

УДК 539.3

Т. В. Ходанен, В. В. Лобода

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО/ПЬЕЗОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ЭЛЕКТРОИЗОЛИРОВАННОЙ МАГНИТНОПРОНИЦАЕМОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрена задача для трещины, на границе раздела двух пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов под действием механических напряжений, электрического и магнитного потоков на бесконечности. С использованием представления напряжений и перемещений через кусочно-аналитические вектор-функции задача сведена к задаче Дирихле-Римана. Получены соотношения для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений, электрической и магнитной индукций, скорости освобождения энергии и относительной длины зоны контакта берегов трещины. Изучено влияние указанных нагрузок на относительную длину зоны контакта и коэффициент интенсивности напряжений, а также на скорость освобождения энергии.

Ключевые слова: изотропный и пьезоэлектрический/пьезомагнитный биматериал, межфазная трещина, зона контакта, коэффициент интенсивности напряжений, скорость освобождения энергии.

Розглянуто задачу для тріщини на межі поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів під дією механічних напружень, електричного та магнітного потоків на нескінченності. З використанням представлення напружень і переміщень через кусково-аналітичні вектор-функції задача зведена до задачі Діріхле-Рімана. Отримано співвідношення для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної та магнітної індукцій, швидкості звільнення енергії та відносної довжини зони контакту берегів тріщини. Вивчено вплив зазначених навантажень на відносну довжину зони контакту та коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), а також на швидкість звільнення енергії.

Ключові слова: ізотропний і пьезоелектричний/пьезомагнітний біматеріал, міжфазна тріщина, зона контакту, коефіцієнт інтенсивності напружень, швидкість звільнення енергії.

The problem for the crack on the boundary between two piezoelectric/piezomagnetic materials under mechanical stress, as well as influence of electric and magnetic flows on the infinity was considered. The solution is resulted in Dirihle- Riman's problem by the presentation of stresses and dislocations with the use of sectionally analytical vector-function. The relations for the calculation of intensity stress coefficients, electric and magnetic induction, the rate of discharge energy and the relative length of side contact zone of the crack were obtained. The influence of the above mentioned loads on the relative length of side contact zone and the intensity stress coefficients as well as on the rate of discharged energy were studied.

Key words: isotropic and piezoelectric/piezomagnetic biomaterials, interphase crack, contact zone, intensity stress coefficient, energy release rate.

Введение. В последнее время в технике стали активно использоваться диэлектрические материалы с ярко выраженными как пьезоэлектрическими, так и пьезомагнитными свойствами. Способность преобразовывать один вид энергии в другой (магнитный, электрический, механический) обуславливает их применение не только при производстве датчиков и приводов, но также имеет важное значение при использовании в таких областях современной техники, как электро- и лазерное оборудование, сверхзвуковая аэродинамика, микроволновая, инфракрасная электроника [16], а также при разработке магнитоэлектрических запоминающих элементов, «разумных» датчиков и преобразователей [15]. Учитывая, что конструкционные элементы, представляющие собой биматериалы подобного рода, функционируют в условиях воздействия

значительных электрических и магнитных полей, актуальным является изучение влияния таких видов внешних нагрузок на параметры разрушения этих материалов.

Вплоть до последнего времени влияния электрических и магнитных полей на тела с трещинами рассматривались отдельно друг от друга в работах [1; 2; 9]. В последнее время появился ряд статей [10; 11; 16; 17; 20], посвященных задачам о совместном воздействии механических, электрических и магнитных полей на пьезоэлектрические/пьезомагнитные тела с трещинами.

Следует отметить, что в случае трещин между двумя пьезоэлектромагнитными материалами исследования ограничиваются классической моделью трещины [12; 13; 18; 19; 20], которая приводит к физически нереальному взаимопроникновению ее берегов.

Согласно результатам исследований пьезоэлектрических материалов с трещинами модель электропроницаемой трещины ближе к реальности, чем электроизолированной. Это же, как правило, имеет место и относительно предположения о магнитной проницаемости трещины. Но известно [6], что в отличие от электрической проницаемости, магнитная проницаемость некоторых материалов является даже более низкой, чем магнитная проницаемость вакуума. Поэтому исследование модели электропроницаемой и магнитноизолированной трещины с зоной контакта в пьезоэлектрическом/пьезомагнитном биматериале под действием различных физико-механических полей представляет существенный научный интерес и важно для практических приложений.

Постановка задачи и формулировка основных соотношений электромагнитоупругости. Рассматривается трещина на промежутке (c, b) между двумя полубесконечными пьезоэлектромагнитными полупространствами под действием внешней механической нагрузки, электрического и магнитного потоков (рис. 1).

