УДК 539.3

А.И. Александров
Запорожский национальный университет

МЕТОД НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Предложен метод приближенного решения задачи о контактном взаимодействии линейно-упругих тел при наличии кулонова трения между ними и неизвестной поверхности контакта. Метод заключается в использовании нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел, регуляризации этих уравнений, дискретизации регуляризированных уравнений и построении сходящихся итерационных процессов для решения дискретного аналога регуляризированных уравнений. Приведены результаты численного решения задачи о вдавливании упругого шара в упругое полупространство.

Ключевые слова: линейно-упругие тела, контактное взаимодействие, кулоново трение, нелинейные интегральные уравнения.

Запропоновано метод наближеного розв'язування задачі про контактну взаємодію лінійно пружних тіл за наявністю кулонового тертя між ними та невідомій поверхні контакту. Метод полягає у використанні нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл, регуляризації цих рівнянь, дискретизації регуляризованих рівнянь та побудові збіжних ітераційних процесів для розв'язування дискретного аналогу регуляризованих рівнянь. Наведено результати чисельного розв'язку задачі про вдавлювання пружної кулі в пружний напівпростір.

Ключові слова: лінійно-пружні тіла, контактна взаємодія, кулонове тертя, нелінійні інтегральні рівняння.

The method of the approximate solution of the contact problem, connected with the interaction between the linearly elastic bodies, where possible the Coulomb friction between them and unknown contact surface, has been proposed. The method consist of the use of nonlinear integral equations for the simulation of the contact interaction between bodies, the regularization of this equations, the discretization of the regularized equations and the construction of the convergent iteration processes for the solution of a discrete analog of the regularized equations. The numerical results for a problem on indentation of the elastic ball in the elastic half-space is demonstrated.

Keywords: linearly elastic bodies, contact interaction, Coulomb friction, nonlinear integral equations.

Введение. Использование нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел позволяет избавиться от основной трудности реализации вариационных методов при решении контактных задач, заключающейся в необходимости рассматривать задачи нелинейного программирования. Большинство известных попыток использования таких уравнений [1–5] ограничивается рассмотрением контактных задач без учета трения либо задач, в которых учет трения осуществляется при упрощенных граничных условиях, соответствующих полному проскальзыванию тел [4; 5]. Нелинейные интегральные уравнения, использованные в [6; 7], позволяют учитывать трение Кулона в общем виде и могут быть основой для создания эффективного численного метода решения соответствующих контактных задач. Цель данной статьи заключается в разработке такого метода.

Операторное уравнение контактной задачи. Рассмотрим трехмерную статическую контактную задачу о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом трения Кулона при неизвестной поверхности контакта и неизвестной границе раздела зон проскальзывания и сцепления на этой поверхности. При определенных допущениях [6] эта задача сводится к решению операторного уравнения [6; 7]

$$p = G_\mu\left(p - E\left(A(p) - f\right)\right), \tag{1}$$

где $p = \left(p_1, p_2, p_3\right)$ есть неизвестная вектор-функция, отыскиваемая в гильбертовом пространстве $L_2^3(\Omega)$ [7] вектор-функций, каждая из трех компонент которых является элементом пространства $L_2(\Omega)$; $f = \left(f_1, f_2, f_3\right)$ – заданный элемент $L_2^3(\Omega)$, который характеризует конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения; μ – коэффициент трения; E – произвольная положительная константа, значение которой не влияет на множество решений уравнения (1) [7]; Ω – заданная ограниченная плоская область, содержащая в себе неизвестную заранее зону контакта тел. Входящий в правую часть уравнения (1) линейный ограниченный оператор влияния $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ определен соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{p} = \left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3\right), \ p = \left(p_1, p_2, p_3\right) \in L_2^3(\Omega); \\ \tilde{p} = A(p); \quad \tilde{p}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij}\left(p_j\right) \quad \forall i = \overline{1,3}; \end{cases} \tag{2}$$

где $A_{ij} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ есть заданные линейные ограниченные операторы. Непрерывный нелинейный оператор $G_\mu : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, входящий в правую часть уравнения (1), задан равенствами

$$\begin{cases} y = \left(y_1, y_2, y_3\right), \ x = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in L_2^3(\Omega); \\ y = G_\mu(x); \\ y_1(s) = h\left(x_1(s)\right), \\ y_2(s) = q\left(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h\left(x_1(s)\right)\right), \\ y_3(s) = q\left(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h\left(x_1(s)\right)\right), \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых μ есть коэффициент трения, а функции h и q имеют вид

$$h(x) = \begin{cases} x, \textit{если } x \ge 0; \\ 0, \textit{если } x < 0; \end{cases}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, \textit{если } \sqrt{x^2 + y^2} \le z; \\ x \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \textit{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

