

10. **Gao C.-F.** Fracture mechanics for a mode III crack in a magneto-electroelastic solid / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // *Int. J. Solids and Structures*. – 2004. – 41. – P. 6613–6629.
11. **Gao C.-F.** Crack problems in magneto-electroelastic solids. Part I: exact solution of a crack / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // *Int. J. Engineering Science*. – 2003. – 41. – P. 969–981.
12. **Gao C.-F.** Crack problems in magneto-electroelastic solids. Part II: general solution of collinear cracks / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // *Int. J. Engineering Science*. – 2003. – 41. – P. 983–994.
13. **Gao C.-F.** Interfacial crack problems in magneto-electroelastic solids / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // *Int. J. Engineering Science*. – 2003. – 41. – P. 2105–2121.
14. **Herrmann K.P.** Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // *Arch. Appl. Mech.* – 2000. – 70. – P. 127–143.
15. **Liu J.X.** A moving dislocation in a magneto-electro-elastic solid / J.X. Liu, A.K. Soh, D. N. Fang // *Mechanics Research Communications*. – 2005. – 32. – P. 504–513.
16. **Rao B.N.** Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magneto-electroelastic materials / B.N. Rao, M. Kuna // *Int. J. Fract.* – 2008. – 153. – P. 15–37.
17. **Sih G.C.** Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magneto-electroelastic materials / G.C. Sih, R. Jones, Z.F. Song // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – 40. – P. 161–186.
18. **Sih G.C.** Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite / G.C. Sih, Z.F. Song // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – 39. – P. 209–227.
19. **Zhou Z.-G.** Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites / Z.-G. Zhou, B. Wang, Yu-G. Sun // *Int. J. Engineering Science*. – 2004. – 42. – P. 1155–1167.
20. **Zhou Z.-G.** The closed form solution of a Mode-I crack in the piezoelectric/piezomagnetic materials / Z.-G. Zhou, P.-W. Zhang, L.-Z. Wu // *Int. J. Solids and Structures*. – 2007. – 44. – P. 419–435.

Надійшла до редколегії 15.02.10

УДК 539.3

Н.Ю. Швайко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **ЭФФЕКТ ФЕЙГЕНА И ЕГО ОПИСАНИЕ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВАННОЙ НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ**

С использованием варианта теории пластичности [4], основанной на концепции скольжения, дано физическое объяснение и показана возможность аналитического описания установленного в эксперименте эффекта Фейгена [10]. Его сущность заключается в следующем. Закрученный за пределы упругости тонкостенный трубчатый образец после разгрузки с последующим приложением растягивающей силы в значительной степени раскручивается. Тривиальный при конечной деформации указанный результат требует специального рассмотрения и объяснения при малых упругопластических деформациях в геометрически линейной постановке задачи.

*Ключевые слова: теория пластичности, эффект Фейгена, концепция скольжения.*

В царині теорії пластичності [4], заснованої на концепції ковзання, дано тлумачення та з'ясована можливість аналітичного опису встановленого в експерименті ефекту Фейгена [10], сенс якого полягає в наступному. Тонкостінний трубчастий стрижень після попереднього закруту за межі пружності і розвантаження під дією прикладеної освової сили розтягується з частковим розкрутом. Указаний результат, тривіальний при скінчених деформаціях, потребує спе-

ціального вивчення і пояснення при малих пружнопластичних деформаціях в геометрично лінійній постановці задачі.

*Ключові слова:* теорія пластичності, ефект Фейгана, концепція ковзання.

Using the version [4] of plasticity theory the physical explanation and the analytical description are given for the effect established experimentally by M. Feigen [10]. The essence of Feigen effect is following: thin-walled tube, which was twisted outside the limit of elasticity, unloaded and then subjected to the tension load, untwists substantially. This result is trivial considering deformation to be finite, but it requires special explanation when deformation is small elastoplastic and the problem is linear geometrically.

*Keywords:* plasticity theory, Feigen effect, sliding conception.

**Введение.** Для обоснования корректности варианта теории пластичности [4] показано [5–7], что он удовлетворяет постулату Друккера, принципу макродетерминизма (устойчивости процесса деформирования), дифференциальной потенциальности определяющих уравнений связи  $\dot{\varepsilon}_{mn} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ , описывает эффект Баушингера и другие явления вторичного плана, установленные в эксперименте при сложном нагружении конструкционных материалов. Настоящее исследование посвящено изучению возможности аналитического описания эффекта Фейгена [10] в рамках теории пластичности [4], основанной на концепции скольжения [9].