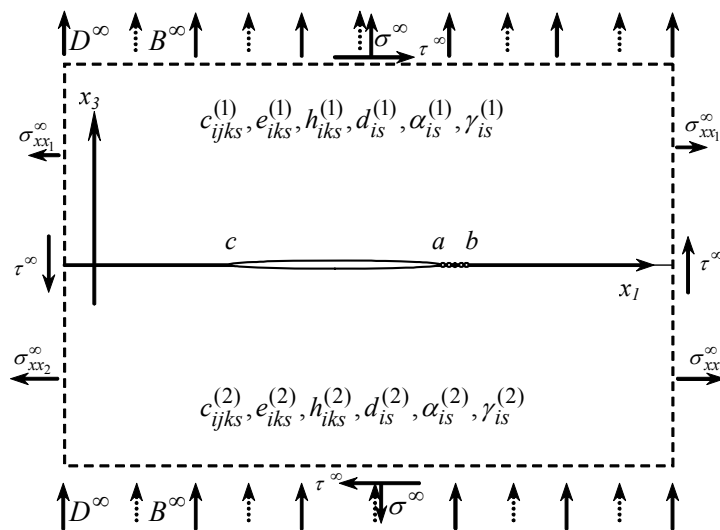


Рис. 1. Трещина с зоной контакта между двумя пьезоэлектрическими/пьезомагнитными материалами

Здесь $\sigma^\infty, \tau^\infty$ – равномерно распределенные нормальное и касательное напряжения соответственно, приложенные на бесконечности; D^∞, B^∞ – постоянные электрический и магнитный потоки соответственно; c_{ijks} – упругие, e_{iks} – пьезоэлектрические, h_{iks} – пьезомагнитные, d_{is} – электромагнитные константы, α_{is}, γ_{is} – диэлектрические и магнитные проницаемости. Для случая биматериала они ис-

пользуются с верхними индексами (1) и (2) для верхнего и нижнего полупространств соответственно. Напряжения $\sigma_{xx_1}^\infty, \sigma_{xx_2}^\infty$ определяются величинами $\sigma^\infty, \tau^\infty$ так, чтобы обеспечивалась непрерывность деформаций при переходе через линию раздела материалов [7]. Все поля предполагаются не зависящими от координаты x_2 .

Для решения поставленной задачи рассмотрим вначале общие соотношения электромагнитоупругости для пьезоэлектромагнитного материала. Определяющие соотношения имеют вид [18]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s, \\ D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s, \\ B_i = h_{iks} \varepsilon_{ks} + d_{is} E_s + \gamma_{is} H_s, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_i, B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукций; E_i, H_i – напряженности электрического и магнитного полей.

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad (2)$$

где индекс « j » означает дифференцирование по x_j . Выражения для деформаций, напряженности электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\varphi_{,i}, \quad (3)$$

где ϕ, φ – электрический и магнитный потенциалы.

Из (1), (2), (3) получаются уравнения:

$$\begin{cases} (c_{ijks} u_k + e_{sij} \phi - h_{sij} \varphi)_{,si} = 0, \\ (e_{iks} u_k - \alpha_{is} \phi - d_{is} \varphi)_{,si} = 0, \\ (h_{iks} u_k - d_{is} \phi - \gamma_{is} \varphi)_{,si} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для наиболее важного для практики трансверсально-изотропного материала с осью симметрии x_3 в условиях плоской деформации в плоскости (x_1, x_3) уравнения (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & h_{31} \\ 0 & h_{33} \\ h_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{15} \\ h_{31} & h_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из соотношений (5) следует, что в рассматриваемом случае материала большая часть коэффициентов в соотношениях (1) равна 0. При переходе от соотношений (4) к (5) используется общепринятая перенумерация индексов [14], аналогичная [5]. Следует отметить, что к указанным материалам относятся пьезоэлектрические/пьезомагнитные керамики.

Введем векторы:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \phi, \varphi\}^T, \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \quad (6)$$

Поскольку все поля не зависят от координаты x_2 , то решение уравнений (4) получаем в соответствии с методом, предложенным в [8] для анизотропного материала.

Принимается, что вектор \mathbf{t} непрерывен вдоль всей поверхности раздела материалов, и на части $L = \{(-\infty, c) \cup (b, \infty)\}$ интерфейса $-\infty < x_1 < \infty, x_3 = 0$ вектор \mathbf{V} механически, электрически и магнитно непрерывен, то есть граничные условия на поверхности раздела $x_3 = 0$ следующие:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L. \quad (8)$$

С учетом равенства (7) получаем представления:

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (10)$$

где \mathbf{G} – биматериальная матрица, определяемая константами материалов аналогично [3], $\mathbf{W}(z)$ – вектор-функция, аналитическая всюду, включая сцепленные участки интерфейса, и $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$.