В [8] показано, что подобная рассмотренной выше контактная задача в квазистатической постановке при дискретном характере процесса нагружения сводится к решению нескольких уравнений вида (1)

$$p^{(i)} = G_\mu\left(p^{(i)} - E\left(A\left(p^{(i)}\right) - f^{(i)}\right)\right) \ , \quad i = \overline{1,l}; \tag{3}$$

соответствующих различным шагам нагружения. Каждое из уравнений (3) характеризуется своим элементом $f = f^{(i)} \in L_2^3(\Omega)$, который может быть получен после отыскания решений $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(i-1)} \in L_2^3(\Omega)$ предшествующих ему уравнений. Решением квазистатической задачи (3) естественно считать элемент $p^{(l)} \in L_2^3(\Omega)$, удовлетворяющий последнему из уравнений (3).

Если входящие в соотношения (2) линейные ограниченные операторы $A_{ij} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ допускают интегральное представление, то операторное уравнение (1) и каждое из операторных уравнений (3) представляют собой системы трех нелинейных интегральных уравнений относительно трех неизвестных функций, описывающих распределение по области Ω передаваемой от одного тела к другому контактной нагрузки.

Регуляризирующее уравнение. Предположим, что линейный оператор влияния $A : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ является вполне непрерывным [9] и имеет непустой союзный спектр $US(A)$ [10]. Первое предположение приводит к тому, что задача отыскания неизвестного элемента $p \in L_2^3(\Omega)$ по известному элементу $f \in L_2^3(\Omega)$ из решения уравнения (1) является некорректной. Второе предположение вместе с условием $\mu \in US(A)$ гарантирует единственность в $L_2^3(\Omega)$ решения $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, p_3^*\right)$ уравнения (1), если это уравнение в этом пространстве имеет хотя бы одно решение [10].

Если $\mu \in US(A)$ и для некоторого фиксированного элемента $f \in L_2^3(\Omega)$ уравнение (1) имеет решение $p^* \in L_2^3(\Omega)$, то в случае, когда известна функция $u(s) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$p_1^*(s) \le u(s) \ \textit{почти всюду на}\ \Omega,$$

можно для уравнения (1) предложить регуляризирующий аналог [11]

$$p = G_\mu^u\left(p - E\left(\varepsilon \cdot p + A(p) - f\right)\right). \tag{4}$$

В уравнении (4) $\varepsilon > 0$ есть параметр регуляризации, E - произвольное положительное число и непрерывный нелинейный оператор $G_\mu^u : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ задан равенствами:

$$\begin{cases} v = (v_1, v_2, v_3), \ \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) \in L_2^3(\Omega); \\ \tilde{v} = G_\mu^u(v); \\ \tilde{v}_1(s) = h_{u(s)}\left(v_1(s)\right), \\ \tilde{v}_2(s) = q\left(v_2(s), v_3(s), \mu \cdot h_{u(s)}\left(v_1(s)\right)\right), \\ \tilde{v}_3(s) = q\left(v_3(s), v_2(s), \mu \cdot h_{u(s)}\left(v_1(s)\right)\right), \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых μ есть коэффициент трения, а функция h_σ имеет вид

$$h_\sigma(x) = \begin{cases} h(x), \textit{если } x \le \sigma; \\ \sigma, \textit{если } x > \sigma. \end{cases}$$

В [11] доказано, что при любом положительном значении ε решение $p_\varepsilon \in L_2^3(\Omega)$ уравнении (4) существует, является единственным и слабо сходится к p^* при $\varepsilon \to 0$. Для построения устойчивого численного алгоритма приближенного решения уравнения (4) запишем это уравнение в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} p_1 = G^u(p_1, p_T), \\ p_T = G^\mu(p_T, p_1), \end{cases} \tag{5}$$

