А. А. Бобылёв (мл.)
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ЗАДАЧА О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ВЫПУКЛЫМ НАГРЕТЫМ ШТАМПОМ

Рассматривается задача о контактном взаимодействии упругого тела конечных размеров с жестким выпуклым нагретым штампом. На поверхности возможного контакта тела со штампом задаются условия идеального одностороннего механического и неидеального теплового контактов. Коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления или зазора между телом и штампом, что приводит к связанности деформационного и температурного полей. Получена вариационная формулировка задачи. Предложен итерационный алгоритм, на каждой итерации которого решаются несвязанные задачи теории упругости и теплопроводности. Для дискретизации задач использован метод конечных элементов.

Ключевые слова: контактная задача, термоупругость, вариационный метод, неидеальный тепловой контакт, односторонний контакт, метод конечных элементов.

Розглядається задача про контактну взаємодію пружного тіла скінченних розмірів з жорстким опуклим нагрітим штампом. На поверхні можливого контакту тіла зі штампом задаються умови ідеального одностороннього механічного та неідеального теплового контактів. Коефіцієнт контактного теплообміну залежить від контактного тиску або зазору між тілом та штампом, що призводить до зв'язаності деформаційного та температурного полів. Отримано варіаційну постановку задачі. Запропоновано ітераційний алгоритм, на кожній ітерації якого розв'язуються незв'язані задачі теорії пружності та теплопровідності. Для дискретизації використано метод скінченних елементів.

Ключові слова: контактна задача, термопружність, варіаційний метод, неідеальний тепловий контакт, односторонній контакт, метод скінченних елементів.

The problem of contact interaction of finite elastic body with hard convex heated punch is considered. On the surface of possible contact the conditions of ideal unilateral mechanical and imperfect thermal contacts are used. Contact heat transfer coefficient depends on the contact pressure or the gap between the body and punch, which leads to the relation of strain and temperature fields. A variational formulation of the problem is obtained. An iterative algorithm is proposed. Unrelated problems of the elasticity theory and the thermal conductivity theory are solved at each iteration. The finite element method is used for discretization of the problems.

Keywords: contact problem, thermoelasticity, variational method, imperfect thermal contact, unilateral contact, finite element method.

Введение. Развитие современной техники сопровождается интенсивным повышением тепловых нагрузок узлов и деталей конструкций. Значительные по величине тепловые потоки имеют место при работе реактивных и газотурбинных двигателей, летательных аппаратов и т. п. На тепловой режим узлов и деталей значительное влияние оказывает так называемое термическое сопротивление контакта, обусловленное несовершенством механического соединения контактирующих поверхностей [3; 7; 8]. В настоящее время этому вопросу посвящено значительное количество экспериментальных и теоретических работ. С внедрением в практику проектирования конструкций автоматизированных систем возросла актуальность разработки методов компьютерного моделирования процессов контактного теплообмена.

В настоящей работе рассматривается задача о контактном взаимодействии упругого тела конечных размеров с жестким выпуклым нагретым штампом. При постановке задачи предполагаются известными лишь предельно возможные области контакта тела со штампом, фактические площадки контакта определяются в

процессе решения задачи. Тепловое взаимодействие описывается условиями неидеального теплового контакта. Предполагается, что коэффициент контактного теплообмена является функцией контактного давления и фактического зазора между телом и штампом. Это приводит к связанности задач определения напряженно-деформированного и температурного состояния даже при использовании несвязанной системы уравнений термоупругости.

Целью работы является разработка вычислительного алгоритма и численное решение рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Пусть однородное изотропное упругое тело занимает конечную область $\Omega \in R^3$, ограниченную замкнутой поверхностью Γ с внешней нормалью $\vec{n}$. Под $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжений в точке $x \in \Omega$. Перемещения и деформации считаются малыми. В недеформированном состоянии напряжения в теле отсутствуют, температура равна T_0. На тело Ω действуют объемные силы интенсивностью $\vec{F}(x)$. Внутри тела расположены источники тепла плотностью $Q(x)$. Термоупругое состояние тела описывается несвязанной системой уравнений термоупругой статики [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0\,; \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\left[\varepsilon_{kl} - \beta_{kl}(T - T_0) \right]; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q = 0\,, \tag{4}$$

где a_{ijkl} – компоненты тензора модулей упругости, β_{kl} – компоненты тензора коэффициентов температурного расширения и сдвига, λ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности.

Часть поверхности тела Γ, по которой возможен контакт со штампом, обозначим Γ_p. Форма и положение штампа описывается функцией $\Phi(x)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали $\vec{n}(x)$ тела Ω. Расстояние $\Phi(x)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию тела Ω. Фактические площадки контакта упругого тела Ω и штампа считаются заранее неизвестными.