С помощью полученных представлений (9), (10) могут быть сформулированы задачи линейного сопряжения для широкого круга смешанных задач для пьезоэлектрической/пьезомагнитной биматериальной плоскости.

В дальнейшем будем рассматривать плоскую деформацию биматериальных тел, при которой матрица \mathbf{G} без вторых строки и столбца будет иметь размерность 4×4 .

Биматериал с электропроницаемой магнитноизолированной трещиной с зоной контакта. Поскольку в [3] рассмотрен случай однородного материала, а также неоднородного материала с электромагнитнопроницаемой трещиной, то далее предполагаем, что открытая часть трещины электропроницаемая и магнитноизолированная. То есть, граничные условия в этой зоне имеют вид:

$$\sigma_{13}^\pm = 0, \quad \sigma_{33}^\pm = 0, \quad [\phi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad B_3 = 0 \text{ для } \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{33} \\ B_3 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Граничные же условия на участке контакта будут иметь вид:

$$[u_3] = 0, \quad \sigma_{13}^\pm = 0, \quad [\phi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad [\varphi] = 0, \quad [B_3] = 0, \quad [\sigma_{33}] = 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что $[\phi] = 0$ для всего интерфейса, и выполняя анализ, аналогичный изложенному в [3], получаем: $W_4(z) = W_4^0 = \text{const}$ во всей плоскости, а это значит, что W_4^0 определяется внешней нагрузкой. Вводя следующие векторы:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{33} \\ B_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_3 \\ \Psi_5 \end{Bmatrix} \text{ и матрицу } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & R_{15} \\ R_{31} & R_{33} & R_{35} \\ R_{51} & R_{53} & R_{55} \end{bmatrix}$$

с компонентами $e_1 = 0, e_3 = 2G_{34}W_{40}, e_5 = 2G_{54}W_{40}, \Psi_i = W_i, R_{ij} = G_{ij} \ (i, j = 1, 3, 5)$, представление (10) без второй и четвертой строк может быть записано в виде:

$$\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R} \mathbf{\Psi}^+(x_1) - \bar{\mathbf{R}} \mathbf{\Psi}^-(x_1), \quad (13)$$

Преобразуя далее уравнения (13) приходим к следующим соотношениям:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5} B_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Omega_j^+(x_1) + \gamma_j \Omega_j^-(x_1) + \eta_j, \quad (14)$$

$$n_{j1} [u_1'(x_1)] + i n_{j3} [u_3'(x_1)] + i n_{j5} [\phi'(x_1)] = \Omega_j^+(x_1) - \Omega_j^-(x_1), \quad (15)$$

где

$$\Omega_j(z) = n_{j1} \Psi_1(z) + i \{ n_{j3} \Psi_3(z) + n_{j5} \Psi_5(z) \},$$

а $\eta_j = \mathbf{S}_j \mathbf{e} = 2(G_{34} + m_{j3} G_{54}) W_{40}, m_{j5} = S_{j5}, m_{j1} = -i S_{j1}, n_{j1} = Y_{j1}, n_{j3} = -i Y_{j3}, n_{j5} = -i Y_{j5}$ и $m_{jl}, n_{jl} \ (l = 1, 3, 5)$ являются действительными, $\mathbf{Y}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{R}$. Кроме того, γ_j и $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j5}] \ (j = 1, 3, 5)$ представляют собой соответственно собственное значение и собственный вектор матрицы $(\gamma \mathbf{R}^T + \bar{\mathbf{R}}^T)$. Следует отметить, что корни уравнения $\det(\gamma \mathbf{R}^T + \bar{\mathbf{R}}^T) = 0$ могут быть представлены в виде:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_5 = 1,$$

где

$$\delta^2 = \frac{g_{15}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{55} - 2 g_{15} g_{13} g_{35}}{g_{11}(g_{33} g_{55} - g_{35}^2)}.$$

Для исследуемых в данной работе пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов выполняется условие $\delta^2 > 0$, и в этом случае справедливы указанные выше свойства коэффициентов m_{jl}, n_{jl} .

