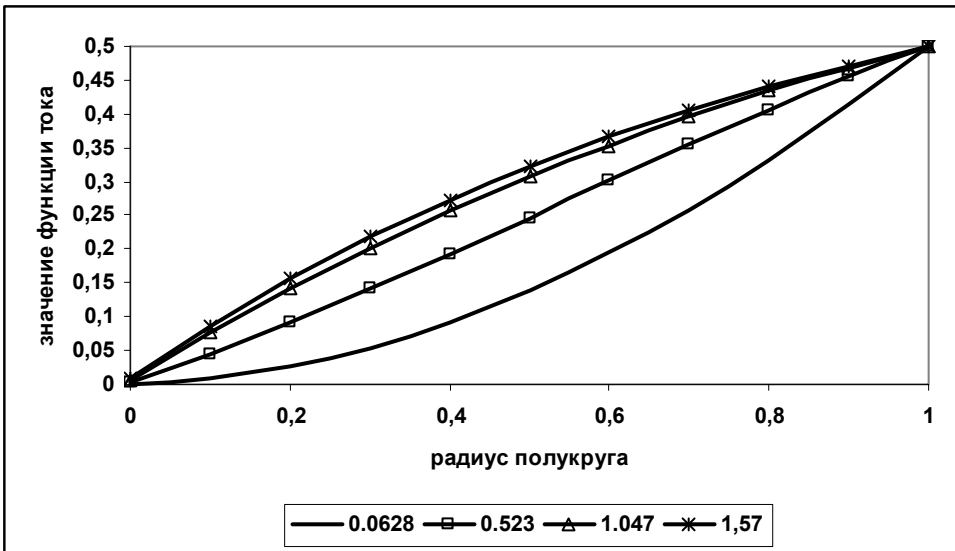


Рис. 3. Изменение динамики течения в полукруге в зависимости от радиуса

Абсолютно аналогичные результаты получены при решении данной задачи численно. На рис. 4. приведены результаты сравнения численного и аналитического решений при $R=0,25$ и $R=0,5$.

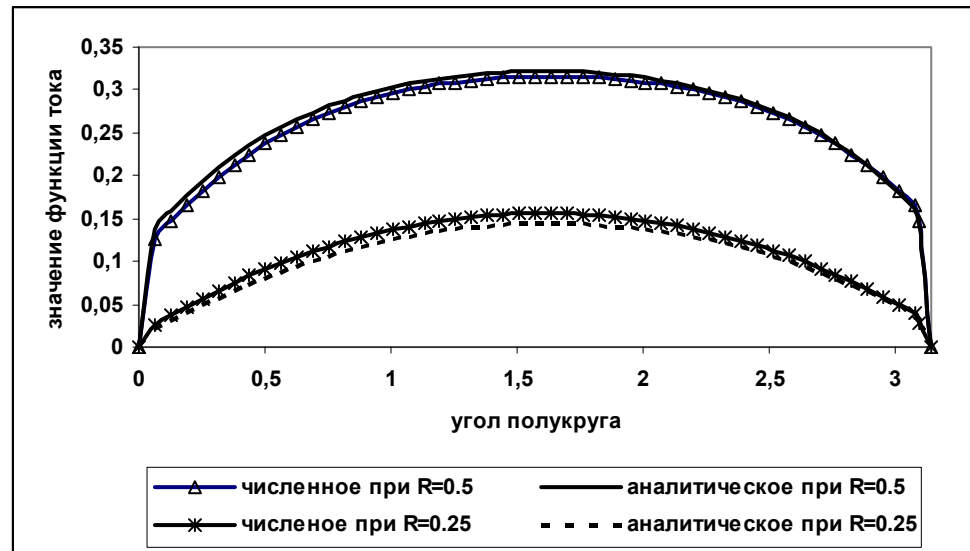


Рис. 4. Сравнение численного и аналитического решения задачи по определению профиля скорости в трубе полукруглого поперечного сечения

Полученные данные могут быть положены в основу последующей двумерной аппроксимации, в которой станет возможным описать единой зависимостью изменения скорости, как по r , так и φ . Знание такой зависимости может существенно облегчить тепловой и гидродинамический расчёт при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в каналах различной геометрии.

Заключение. Рассмотренные методики и созданные на их основе программы расчёта могут выступать отдельными программными модулями при проведении таких расчётов. К сожалению, в ходе проведения исследований, не были обнаружены результаты экспериментальных исследований, с которыми желательно было бы сравнить полученные теоретические данные. Открытым также остаётся вопрос о характере движения жидкости в рассматриваемой полукруглой трубе при турбулентном режиме течения. Вероятно, ответ на него можно получить, если базироваться на данных, полученных в результате экспериментов.

Библиографические ссылки

1. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон – М., 1964. – 656 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили – М., 1966. – 709 с.
3. Лейбензон Л.С. Руководство по нефтепромысловой механике / Л.С. Лейбензон – М., 1931. – 158 с.
4. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян – М., 1963. – 686 с.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш – М., 1948. – 480 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – М., 1977. – 348 с.

Надійшла до редколегії 01.02.10