**Процесс нагружения.** Рассмотрим процесс нагружения элемента тела, который в плоскости  $OS_1S_3$  пятимерного пространства Ильюшина [1] характеризуется траекторией  $OAOb$  (рис.1). В рамках модели плоскопластической среды [4] задача определения деформации при произвольном в плоскости  $OS_1S_3$  нагружении сводится к определению скорости интенсивности скольжений  $\varphi'_t(\theta, t)$  и границ  $-\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  множества направлений скольжений из системы интегральных уравнений

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), |\theta - \theta_0|] \varphi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2\theta_0 - 2\phi_0], \quad (1)$$

$$\tau_s + \int_{t_0}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \phi(t)],$$

$$\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \quad (2)$$

Здесь используются принятые ранее [8] обозначения, в частности:  $\omega = |\theta - \theta_0|$  – угол между направлением сдвига  $\mathbf{n}(\theta)$  и произвольным направлением  $\mathbf{m}(\theta_0)$  в плоскости деформации;  $t_0, t$  – начальный и произвольный моменты пластического деформирования; за параметр времени берется длина дуги траектории нагружения.

$$S(t) = [S_1^2(t) + S_3^2(t)]^{1/2}, \quad S_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sigma_x(t) - \sigma_y(t)], \quad S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t),$$

$$\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_1(t_0), \quad 2\phi_1(t) = \text{arctg}[S_3(t) / S_1(t)], \quad \phi_0 = \phi_1(t_0),$$

$$\vartheta(t) = \text{arctg}(dS_3 / dS_1), \quad dt = [dS_1^2 + dS_3^2]^{1/2}. \quad (3)$$

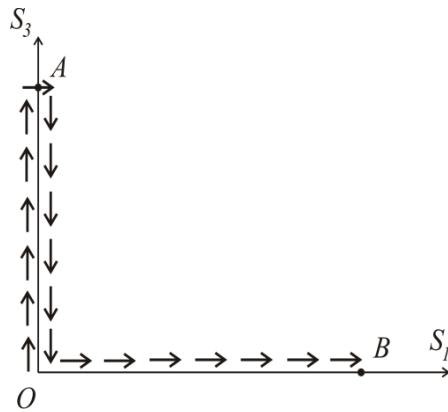


Рис.1. Траектория нагружения OAOB образца при исследовании эффекта Фейгена

Универсальная функция материала  $R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega]$  представляется в виде произведения двух функций

$$R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega] = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*] F(\omega), \tag{4}$$

одна из которых ( $F$ ) учитывает перекрестное взаимодействие систем скольжения и формирует деформационную анизотропию материала, а вторая ( $\Pi$ ) – влияние на это взаимодействие интенсивности пластической деформации  $\varepsilon_i^{(p)}(t)$  и ее экстремальных значений  $\lambda_k^*$ , соответствующих изменению знака скорости  $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t)$  на противоположный. Если  $\varepsilon_i^{(p)}$  неубывающая функция времени ( $\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$ ), то вместо (4) принимаем  $R = \Pi_0(\varepsilon_i^{(p)}) F(\omega)$ .

При известных  $\varphi_i'(\theta, t)$ ,  $\alpha_{1,2}(t)$  компоненты вектора скорости плоскопластической деформации

$$\dot{\Gamma}^{(p)} = \mathbf{i}_1 \dot{\Gamma}_1^{(p)} + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}_3^{(p)}, \left( \dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\dot{\varepsilon}_x^{(p)} - \dot{\varepsilon}_y^{(p)}), \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \sqrt{2} \dot{\varepsilon}_{xy}^{(p)} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}_{xy} \right)$$

определяются формулами:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi_1'(\theta, t) \cos 2(\theta + \phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi_1'(\theta, t) \sin 2(\theta + \phi_0) d\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Дальнейшее исследование проведем для функции упрочнения

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta(\pi/2 - \omega), \tag{6}$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция Дирака,  $a_i \sim const$ . Методика решения системы интегральных уравнений (1) и (2) с использованием функции упрочнения  $F(\omega)$  (6) из-

ложена, в частности, в работе [8]. На первом этапе нагружения  $OA$  ( $S_1(t) \equiv 0, S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t), t \in [t_0, t_A]$ ) максимальные касательные напряжения  $\tau_{max}^{(1)}(t) \equiv \tau_{xy}(t) = \tau_{yx}(t)$  действуют по площадкам, ортогональным к координатным осям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 2). Параметры отрезка  $OA$  траектории нагружения соответственно равны  $\vartheta(t) = \pi/2, \phi_1(t) \equiv \phi_0 = \pi/4, \phi(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_A]$ . При этом для скорости интенсивности скольжений  $\phi'_i(\theta, t)$  из уравнения (1) получаем

$$\phi'_i(\theta, t) = \psi(\theta, t) / \Pi_0 \left[ \varepsilon_i^{(p)}(t) \right], \quad \psi(\theta, t) = A_1 \cos 2\theta + C_1, \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_3 + 2a_0\alpha}{[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)](2a_0\alpha + a_3) - a_0a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$C_1 = -A_1 \frac{a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}, \quad 2\alpha = \alpha_1(t) + \alpha_2(t).$$