Принимая во внимание, что для $x_1 \in L$ выполняются соотношения $\Omega_j^+(x_1) = \Omega_j^-(x_1) = \Omega_j(x_1)$, получаем

$$(1 + \gamma_j) \Omega_j(x_1) = \mathbf{S}_j \mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \rightarrow \infty.$$

Поскольку функции $\Omega_j(z)$ являются аналитическими во всей плоскости, разрезанной вдоль $L_1 \cup L_2$ и учитывая, что $\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) = [\tau^\infty, \sigma^\infty, B^\infty]^T$ для $x_1 \rightarrow \infty$, получаем

$$\Omega_j(z) = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}B^\infty - \eta_j) \text{ для } z \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Вводя далее новую функцию

$$\Theta_j(z) = \Omega_j(z) + (1 + \gamma_j)^{-1} \eta_j,$$

уравнения (14), (15) и (16) можно записать в форме:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5}B_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Theta_j^+(x_1) + \gamma_j\Theta_j^-(x_1), \quad (17)$$

$$n_{j1}[u_1'(x_1)] + in_{j3}[u_3'(x_1)] + in_{j5}[\phi'(x_1)] = \Theta_j^+(x_1) - \Theta_j^-(x_1), \quad (18)$$

$$\Theta_j(z)|_{z \rightarrow \infty} = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}B^\infty).$$

Удовлетворяя с использованием уравнений (17), (18) для $j=1$ условиям на интерфейсе (11) и (12), приходим к следующей комбинированной задаче Дирихле-Римана

$$\Theta_1^+(x_1) + \gamma_1\Theta_1^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (c, a),$$

$$Im\Theta_1^\pm(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (a, b).$$

Находя решение этой задачи и используя соотношения (17), (18) приходим к следующим выражениям на линии раздела материалов

для $x_1 > b$:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}B_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \left[\frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} + \frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1 - b}} \right] \frac{\eta_1 \exp[i\phi(x_1)]}{\sqrt{x_1 - c}}, \quad (19)$$

для $x_1 \in L_2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}B_3^{(1)}(x_1, 0) = & \frac{\eta_1 P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(b - x_1)}} \left[\frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} ch\phi_0(x_1) + sh\phi_0(x_1) \right] + \\ & + \frac{\eta_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \left[ch\phi_0(x_1) + \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} sh\phi_0(x_1) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$[u_1'(x_1, 0)] = \frac{2}{n_{11}\sqrt{x_1 - c}} \left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b - x_1}} ch\phi_0(x_1) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} sh\phi_0(x_1) \right], \quad (21)$$

для $x_1 \in L_1$:

$$n_{11}[u'_1(x_1, 0)] + i\{n_{13}[u'_3(x_1, 0)] + n_{14}[\varphi(x_1, 0)]\} = \\ = 2\sqrt{\alpha}\left[\frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - i\frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{\exp[i\phi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}}, \quad (22)$$

где

$$C_1 = -\tilde{\tau}_1 \cos \beta - \tilde{\sigma}_1 \sin \beta, \quad D_1 = \tilde{\sigma}_1 \cos \beta - \tilde{\tau}_1 \sin \beta, \\ C_2 = -\frac{c+b}{2}C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2}D_1, \quad \alpha = \frac{(\gamma_1+1)}{4\gamma_1}. \\ \tilde{\sigma}_j = \frac{1}{1+\gamma_j}(\sigma^\infty + m_{j5}B^\infty), \quad \tilde{\tau}_j = -m_{j1}\tau^\infty / (1+\gamma_j), \quad j=1,3,5.$$

Для случая магнитноизолированной трещины формулы (19) – (22) не дают возможности найти все необходимые характеристики на линии раздела материалов. Используем для этого выражения (17), (18) еще и для $j=5$. Принимая во внимание, что $m_{51}=n_{51}=0$, $\gamma_5=1$, и удовлетворяя с помощью представлений (17) для $j=5$ условию (11) на интерфейсе, приходим к следующей задаче линейного сопряжения:

$$\Theta_5^+(x_1) + \Theta_5^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1$$

для функции $\Theta_5(z)$, аналитической во всей плоскости, разрезанной только вдоль L_1 . Решение этой задачи получено методом [4] в следующей форме:

$$\Theta_5(z) = \frac{\Sigma_5}{2} \left(z - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}, \quad (23)$$

где $\Sigma_5 = \sigma^\infty + m_{55}B^\infty$.

С использованием формулы (23) из уравнений (17), (18) для $j=5$ получаем:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{55}B_3^{(1)}(x_1, 0) = \Sigma_5 \left(x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \quad \text{для } x_1 > a, \quad (24)$$

$$n_{53}[u'_3(x_1, 0)] + n_{55}[\varphi'(x_1, 0)] = -\Sigma_5 \left(x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} \quad \text{для } x_1 \in L_1. \quad (25)$$

Напряжение $\sigma_{33}^{(1)}$ и магнитная индукция $B_3^{(1)}$ могут быть легко найдены из уравнений (19) и (24) для $x_1 > b$ и из уравнений (20) и (24) для $x_1 \in L_2$.