Механическое взаимодействие упругого тела Ω и жесткого штампа описывается линеаризованными условиями одностороннего контакта при отсутствии трения [4; 5; 6]:

$$\begin{gathered} u_n(x) \le \Phi(x), \;\; \sigma_n(x) \le 0, \;\; \vec{\sigma}_t(x) = 0, \\ \sigma_n(x)[u_n(x) - \Phi(x)] = 0, \;\; x \in \Gamma_p, \end{gathered} \tag{5}$$

где $u_n = u_i n_i$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$; $\sigma_{ti} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$.

Тепловое взаимодействие описывается условиями неидеального теплового контакта:

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = -\alpha_p (T - T_p), \ \ x \in \Gamma_p, \tag{6}$$

где α_p – коэффициент контактного теплообмена, T_p – температура поверхности штампа. Значение коэффициента контактного теплообмена α_p зависит от большого числа факторов [8], так как теплота между соприкасающимися поверхностями в общем случае может передаваться теплопроводностью через места фактического контакта выступающих неровностей, теплопроводностью и конвекцией через среду, заполняющую свободное пространство между поверхностями, и излучением.

В настоящей работе рассматривается случай, когда α_p является функцией контактного давления σ_n и фактического зазора $\psi(x) = \Phi(x) - u_n(x)$ между телом и штампом

$$\alpha_p(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} f_1(\sigma_n), & \sigma_n \le 0, \ \psi = 0; \\ f_2(\psi), & \sigma_n = 0, \ \psi \ge 0. \end{cases} \tag{7}$$

Относительно функций $f_1(\sigma_n)$ и $f_2(\psi)$ предполагается, что они являются невозрастающими функциями, причем $f_1(0) = f_2(0)$. Вследствие такого выбора коэффициента контактного теплообмена граничное условие (6) связывает напряженно-деформированное и температурное состояние и рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости.

На оставшейся части поверхности $\Gamma \setminus \Gamma_p$ заданы граничные условия классических типов [7]:

$$u_i(x) = g_i(x), \ \ x \in \Gamma_u; \quad \sigma_{ij}(x) n_j(x) = P_i(x), \ \ x \in \Gamma_\sigma; \tag{8}$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = 0;$$

$$T(x) = \phi_1(x), \ \ x \in \Gamma_t; \quad \lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \phi_2(x), \ \ x \in \Gamma_q; \tag{9}$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \alpha (T_\alpha - T), \ \ x \in \Gamma_\alpha; \tag{10}$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_q \cup \Gamma_\alpha = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_q = 0; \ \ \Gamma_t \cap \Gamma_\alpha = 0; \ \ \Gamma_q \cap \Gamma_\alpha = 0,$$

где $\vec{g}(x)$ – перемещения на Γ_u, $\vec{P}(x)$ – поверхностные усилия на Γ_σ, $\phi_1(x)$ – температура на Γ_t, $\phi_2(x)$ – тепловой поток на Γ_q, T_α – температура внешней среды на Γ_α, α – коэффициент конвективного теплообмена на Γ_α.

Таким образом, задача состоит в определении функций $u_i(x), \varepsilon_{ij}(x), \sigma_{ij}(x), T(x)$, удовлетворяющих в области Ω системе уравнений (1) – (4) с граничными условиями (5) – (6), (8) – (10). Необходимо также определить фактические площадки соприкосновения тел.

Вариационная формулировка задачи. Введем пространства С.Л. Соболева $H_u(\Omega) = [W_2^1(\Omega)]^3$ вектор-функций $\vec{v}(x) = (\vec{v}_1(x), \vec{v}_2(x), \vec{v}_3(x))$ и $H_T(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ функций $\tilde{T}(x)$, определенных в области Ω и суммируемых с квадратом в Ω вместе с первыми частными производными. Выделим множество кинематически допустимых перемещений

$$V_u = \left\{ \vec{v}(x) \in H_u(\Omega)) : \ \vec{v}(x) = \vec{g}(x), \ \ x \in \Gamma_u ; \ \ v_n(x) \le \Phi(x), \ \ x \in \Gamma_p \right\}$$

и множество допустимых температур

$$T_T = \left\{ \tilde{T}(x) \in H_T(\Omega)) : \ \tilde{T} = \phi_1(x), \ x \in \Gamma_t \right\}.$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) d\Omega ; \quad L(\vec{v}) = \int_\Omega F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} P_i v_i d\Gamma ;$$

$$M(\tilde{T},\vec{v}) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ij} \tilde{T} \right) v_i d\Omega ; \quad b(\tilde{T},\theta) = \int_\Omega \lambda_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega ;$$

$$N(\tilde{T}) = \int_\Omega Q \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \phi_2 \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_\alpha} \alpha T_\alpha \tilde{T} d\Gamma ; \quad K(\tilde{T},\theta) = \int_{\Gamma_\alpha} \alpha \tilde{T} \theta d\Gamma .$$