где $p_T = (p_2, p_3) \in L_2^2(\Omega)$ [7] и отображения $G^u : L_2(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $G^\mu : L_2^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \to L_2^2(\Omega)$ заданы соотношениями:

$$\begin{cases} p_1, v_1 \in L_2(\Omega)\ ;\quad p_T = (p_2, p_3),\quad v_T = (v_2, v_3) \in L_2^2(\Omega); \\ v_1 = G^u(p_1, p_T)\ ;\quad v_T = G^\mu(p_T, p_1); \\ v_1(s) = h_{u(s)}\left(p_1(s) - E\left(\varepsilon p_1(s) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{1j}\left(p_j\right)_s - f_1(s) \right) \right); \\ v_2(s) = q\left(p_2(s) - E\left(\varepsilon p_2(s) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{2j}\left(p_j\right)_s - f_2(s) \right), \right. \\ \qquad \left. p_3(s) - E\left(\varepsilon p_3(s) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{3j}\left(p_j\right)_s - f_3(s) \right),\quad \mu h\left(p_1(s)\right) \right); \\ v_3(s) = q\left(p_3(s) - E\left(\varepsilon p_3(s) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{3j}\left(p_j\right)_s - f_3(s) \right), \right. \\ \qquad \left. p_2(s) - E\left(\varepsilon p_2(s) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{2j}\left(p_j\right)_s - f_2(s) \right),\quad \mu h\left(p_1(s)\right) \right);\quad s \in \Omega. \end{cases}$$

Дискретизация регуляризирующего уравнения. Обозначим символами $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_3$ нормы элементов гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$, $L_2^2(\Omega)$, $L_2^3(\Omega)$ [7] соответственно, а символами $\|A\|_{*1}$, $\|A\|_{*2}$, $\|A\|_{*3}$ – нормы линейных ограниченных операторов, действующих в пространствах

$L_2(\Omega)$, $L_2^2(\Omega)$, $L_2^3(\Omega)$ соответственно. Символ (x,y) будем использовать для обозначения скалярного произведения элементов $x,y \in L_2^3(\Omega)$.

Для последовательности $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2^3(\Omega)$ в $L_2^3(\Omega)$, последовательности $\{f^{(n)}\}$ элементов $f^{(n)} = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n})$ пространства $L_2^3(\Omega)$ и последовательности $\{u_n\}$ почти всюду на Ω неотрицательных функций пространства $L_2(\Omega)$ рассмотрим соответствующую последовательность уравнений:

$$p = G_\mu^{u_n}\left(p - E\left(\varepsilon \cdot p + A_n(p) - f^{(n)}\right)\right), \quad n \in N; \tag{6}$$

получающихся из (4) заменой A на A_n, u на u_n, f на $f^{(n)}$. Справедлива следующая теорема о близости решений уравнения (4) и уравнений (6).

Теорема. Пусть $\mu \in US(A)$ и линейный оператор $A: L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ является вполне непрерывным, удовлетворяя при этом условиям самосопряженности и неотрицательности:

$$\begin{cases} (A(x), y) = (x, A(y)) & \forall x, y \in L_2^3(\Omega); \\ (A(x), x) \ge 0 & \forall x \in L_2^3(\Omega). \end{cases} \tag{7}$$

Пусть ε есть произвольное фиксированное положительное число и последовательности $\{A_n\}$ линейных вполне непрерывных операторов, действующих из $L_2^3(\Omega)$ в $L_2^3(\Omega)$, $\{f^{(n)}\}$ элементов $L_2^3(\Omega)$, а также $\{u_n\}$ почти всюду на Ω неотрицательных функций пространства $L_2(\Omega)$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_{*3} = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f - f^{(n)}\right\|_3 = \lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0. \tag{9}$$

Тогда каждое из уравнений (6) имеет хотя бы одно решение в $L_2^3(\Omega)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_\varepsilon - p_n\|_3 = 0$, где p_ε есть решение уравнения (4) в пространстве $L_2^3(\Omega)$ и элемент $p_n \in L_2^3(\Omega)$ представляет собой любое из решений уравнения (6), полученное при данном натуральном значении n.

Доказательство. Полагая в уравнении (6) $E = 1/\varepsilon$, запишем это уравнение в эквивалентной форме

$$p = G_\mu^{u_n}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left(A_n(p) - f^{(n)}\right)\right). \tag{10}$$

Поскольку оператор $F_\varepsilon^n: L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, для которого элемент $F_\varepsilon^n(p)$ совпадает с правой частью уравнения (10), является вполне непрерывным на $L_2^3(\Omega)$ и преобразует ограниченное замкнутое выпуклое множество $D_n = \left\{ \left(p_1, p_2, p_3 \right) \in L_2^3\left(\Omega\right) \middle| \, 0 \le p_1\left(s\right) \le u_n\left(s\right), \ \sqrt{p_2^2\left(s\right) + p_3^2\left(s\right)} \le \mu \cdot p_1\left(s\right) \textit{ почти всюду на } \Omega \right\}$ в D_n, то, согласно второму принципу Шаудера [12], существует элемент $p_n = \left(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n} \right) \in D_n$, который удовлетворяет уравнению (10) и, следовательно, уравнению (6). Таким образом, каждое из уравнений (6) разрешимо в $L_2^3\left(\Omega\right)$ и все члены последовательности $\left\{ p_n \right\}$ решений уравнений (6) содержатся в некотором шаре пространства $L_2^3\left(\Omega\right)$.