Нахождение коэффициентов интенсивности и скорости освобождения энергии. Введем следующие коэффициенты интенсивности:

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)}\sigma_{33}(x_1, 0), \quad k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2(x_1-b)}\sigma_{13}(x_1, 0), \quad (26)$$

$$k_4 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)}D_3(x_1, 0), \quad k_5 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)}B_3(x_1, 0). \quad (27)$$

Из выражений (24), (25) коэффициенты интенсивности, введенные формулами (26), (27), могут быть найдены в виде:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{1}{m_{55} - m_{15}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left[m_{55}\omega - m_{15}\Sigma_5 \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \right], \\
 k_2 &= -\frac{1}{m_{11}} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left[\omega_2 + 2\varepsilon_1 \sqrt{1-\lambda} \omega_1 \right], \\
 k_5 &= -\frac{1}{m_{55} - m_{15}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left[\omega - \Sigma_5 \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \right],
 \end{aligned} \quad (28)$$

где $\omega_1 = \Sigma_1 \cos \beta + m_{11} \tau \sin \beta$, $\omega_2 = \Sigma_1 \sin \beta - m_{11} \tau \cos \beta$, $\omega = \sqrt{1-\lambda} \omega_1 - 2\varepsilon \omega_2$,
 $\Sigma_1 = \sigma^\infty + m_{15} B^\infty$.

Использование уравнений (22) и (25) приводит к выражениям для $[u'_3]$ и $[\varphi']$, которые для $x_1 \rightarrow a-0$ имеют вид:

$$[u'_3(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{11}k_1 + \Theta_{15}k_5), \quad (29)$$

$$[\varphi'(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{51}k_1 + \Theta_{55}k_5), \quad (30)$$

где $\Theta_{11} = (n_{55}\sqrt{\alpha/\gamma_1} - n_{15})/\Delta_n$; $\Theta_{15} = (m_{15}n_{55}\sqrt{\alpha/\gamma_1} - m_{55}n_{15})/\Delta_n$,
 $\Theta_{51} = (n_{13} - n_{53}\sqrt{\alpha/\gamma_1})/\Delta_n$; $\Theta_{55} = (m_{55}n_{13} - m_{15}n_{43}\sqrt{\alpha/\gamma_1})/\Delta_n$,
 $\Delta_n = n_{13}n_{55} - n_{53}n_{15}$.

Кроме того, формула (21) для $x_1 \rightarrow b-0$ приводит к выражению

$$[u'_1(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} \Theta_{22}k_2, \quad (31)$$

где $\Theta_{22} = -\frac{2m_{11}}{n_{11}(1+\gamma_1)}$.

Введем далее скорости освобождения энергии (СОЭ) для точек a и b формулами:

$$G_1 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} \left\{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) [u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + B_3^{(1)}(x_1, 0) [\varphi(x_1 - \Delta l, 0)] \right\} dx_1, \quad (32)$$

$$G_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \sigma_{31}^{(1)}(x_1, 0) [u_1(x_1 - \Delta l, 0)] dx_1. \quad (33)$$

Подставляя выражения для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, $B_3^{(1)}(x_1, 0)$, $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$ из уравнений (19), (20), (24) и интегрируя выражения (29) – (31), после вычисления интегралов (32), (33) получаем следующие выражения:

$$G_1 = [\Theta_{11}k_1^2 + \Theta_{55}k_5^2 + (\Theta_{15} + \Theta_{51})k_1k_5] / 4, G_2 = \Theta_{22}k_2^2 / 4. \quad (34)$$

Полная величина СОЭ G может быть найдена как сумма G_1 и G_2 .

Рассмотрим теперь нахождение $D_3^{(1)}(x_1, 0)$. Принимая во внимание, что $[u_1'(x_1)] = W_1^+(x_1) - W_1^-(x_1)$, третья, четвертая и пятая компоненты уравнения (10) могут быть записаны в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33}^{(1)} \\ D_3^{(1)} \\ B_3^{(1)} \end{Bmatrix}(x_1, 0) = \begin{Bmatrix} g_{31} \\ g_{41} \\ g_{51} \end{Bmatrix} u_1'(x_1) + i \begin{bmatrix} g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) \\ 2W_{40} \\ W_5^+(x_1) + W_5^-(x_1) \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Нахождение $W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)$ и $W_5^+(x_1) + W_5^-(x_1)$ из первого и третьего уравнений (35) соответственно, и подстановка во второе уравнение дает выражение для $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ через $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, $B_3^{(1)}(x_1, 0)$ и $[u_1'(x_1)]$. На основе этого выражения получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности электрической индукции (27):

$$k_4 = l_1 k_1 + l_5 k_5,$$

где

$$l_1 = (g_{41} - p_3)\gamma_0 + p_1, \quad l_5 = (g_{41} - p_3)\gamma_0 m_{14} + p_2, \quad \gamma_0 = (\gamma_1 - 1) / (2n_{11}\gamma_1),$$

$$p_1 = (g_{43}g_{55} - g_{45}g_{53}) / \Delta_0, \quad p_2 = (g_{45}g_{33} - g_{43}g_{35}) / \Delta_0,$$

$$p_3 = (g_{43}g_{55}g_{31} - g_{43}g_{35}g_{51} - g_{45}g_{53}g_{31} + g_{45}g_{33}g_{51}) / \Delta_0, \quad \Delta_0 = g_{55}g_{33} - g_{53}g_{35}.$$