Границы множества направлений скольжения  $-\alpha_1(t), \alpha_2(t)$  определяются уравнением (2), на основании которого можем записать [8]

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad \frac{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha} = \frac{\sigma_i(t)}{\sigma_s},$$

$$(\sigma_i(t) = \sqrt{3}\tau_{xy}(t), \sigma_s = \sqrt{3}\tau_s, t \in [t_0, t_A]). \quad (8)$$

С учётом формул (5) и (7) для компонент вектора скорости плоскопластической деформации получаем

$$\Pi_0 \dot{\Gamma}_1^{(p)} \equiv 0, \quad \Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left[ (\alpha + 0,25 \sin 4\alpha) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha} \right], \quad t \in [t_0, t_A] \quad (9)$$

Суммарная составляющая пластической деформации сдвига определяется формулой

$$\gamma_{xy}^{(p)} = \sqrt{2} A_1 \int_{t_0}^{t_A} \left[ \alpha(t) + 0,25 \sin 4\alpha(t) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha(t)}{a_3 + 2a_0\alpha} \right] \frac{dt}{\Pi_0 \left[ \varepsilon_i^{(p)}(t) \right]}. \quad (10)$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений она является результатом скольжений в направлениях  $\mathbf{m}(\pi/2 + \theta_0)$  ( $\theta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)]$ ) и  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , симметричных относительно направлений действия максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}^{(1)}$ .

**Сопротивление сдвигу.** Пластическая деформация первоначально изотропного материала приводит к возникновению деформационной анизотропии. В рамках модели плоскопластической среды [4;7] прочностной характеристикой, изменяющейся по-разному в различных в плоскости деформации направлениях  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , является сопротивление сдвигу  $R_m(\theta_0, t)$ , под которым понимается отнесенная к единице площади сила сопротивления скольжению по данной площадке в заданном направлении. В общем случае плоскопластической деформации величина  $R_m$  зависит от истории нагружения и в произвольный момент времени  $t$  определяется формулой [8]

$$R_m(\theta_0, t) = \tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{\alpha_2(\xi)} \Pi \left[ \varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi) \right] F(|\theta - \theta_0|) \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi, \quad (11)$$

$$\theta_0 \in [-\pi, \pi],$$

где  $\tau_s$  – сопротивление сдвигу первоначально изотропного материала. В условиях рассмотренного чистого сдвига ( $S_1(t) \equiv 0, S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t) \geq 0$ ) на основании формулы (11) окончательно можем получить