Для законности проводимых ниже соотношений будем предполагать, что

$$a_{ijkl} \in L_\infty(\Omega) ; \ \ \vec{g} \in [H^{1/2}(\Gamma_u)]^3 ; \ \vec{P} \in [H^{-1/2}(\Gamma_\sigma)]^3 ; \ \ \vec{F} \in [L_2(\Omega)]^3 ;$$

$$c_{ij} \in L_\infty(\Omega) ; \ \ \lambda_{ij} \in L_\infty(\Omega) ; \ \ \phi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_t) ; \ \ \phi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_q) ; \ \ Q \in L_2(\Omega) ;$$

$$\alpha_p \in L_2(\Gamma_p) ; \ \ \alpha \in L_2(\Gamma_\alpha) ; \ \ T_\alpha \in L_2(\Gamma_\alpha) ; \ \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p) .$$

Пусть (u,T) – решение рассматриваемой задачи в дифференциальной постановке (1) – (4). Тогда, используя [2; 6], можно показать, что справедливы следующие утверждения:

Предложение 1. Решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет системе, состоящей из вариационного неравенства

$$a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \ge L(\vec{v}-\vec{u}) - M(T-T_0,\vec{v}-\vec{u}), \ \ \forall \vec{v},\vec{u} \in V_u , \tag{11}$$

и вариационного уравнения

$$b(T,\hat{T}-T) + K(T,\tilde{T}-T) = N(\tilde{T}-T) - \int_{\Gamma_p} \alpha_p (T-T_p)(\tilde{T}-T) d\Gamma, \ \ \forall \tilde{T},T \in V_T . \tag{12}$$

Предложение 2. Решение системы (11) – (12), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке (1) – (4), (5) – (6), (8) – (10).

Вычислительный алгоритм. При постановке задачи использовались несвязанные уравнения термоупругости (1) – (4), однако рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, поскольку согласно (7) коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и штампом. Для решения задачи используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решается несвязанная система, состоящая из вариационного уравнения

$$b(T_k,\tilde{T}-T_k)+K(T_k,\tilde{T}-T_k)=N(\tilde{T}-T_k)-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_p}\alpha_p(\sigma_{k-1},\psi_{k-1})(T_k-T_p)(\tilde{T}-T_k)d\Gamma,\ \ \forall\tilde{T},T_k\in V_T \tag{13}$$

и вариационного неравенства

$$a(\vec{u}_k,\vec{v}-\vec{u}_k)\geq L(\vec{v}-\vec{u}_k)-M(T_k-T_0,\vec{v}-\vec{u}_k),\ \ \forall\vec{v},\vec{u}_k\in V_u\,. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что если функциональная последовательность $\{\vec{u}_k,T_k\}$ сходится, то предел этой последовательности $(\vec{u},T)$ будет решением вариационной задачи (11) – (12). В качестве начального приближения можно использовать естественное состояние, т. е. $\alpha_p[0,\Phi\cdot H(\Phi)]$, где $H(\Phi)$ – функция Хевисайда.

При построении алгоритмов численного решения вместо вариационных задач, как правило, используют эквивалентные им экстремальные задачи [1].

Предложение 3. Вариационное уравнение (13) эквивалентно экстремальной задаче

$$\inf_{t\in V_T}\left\{J_T(t)=\frac{1}{2}b(\tilde{T},\tilde{T})+\frac{1}{2}K(\tilde{T},\tilde{T})-N(\tilde{T})+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_p}\alpha_p(\sigma_{k-1},\psi_{k-1})(\tilde{T}-T_p)^2d\Gamma\right\}, \tag{17}$$

а вариационное неравенство (14) – экстремальной задаче

$$\inf_{\vec{v}\in V_u}\left\{J_u(\vec{v})=\frac{1}{2}a(\vec{v},\vec{v})-L(\vec{v})-M(T_k-T_p,\vec{v})\right\}. \tag{18}$$

Для дискретизации экстремальных задач применялся метод конечных элементов [3]. Использовались треугольные конечные элементы первого порядка. Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования применялся метод сопряженных градиентов с масштабированием матриц жесткости и теплопроводности для ускорения сходимости. Критерием сходимости итерационного процесса считалось установление значений контактных напряжений и зазоров.