Следует отметить, что нормальное напряжение, а также электрическая и магнитная индукции сингулярны в левой окрестности вершины трещины. Вводя следующие коэффициенты интенсивности:

$$k_1^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} \sigma_{33}(x_1, 0),$$

$$k_4^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} D_3(x_1, 0), \quad k_5^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} B_3(x_1, 0)$$

и используя формулы (20), (21), (24), а также выражения для $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ через $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, $B_3^{(1)}(x_1, 0)$ и $[u_1'(x_1)]$, получаем:

$$k_1^b = \frac{m_{11}m_{44}}{m_{44} - m_{14}} \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} k_2, \quad k_5^b = -m_{44}^{-1} k_1^b, \quad k_4^b = (g_{41} - p_3) \frac{2m_{11}}{n_{11}(1 + \gamma_1)} k_2 + p_1 k_1^b + p_2 k_5^b.$$

Из последних формул легко видеть, что коэффициенты интенсивности в точке b полностью определяются коэффициентами интенсивности сдвигового напряжения k_2 .

Нахождение реальной длины зоны контакта. Рассмотрим теперь нахождение реальной длины зоны контакта. Полученное решение будет физически корректным, если выполняются следующие неравенства

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0 \quad \text{для } x_1 \in (a, b), \quad [u_3] \geq 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, a). \quad (36)$$

Необходимым условием для выполнения этих неравенств является выполнение равенства:

$$k_1 = 0. \quad (37)$$

Для произвольных значений λ это уравнение может быть сформулировано с помощью представления (28). Для малых же значений λ указанное уравнение может быть записано в виде

$$\operatorname{Re}\{e^{i\beta}(1+2i\varepsilon_1)[\chi_1-i\chi_2]\}=\sqrt{\alpha}m_{14}m_{44}^{-1}\chi_3, \quad (38)$$

где

$$k=\frac{\tau^\infty}{\sigma^\infty}, \quad \chi_1=1+m_{15}\frac{B^\infty}{\sigma^\infty}, \quad \chi_2=m_{11}k, \quad \chi_3=1+m_{55}\frac{B^\infty}{\sigma^\infty}.$$

Принимая во внимание, что только β зависит от λ в уравнении (38), точное аналитическое решение этого уравнения может быть представлено в виде:

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4 \exp(g_1 / \varepsilon_1), \quad (39)$$

где

$$g_1 = (-1)^n \left[\sin^{-1} \left(\frac{\chi_1 + 2\varepsilon_1 \chi_2}{\Delta} \right) - \sin^{-1}(\zeta_i) \right] + \pi n, \\ \zeta_1 = \sqrt{\alpha} \frac{m_{14}}{\Delta m_{44}} \chi_3, \quad \zeta_2 = \sqrt{\gamma_1} \frac{n_{14}}{\Delta n_{44}} \chi_3, \quad \Delta^2 = (1 + 4\varepsilon_1^2)(\chi_1^2 + \chi_2^2).$$

Величину n следует выбрать так, чтобы найденное λ представляло собой максимальный корень уравнения (38) из интервала $(0,1)$. Формулы (39) можно использовать при малых значениях λ_0 (в основном для $\lambda_0 < 0,01$). Для больших же значений длины зоны контакта необходимо находить численное решение уравнения (37).

Анализ результатов и выводы. Численные результаты для электропроницаемой и магнитноизолированной трещины получены для биматериала $\text{BaTiO}_3\text{--CoFe}_2\text{O}_4$. Константы этого материала для различных значений объемного содержания (V_f) BaTiO_3 в композите взяты из [18] и приведены в таблице 1. Указанный материал является одним из наиболее характерных представителей пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов.