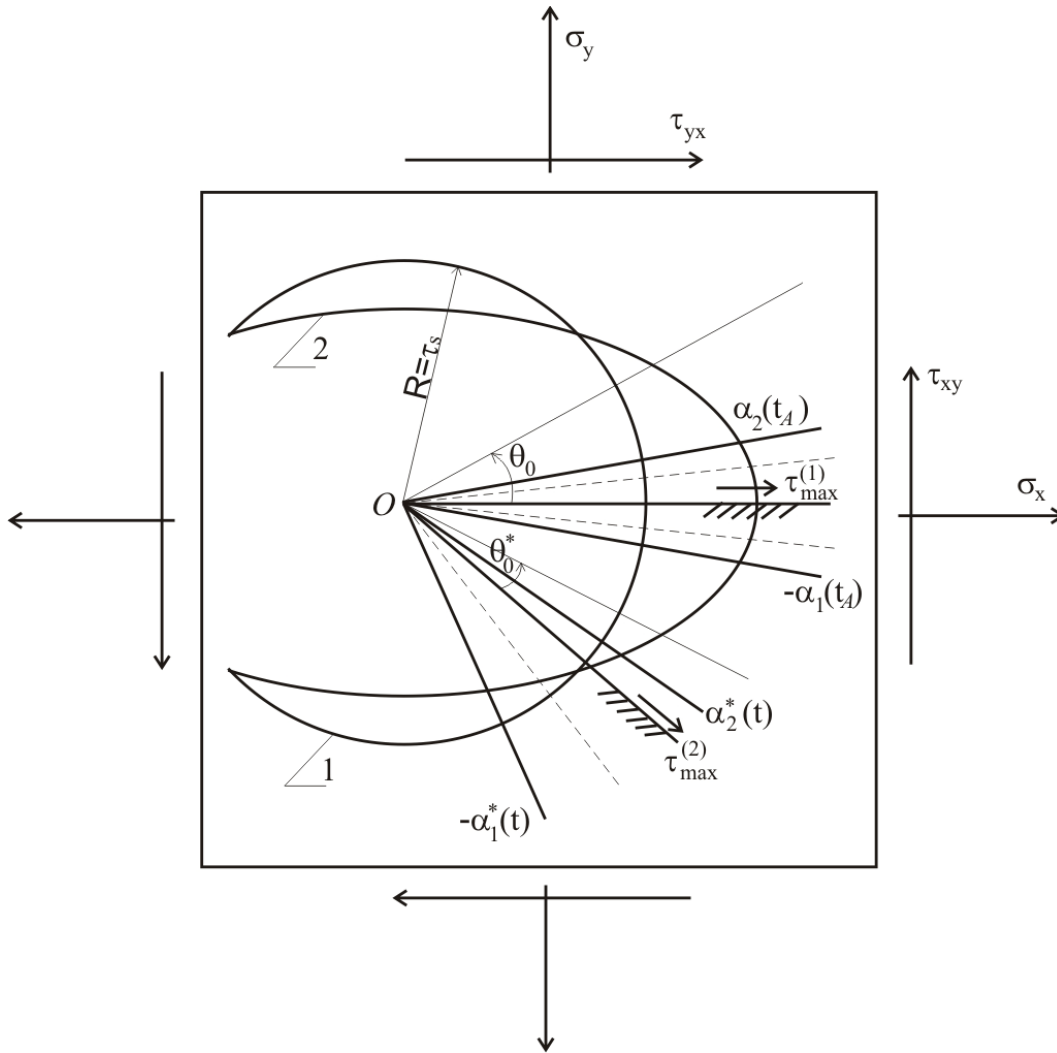


Рис.2. Развитие систем скольжений при кручении с разгрузкой и последующим растяжением образца

$$R_m(\theta_0, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} S_3(t) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)]; \\ Q_1(\theta_0, t), & \theta_0 \in [\alpha(t), \pi/2 - \alpha(t)]; \\ Q_2(\theta_0, t), & \theta_0 \in [\pi/2 - \alpha(t), \pi/2 + \alpha(t)], \end{cases} \quad (12)$$

$$Q_1(\theta_0, t) = \tau_s \{1 + A[a_0(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha) \cos 2\theta_0]\};$$

$$Q_2(\theta_0, t) = Q_1(\theta_0, t) - A\tau_s a_4(\cos 2\theta_0 - \cos 2\alpha),$$

$$(A = [(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha]^{-1}), (t \in [t_0, t_A]). \quad (13)$$

Для определения сопротивления сдвигу  $R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t)$  в направлении  $\mathbf{m}'(\theta_0 \pm \pi)$ , а также в направлении  $-\mathbf{m}(\theta_0)$ , противоположном  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , можно воспользоваться формулами [8]

$$R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t) = R(\theta_0, t); R_{-m}(\theta_0, t) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t) \quad (14)$$

В частности, для эффекта Баушингера имеем

$$\tau_s^- = Q_2(\pi/2, t). \quad (15)$$

Качественная картина изменения сопротивления сдвигу  $R_m \sim \theta_0$  после первого этапа нагружения ( $S_1(t) \equiv 0, S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t) \geq 0, t \leq t_A$ ) и разгрузки показана на рис. 2 линией 2. Окружность радиуса  $\tau_s$  (линия 1) — сопротивление сдвигу первоначально изотропного материала.

**Второй этап нагружения.** Рассмотрим теперь второй этап нагружения *OB* (рис. 1), который при плоскопластической деформации характеризуется компонентами

$$S_1(t) = [\sigma_x(t) - \sigma_y(t)] / \sqrt{2}, S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t) \equiv 0$$