Численное решение задачи. При проведении вычислительных экспериментов, в качестве модельной, рассматривалась задача о плоской деформации однородного изотропного упругого тела, занимающего прямоугольную область

$$\Omega=\{\,(x_1,x_2)\in R^2:\quad 0\leq x_1\leq L_1,\quad 0\leq x_2\leq L_2\,\}$$

и контактирующего с жестким штампом по грани $x_2=L_2$. Граничные условия на границе Γ принимались следующими:

$$\sigma_{22}=\sigma_{12}=0\,,\ q=0\ \text{ при }\ x_1=0,L_1\,;$$
$$u_2=0\,,\quad \sigma_{21}=0\,,\ T=0°C\ \text{ при }\ x_2=0\,.$$

Для исключения смещений тела как жесткого целого дополнительно принималось условие

$$u_1=0\,,\ \text{ при }\ x_2=L_1/2\,.$$

Форма и положение штампа описывались функцией

$$\Phi(x_1)=a\left(x_1-L_1/2\right)^2+b\,.$$

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент линейного расширения $\alpha_L = 10^{-5}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,47$ Вт/(м·K), размеры области $L_1 = L_2 = L = 1$ м, параметры штампа $a = -0,001L$, $b = 0,005L$.

Числовое значение коэффициента контактного теплообмена при неидеальном контакте определялось функцией

$$\alpha_p(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} 3 \cdot 10^3 \left(1 + \sigma_n^{0,6} / 10^4\right), & \sigma_n \le 0,\ \psi = 0; \\ 3 \cdot 10^3 \left(1 - \psi / 10^{-4}\right) * H(\psi), & \sigma_n = 0,\ \psi \ge 0. \end{cases}$$

Дискретизация области Ω производилась с помощью равномерной сетки треугольных конечных элементов первого порядка. Использовалась сетка 100 x 100 элементов.

На рис. 1 изображен график нормальных контактных напряжений на поверхности возможного контакта тела со штампом Γ_p. Кривая 1 соответствует напряжениям для нагретого до $T_p = 20\ °C$ штампа, кривая 2 – для ненагретого штампа с $T_p = 0$ °С.

На рис. 2 изображен график нормальных перемещений на поверхности возможного контакта тела со штампом Γ_p. Кривая 1 соответствует перемещениям для нагретого до $T_p = 20$ °С штампа, кривая 2 – для ненагретого штампа с $T_p = 0$ °С, кривая 3 соответствует положению штампа.

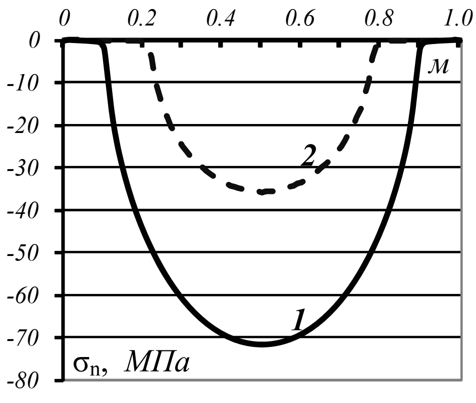

Рис. 1. Распределение напряжений

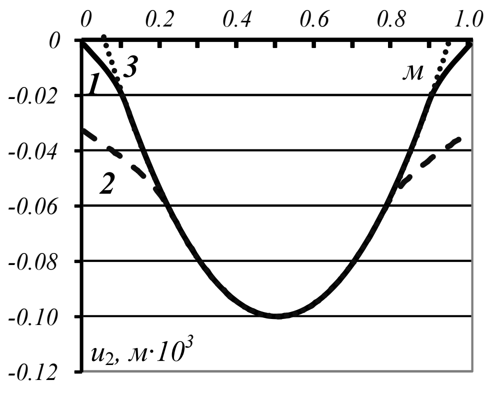

Рис. 2. Распределение перемещений

Выводы. При постановке задачи о контактном взаимодействии упругого тела с жестким нагретым выпуклым штампом использовались несвязанные уравнения термоупругости и условия неидеального теплового контакта. Рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, поскольку коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и штампом.

На основе вариационной формулировки задачи разработан итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решаются несвязанные задачи теории упругости и

теплопроводности. Для дискретизации задач использован метод конечных элементов. Полученные численные результаты подтвердили вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

Библиографические ссылки

1. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М., 1979. – 574 с.
2. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., 1980. – 383 с.
3. **Зарубин В. С.** Инженерные методы решения задач теплопроводности / В. С. Зарубин. – М., 1983. – 328 с.
4. **Кравчук А. С.** К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. − 1977. − Т.41.
5. Механика контактных взаимодействий. − М., 2001. − 672 с.
6. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии / П. Панагиотопулос. – М., 1989. – 496 с.
7. **Подстригач А. С**. Обобщенная термомеханика / А. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К., 1976. – 312 с.
8. **Шлыков Ю. П.** Контактный теплообмен / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин. – М. –Л., 1963. – 247 с.

Надійшла до редколегії 22.02.10