Таблица 1

Физические характеристики материалов					
Константы материала	$V_f = 0,1$	$V_f = 0,9$	Константы материала	$V_f = 0,1$	$V_f = 0,9$
c_{11} , ГПа	274	178,0	$\alpha_{11} (\times 10^{-10})$, Кл ² /Н·м ²	11,9	100,9
c_{13} , ГПа	161	87,2	$\alpha_{33} (\times 10^{-10})$, Кл ² /Н·м ²	13,4	113,5
c_{33} , ГПа	259	172,8	h_{31} , Н/А·м	522,3	58,03
c_{44} , ГПа	45	43,2	h_{33} , Н/А·м	629,7	69,97
e_{31} , Кл/м ²	-4,4	-3,96	h_{15} , Н/А·м	495,0	55,00
e_{33} , Кл/м ²	1,86	16,74	$\gamma_{11} (\times 10^{-6})$, Н·с ² /Кл ²	531,5	63,5
e_{15} , Кл/м ²	1,16	10,44	$\gamma_{33} (\times 10^{-6})$, Н·с ² /Кл ²	142,3	24,7

На бесконечности задавалось равномерное растяжение напряжением $\sigma^\infty = 1$ МПа и длина трещины считалась равной $l=2$ мм.

Изменение относительной длины зоны контакта в зависимости от отношения интенсивностей магнитного потока и нормального напряжения на бесконечности показано на рис. 2. Кривые 1, 2 и 3 построены для отношения касательного и нормального напряжений на бесконечности k , равного 1, 2 и 5, соответственно.

На рис. 3 показано изменение нормированного КИН $k_{2n} = k_2 / (\sigma \sqrt{l})$ в зависимости от B^∞ / σ^∞ и тех же значений k , что и на рис. 2. Легко видеть, что величина k_2 существенно зависит от k , а его зависимость от интенсивности магнитного потока достаточно незначительна. Видно также, что для меньших величин $\sqrt{(\sigma^\infty)^2 + (\tau^\infty)^2}$ (кривая 1) зависимость k_2 от B^∞ / σ^∞ является более существенной, чем для больших значений этой величины.

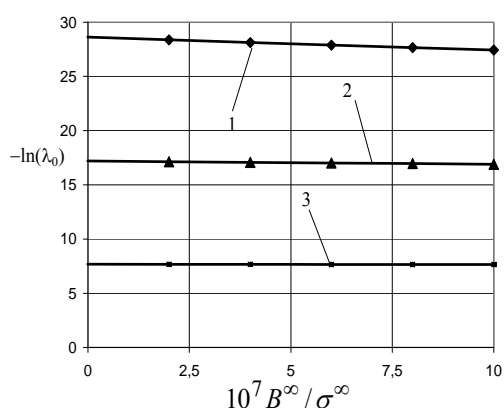


Рис. 2. Относительная длина зоны контакта

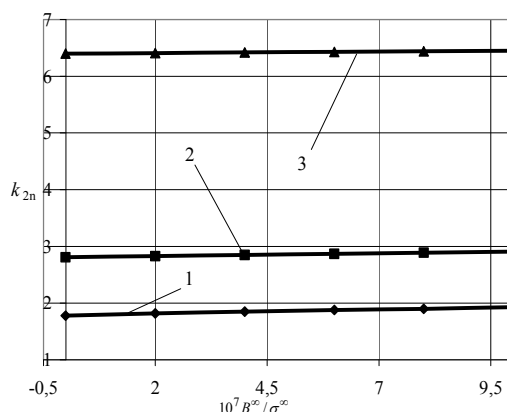


Рис. 3. Нормированный коэффициент интенсивности напряжения

Изменение СОЭ в зависимости от отношения интенсивностей магнитного потока и нормального напряжения на бесконечности показано на рис. 4. Кривые 1, 2 построены для отношения касательного и нормального напряжения на бесконечности k , равного 5 и 2 соответственно. Пунктирные линии соответствуют механической части G_2 (34), а сплошные – суммарной СОЭ G . Кривая 3 соответствует G_1 и является практически одинаковой для обоих значений k .

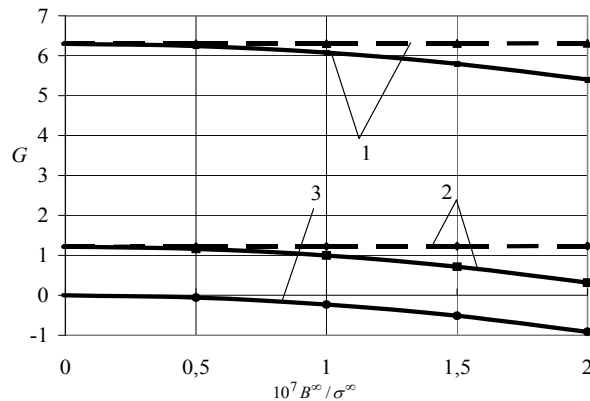


Рис. 4. Скорость освобождения энергии

Из полученных результатов следует, что рост интенсивности магнитного потока приводит к уменьшению суммарной скорости освобождения энергии, то есть, магнитный поток оказывает влияние, подобное влиянию электрического потока, сдерживая рост трещины.