вектора нагружения  $\mathbf{S}$ . При этом максимальные касательные напряжения ( $\tau_{max}^{(2)}(t)$ ) действуют по косым площадкам, наклонённым под углами  $\pm\pi/4$  к координатным осям  $Oxy$  (рис.2). Кроме этого, здесь следует учесть деформационную анизотропию (12), созданную первым этапом нагружения. В связи с этим исходные интегральные уравнения (1) и (2) следует переписать так

$$\int_{-\alpha_1^*(t)}^{\alpha_2^*(t)} \Pi[\varepsilon_i^{(p)}(t)] F(|\theta^* - \theta_0^*|) \varphi'_i(\theta^*, t) d\theta^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta^*, \quad (16)$$

$$R_m(\theta_0^*, t_A) + \int_{t_A}^t \int_{-\alpha_1^*(\xi)}^{\alpha_2^*(\xi)} \Pi_0^*[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi)] F(|\theta^* - \theta_0^*|) \varphi'_\xi(\theta^*, \xi) d\theta^* d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S_1(t) \cos 2\theta_0^*, \theta_0^* \in [-\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t)], t > t_A. \quad (17)$$

Здесь углы  $\theta^* = \theta + \pi / 4, \theta_0^* = \theta_0 + \pi / 4, \alpha_{1,2}^*(t)$  отсчитываются от направления действия максимального касательного напряжения  $\tau_{max}^{(2)}(t)$  на втором этапе нагружения (рис. 2)

$$R_m(\theta_0^*, t_A) \equiv Q_1(\theta_0 + \pi / 2, t_A) = \tau_s(b_0 + b_1 \sin 2\theta_0^*),$$

$$b_0 = 1 + Aa_0[\sin 2\alpha_A - 2\alpha_A \cos 2\alpha_A], \quad b_1 = Aa_2(\alpha_A - 0,25 \sin 4\alpha_A). \quad (18)$$

Системы уравнений (16), (17) и (1), (2) идентичны и методы их решений совпадают. Пропуская промежуточные выкладки, приведем окончательные результаты решения системы (16), (17).

Для скорости интенсивности скольжений  $\phi'_i(\theta, t)$  на втором этапе нагружения получаем:

$$\phi'_i[\eta, t] = \psi[\eta, t] / \Pi_0[\varepsilon_0^{(p)}], \quad \phi'_i[\eta, t] = \phi'_i(\theta - \kappa, t),$$

$$\psi[\eta, t] = D_1 \cos 2\kappa \cos 2\eta + D_2 \sin 2\kappa \sin 2\eta - D_0, \quad (19)$$

где (здесь и далее индекс «\*» при величинах  $\alpha_{1,2}^*, \alpha^*, \kappa^*, \theta^*, \theta_0^*$  опущен)

$$D_0 = \frac{D_1 a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha},$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\kappa}{[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)](a_3 + 2a_0\alpha) - a_0 a_2 \sin 2\alpha},$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin 2\kappa}{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)},$$

$$2\alpha = \alpha_2 + \alpha_1, \quad 2\kappa = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \eta = \theta - \kappa, \quad \eta_0 = \theta_0 - \kappa. \quad (20)$$

Границы множества направлений скольжений  $\alpha_2(t) = \alpha(t) + \kappa(t), -\alpha_1 = -\alpha(t) + \kappa(t)$  определяются равенствами

$$\kappa = \frac{1}{2} \arcsin \left[ k(\alpha_A) \frac{(a_3 + 2a_0\alpha)v(\alpha)}{a_2 v(\alpha) \sin 2\alpha - u(\alpha)} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_s} = a_2(\alpha_A - 0,25 \sin 4\alpha_A) / v(\alpha_A) \cdot \operatorname{tg} 2\kappa. \quad (22)$$

Здесь

$$u(\alpha) = (a_3 + 2a_0\alpha)[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)] - a_2 a_0 \sin^2 2\alpha,$$

$$v(\alpha) = (a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha, \quad k(\alpha_A) = b_1 / b_0.$$

Для практического построения функций  $\alpha_{1,2}(t)$  можно воспользоваться такой последовательностью вычислений. При заданном первом этапе нагружения  $OA$  и, следовательно, известных  $\alpha_A$  и  $(\sigma_i / \sigma_s)_A$ , задаемся последовательностью значений  $\alpha(t_k) = \alpha^{(k)}$  ( $k = 1; 2; \dots$ ) на втором этапе нагружения  $OB$  (рис. 1). Затем на основании формулы (21) определяем соответствующую последовательность значений  $\kappa(t_k)$ . Уравнение (22) устанавливает зависимость между значениями функций

$\alpha(t)$ ,  $\kappa(t)$  и соответствующими величинами отношений  $(\sigma_i(t_k)/\sigma_s)$  второго этапа нагружения.

При известных  $\varphi'_i(\theta, t)$ ,  $\alpha_{1,2}(t)$  компоненты скорости плоскопластической деформации, как и ранее, определяются формулами (5). После вычисления интегралов окончательно можем записать:

$$\begin{aligned}\Pi_0 \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11}(\alpha) \cos^2 2\alpha + B_{12}(\alpha) \sin^2 2\alpha, \\ \Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{1}{2} [B_{11}(\alpha) - B_{12}(\alpha)] \sin 4\alpha,\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}B_{11}(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{r(\alpha)}{a_3(a_3 + 2a_0\alpha) + a_2 r(\alpha)}, \quad B_{12}(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha - 0,25 \sin 4\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}, \\ r(\alpha) &= (a_3 + 2a_0\alpha)(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha) - a_0 \sin^2 2\alpha.\end{aligned}\quad (24)$$

Полученные для плоскопластической деформации результаты на основании постулата изотропии Ильюшина [1] легко распространяются на случай обобщенного плоского напряженного состояния, в частности, на кручение с растяжением тонкостенной трубки. Для этого достаточно в выше записанных формулах заменить компоненту вектора нагружения  $S_1$  на  $S_2 = \sqrt{2/3} \sigma_z$  и скорость плоскопластической деформации  $\dot{\Gamma}_1^{(p)}$  на  $\dot{\Gamma}_2^{(p)} = (\sqrt{3}/2) \dot{\varepsilon}_z$ . Далее процесс нагружения и пластического деформирования будем рассматривать в двух координатных плоскостях  $S_1 S_3$  и  $S_2 S_3$  пятимерного пространства Ильюшина.

**Пример функции упрочнения.** Для иллюстрации полученных выше результатов рассмотрим частный случай функции упрочнения

$$F(\omega) = \delta(\omega) + a_2 \cos 2\omega + a_4 \delta(\pi/2 - \omega).\quad (25)$$

Она получена из  $F(\omega)$  (6) при  $a_0 = 0$  и  $a_3 = 1$ . Так как функция упрочнения  $F(\omega)$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая может быть включена в функцию пластичности  $\Pi_0 [\varepsilon_i^{(p)}]$ , то равенство  $a_3 = 1$  является несущественным, т.е. таким, что не влияет на результаты решения рассматриваемой задачи. Коэффициент  $a_4$  при заданной траектории нагружения  $OAОВ$  (рис.1) не влияет на компоненты плоскопластической деформации, но является одним из основных при определении эффекта Баушингера.

Заметим, что частный вид функции  $F(\omega)$  (25) при дополнительном условии  $a_4 = 0$  приводит ко второму варианту упрочнения в теории пластичности Кадашевича-Новожилова [2]. На основании формул (8) и (9) для компонент скорости пластической деформации и границ множества направлений скольжений на первом этапе нагружения, как частный случай, получаем:

$$\dot{\Gamma}_{1,2}^{(p)} = 0, \quad 2\Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\alpha + 0,25 \sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)},\quad (26)$$

$$\frac{1 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\sigma_i}{\sigma_s}, \quad \alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad t \in [t_0, t_A].\quad (27)$$

Аналогично, для второго этапа нагружения с учетом равенств (21)—(24) можем записать:



$$2\Pi_0\dot{\Gamma}_k^{(p)} = B_{11}^0(\alpha)\cos^2 2\kappa + B_{12}^0\sin^2 2\kappa, \quad 2\Pi_0\dot{\Gamma}_3^{(p)} = [B_{11}^0(\alpha) - B_{12}^0(\alpha)]\sin 4\kappa; \quad (28)$$

$$\kappa = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{a_2m(\alpha_A)}{n(\alpha) - a_2\sin 2\alpha}, \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_s} = -a_2m(\alpha_A)\operatorname{ctg} 2\kappa, \quad (29)$$

где

$$B_{11}^0(\alpha) = \frac{\alpha + 0,25\sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha + 0,25\sin 4\alpha)}, \quad B_{12}^0 = \frac{\alpha - 0,25\sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha - 0,25\sin 4\alpha)},$$

$$n(\alpha) = \frac{1 + a_2(\alpha + 0,25\sin 4\alpha)}{\cos 2\alpha}, \quad m(\alpha_A) = \frac{\alpha_A - 0,25\sin 4\alpha_A}{\cos 2\alpha_A}. \quad (30)$$

Алгоритм построения на основании формул (28) — (30) зависимостей  $\dot{\Gamma}_{1,2}^{(p)}, \dot{\Gamma}_3^{(p)} \sim \sigma_i / \sigma_s$  при  $F(\omega)$  (25) аналогичен алгоритму, изложенному выше для более общей функции упрочнения  $F(\omega)$  (6).