Заключение. Рассмотрена плоская задача для биматериального пьезоэлектрического/пьезомагнитного пространства с трещиной в области раздела материалов под действием удаленной механической нагрузки, а также электрических и магнитных потоков. С использованием аппарата теории функции комплексного переменного получено аналитическое решение в рамках модели, учитывающей контакт берегов трещины. Графическим путем продемонстрировано влияние интенсивности магнитного потока на длину зоны контакта, коэффициент интенсивности напряжений и скорость освобождения энергии.

Библиографические ссылки

1. **Баева А.И.** Магнитоупругое состояние многосвязного полупространства и полуплоскости с отверстиями и трещинами / А. И. Баева, О.И. Бороненко // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 63–72.
2. **Калоеров С.А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко – Донецк, – 2007. – 268 с.
3. **Лобода В.В.** Межфазная трещина в пьезоэлектромагнитном биматериале под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков / В.В. Лобода, Т.В. Ходанен // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 2. – С. 117–129.
4. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 707 с.
5. **Партон В.З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М., 1988. – 471 с.
6. **Савельев И.В.** Электричество (Курс общей физики; т. 2) / И.В. Савельев. – М., 1970. – 432 с.
7. **Черепанов Г.П.** О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами / Г.П. Черепанов. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.
8. **Eshelby J.D.** Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J.D. Eshelby, W.T. Read, W. Shockley // Acta Metall. – 1953. – 1. – P. 251–259.
9. **Gao C.-F.** Effects of magnetic fields on cracks in a soft ferromagnetic material / C.-F. Gao, Y.-W. Mai, B.-L. Wang // Engn. Fracture Mech. – 2008. – 75. – P. 4863–4875.

10. **Gao C.-F.** Fracture mechanics for a mode III crack in a magnetoelectroelastic solid / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Solids and Structures. – 2004. – 41. – P. 6613–6629.
11. **Gao C.-F.** Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part I: exact solution of a crack / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 969–981.
12. **Gao C.-F.** Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part II: general solution of collinear cracks / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 983–994.
13. **Gao C.-F.** Interfacial crack problems in magneto-electroelastic solids / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 2105–2121.
14. **Herrmann K.P.** Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127–143.
15. **Liu J.X.** A moving dislocation in a magneto-electro-elastic solid / J.X. Liu, A.K. Soh, D. N. Fang // Mechanics Research Communications. – 2005. – 32. – P. 504–513.
16. **Rao B.N.** Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magnetoelectroelastic materials / B.N. Rao, M. Kuna // Int. J. Fract. – 2008. – 153. – P. 15–37.
17. **Sih G.C.** Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magnetoelectroelastic materials / G.C. Sih, R. Jones, Z.F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 40. – P. 161–186.
18. **Sih G.C.** Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃–CoFe₂O₄ composite / G.C. Sih, Z.F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 39. – P. 209–227.
19. **Zhou Z.-G.** Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites / Z.-G. Zhou, B. Wang, Yu-G. Sun // Int. J. Engineering Science. – 2004. – 42. – P. 1155–1167.
20. **Zhou Z.-G.** The closed form solution of a Mode-I crack in the piezoelectric/piezomagnetic materials / Z.-G. Zhou, P.-W. Zhang, L.-Z. Wu // Int. J. Solids and Structures. – 2007. – 44. – P. 419–435.

Надійшла до редколегії 15.02.10

УДК 539.3

Н.Ю. Швайко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ЭФФЕКТ ФЕЙГЕНА И ЕГО ОПИСАНИЕ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВАННОЙ НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

С использованием варианта теории пластичности [4], основанной на концепции скольжения, дано физическое объяснение и показана возможность аналитического описания установленного в эксперименте эффекта Фейгена [10]. Его сущность заключается в следующем. Закрученный за пределы упругости тонкостенный трубчатый образец после разгрузки с последующим приложением растягивающей силы в значительной степени раскручивается. Тривиальный при конечной деформации указанный результат требует специального рассмотрения и объяснения при малых упругопластических деформациях в геометрически линейной постановке задачи.

Ключевые слова: теория пластичности, эффект Фейгена, концепция скольжения.

В царині теорії пластичності [4], заснованої на концепції ковзання, дано тлумачення та з'ясована можливість аналітичного опису встановленого в експерименті ефекту Фейгена [10], сенс якого полягає в наступному. Тонкостінний трубчастий стрижень після попереднього закруту за межі пружності і розвантаження під дією прикладеної осової сили розтягується з частковим розкрутом. Указаний результат, тривіальний при скінчених деформаціях, потребує спе-