Анализ полученных выше результатов (26)—(30) позволяет сделать следующий вывод. В связи с наличием деформационной анизотропии первые скольжения на втором этапе нагружения происходят при  $\tau_{max}^{(2)} / \tau_s < 1$  по площадкам, несколько отклоненным от площадок действия  $\tau_{max}^{(2)}$  (рис.2) в сторону уменьшения сопротивления сдвигу  $R_m(\theta, t_A)$ . В целом веер скольжений  $\theta \in [-\alpha(t), \alpha_2(t)]$  ( $t^\circ \leq t \leq t_B$ ) не симметричен относительно направления действия максимального касательного напряжения. Это в конечном итоге приводит к раскручиванию при растяжении предварительно закрученного за пределы упругости тонкостенного трубчатого образца. Отсюда следует, что эффект Фейгена есть прямое следствие деформационной анизотропии материала.

На рис. 3 приведены графики зависимости  $h \sim p$  ( $h = |\dot{\Gamma}_3^{(p)} / \dot{\Gamma}_2^{(p)}| \cdot 100 \%$ ,  $p = \sigma_i / \sigma_s$ ) на втором этапе нагружения.

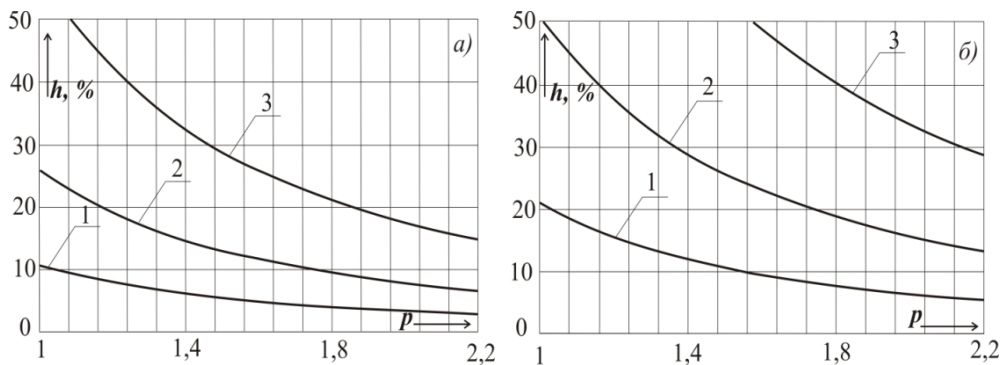


Рис. 3. Графики изменения относительных скоростей раскручивания при растяжении предварительно закрученной за пределы упругости тонкостенной трубки

Линии 1; 2; 3 на рис. 3,а построены для  $a_2 = 1$  и величин отношений  $\sigma_i / \sigma_s = 1,21; 1,44; 1,85$ . Графики 1; 2; 3 на рис. 3, б соответствуют значениям  $a_2 = 2$  и  $\sigma_i / \sigma_s = 1,26; 1,57; 2,10$ . Из приведенных графиков следует, что отнесен-

ная к  $\dot{\Gamma}_2^{(p)}$  скорость раскручивания  $|\dot{\Gamma}_3^{(p)}|$  образца значительно увеличивается с ростом предварительной деформации закручивания  $\gamma_A^{(p)}$  (10) на первом этапе нагружения. Она также увеличивается с увеличением параметра  $a_2$  функции упрочнения  $F(\omega)$ , который характеризует степень нарастания деформационной анизотропии материала. Возможности варианта теории скольжения [4] значительно увеличиваются при использовании более общих функций упрочнения, в частности  $F(\omega)$  (6).

Отметим, что с несколько иных позиций, с использованием упрощенной модели скольжения Леонова-Рычкова, эффект Фейгена изучался также в работе [3].

**Построение функции пластичности.** Рассмотрим теперь задачу построения функции пластичности  $\Pi = \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$  при  $\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$  для материалов, обладающих универсальной зависимостью  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$  при простом нагружении. Указанная функция  $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$  входит во все приведенные выше формулы для компонент вектора скорости пластической деформации. Представим  $d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^{(e)} + d\varepsilon_i^{(p)}$ , где

$$d\varepsilon_i = \frac{d\sigma_i}{E_t}, \quad d\varepsilon_i^{(e)} = \frac{d\sigma_i}{E}, \quad d\varepsilon_i^{(p)} = d\varepsilon_i - d\varepsilon_i^{(e)} = \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i \quad (31)$$

– полная, упругая и пластическая составляющие приращения интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$ ;  $E = 3G$ ,  $E_t = d\sigma_i / d\varepsilon_i$  – упругий и касательный модули диаграммы  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ . С другой стороны, учитывая, что при пропорциональном нагружении

$$dS \equiv dt = \sqrt{2/3} d\sigma_i, \quad d\Gamma^{(p)} \equiv \dot{\Gamma}^{(p)} dt = \sqrt{2/3} \dot{\Gamma}^{(p)} d\sigma_i,$$

на основании формул (9) можем записать

$$d\varepsilon_i^{(p)} = 2B_{11}(\alpha) d\sigma_i / 3\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}], \quad (32)$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r(\alpha)}{a_3(a_3 + 2a_0\alpha) + a_2r(\alpha)}. \quad (33)$$

Сравнивая формулы (31) и (32), для функции пластичности получим

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = \frac{2}{3} \frac{EE_t}{E - E_t} B_{11}[\sigma_i / \sigma_s], \quad (34)$$

где  $B_{11}[\sigma_i / \sigma_s] \equiv B_{11}(q[\sigma_i / \sigma_s])$  и  $\alpha = q[\sigma_i / \sigma_s]$  – решение уравнения (8) относительно  $\alpha$ . В частности, удовлетворительную аппроксимацию функции пластичности, построенную для стали 45 на основании равенств (8), (33), (34), можно получить [8] на основании формулы

$$\Pi[\varepsilon_i^{(p)}] = d_1 + d_2 \cdot (\varepsilon_i^{(p)})^{-r}, \quad (d_1 = -0,56 \text{ МПа}, \quad d_2 = 3,15 \text{ МПа}, \quad r = 0,29). \quad (35)$$

Ее график показан на рис.4. Сингулярность функции  $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$  в нуле обеспечивает непрерывность касательного модуля  $E_t = d\sigma_i / d\varepsilon_i$  на границе текучести.

**Заключение.** Эффект Фейгена при малых упругопластических деформациях есть прямое следствие деформационной анизотропии материалов. Для его аналити-

ческого описания может быть использована теория пластичности, основанная на концепции скольжения.

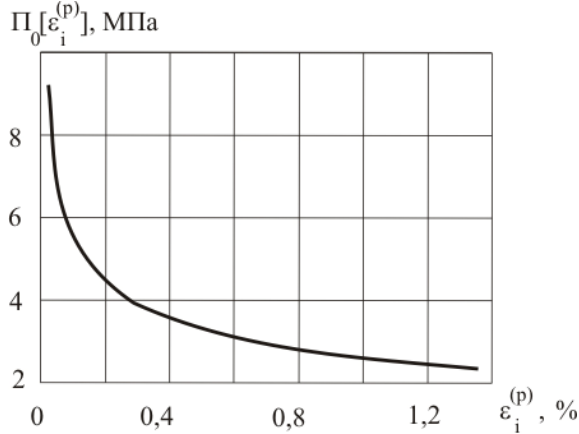


Рис. 4. Функция пластичности  $\Pi_0[\epsilon_i^{(p)}]$  для стали 45

### Библиографические ссылки

1. **Ильюшин А.А.** Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин – М., – 1963. – 271 с.
2. **Кадашевич Ю.И.** О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // Прикл. механика и математика. – 1980. №3. – С. 93–99.
3. **Комарцов Н.М.** Кинематика пластической деформации при переходе от кручения к растяжению трубчатых образцов стали 45 / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред: Механика сплошных сред как основа современных технологий: тезисы докладов. – Пермь – Екатеринбург. – 2009. – С. 210.
4. **Швайко Н.Ю.** К теории пластичности, основанной на концепции скольжения / Н.Ю. Швайко // Прикл. механика. – 1976. – Т. XII, №11. – С. 12–24.
5. **Швайко М.Ю.** Про коректність теорій пластичності, які враховують взаємний вплив механізмів непружного деформування / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – №2. – С.54-62.
6. **Швайко М.Ю.** Про стійкість процесу деформування і диференціальну потенціальність визначальних рівнянь теорії пластичності / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – №3. – С. 42-55.
7. **Швайко М.Ю.** Теорія ковзання та її застосування / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002 – №4. – С.107-120.
8. **Швайко М.Ю.** Аналітичне та експериментальне дослідження деформації сталі-45 при складному навантаженні / М.Ю. Швайко, М.М. Фількевич // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. – 2006. – 49, №1.
9. **Batdorf S.B. and Budiansky B.A.** A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip / S.B. Batdorf, B.A. Budiansky // NASA Technical Note. 17, April, 1949.
10. **Feigen M.** Inelastic behavior under combine tension and torsion / M. Feigen // Proceedings of the second U.S. National Congress of Applied Mechanics, P. 469–476 (1954).

Надійшла до редколегії 8.02.10