Покажем, что из любой подпоследовательности $\left\{ p_{nk} \right\}$ последовательности $\left\{ p_n \right\}$ можно извлечь подпоследовательность $\left\{ p_{n_{k_j}} \right\}$, которая сильно в $L_2^3\left(\Omega\right)$ сходится к p_ε. Это будет означать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| p_\varepsilon - p_n \right\|_3 = 0$.

Пусть $\left\{ p_{n_k} \right\}$ есть произвольно выбранная подпоследовательность последовательности $\left\{ p_n \right\}$. Так как все члены последовательности $\left\{ p_{n_k} \right\}$ лежат в ограниченном шаре пространства $L_2^3\left(\Omega\right)$, то существует подпоследовательность $\left\{ p_{n_{k_j}} \right\}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу $\tilde{p} = \left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3 \right)$. Покажем, что $\left\{ p_{n_{k_j}} \right\}$ сильно сходится к $\tilde{p}$ и $\tilde{p} = p_\varepsilon$.

Используя условия (7), выберем входящее в уравнения (5) число E так, чтобы выполнялись неравенства [7]:

$$\left\| I_1 - E\left(\varepsilon \cdot I_1 + A_{11} \right) \right\|_{*1} < 1,$$

$$\left\| I_2 - E\left(\varepsilon \cdot I_2 + A^T \right) \right\|_{*2} < 1,$$

в которых I_1, I_2 есть тождественные операторы, действующие в пространствах $L_2\left(\Omega\right)$ и $L_2^2\left(\Omega\right)$ соответственно, и линейный оператор $A^T : L_2^2\left(\Omega\right) \to L_2^2\left(\Omega\right)$ задан соотношениями:

$$\begin{cases} u = \left(u_2, u_3 \right), \ v = \left(v_2, v_3 \right) \in L_2^2\left(\Omega\right); \\ v = A^T\left(u\right); \ v_i = \sum\limits_{k=2}^{3} A_{ik}\left(u_k\right) \ \forall i = \overline{2,3}. \end{cases}$$

Тогда для сжимающего оператора $F_1 : L_2\left(\Omega\right) \to L_2\left(\Omega\right)$, задаваемого соотношениями

$$\begin{cases} F_1\left(x\right) = G^u\left(x, \tilde{p}_T\right) \quad \forall x \in L_2\left(\Omega\right); \\ \tilde{p}_T = \left(\tilde{p}_2, \tilde{p}_3 \right), \end{cases}$$

будет выполнено равенство $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{1n_{k_j}} - F_1\left(p_{1n_{k_j}}\right)\right\|_1 = 0$, означающее (см. лемму на стр. 19 в [13]), что последовательность $\left\{p_{1n_{k_j}}\right\}$ сильно в $L_2(\Omega)$ сходится к неподвижной точке $x^* \in L_2(\Omega)$ оператора F_1. Но так как $\left\{p_{1n_{k_j}}\right\}$ слабо сходится в $L_2(\Omega)$ к $\tilde{p}_1$, то $\tilde{p}_1 = x^*$, $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{1n_{k_j}} - \tilde{p}_1\right\|_1 = 0$ и справедливо равенство $\tilde{p}_1 = F_1(\tilde{p}_1)$, которое можно записать в виде:

$$\tilde{p}_1 = G^u(\tilde{p}_1, \tilde{p}_T). \tag{11}$$

Очевидно также, что для сжимающего оператора $F_2 : L_2^2(\Omega) \to L_2^2(\Omega)$, задаваемого соотношением

$F_2(u_T) = G^\mu(u_T, \tilde{p}_1) \quad \forall u_T = (u_2, u_3) \in L_2^2(\Omega)$,

будет выполнено равенство $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{Tn_{k_j}} - F_2\left(p_{Tn_{k_j}}\right)\right\|_2 = 0$, в котором $p_{Tn_{k_j}} = \left(p_{2n_{k_j}}, p_{3n_{k_j}}\right)$. Это равенство означает, что последовательность $\left\{p_{Tn_{k_j}}\right\}$ сильно в $L_2^2(\Omega)$ сходится к неподвижной точке $x_T^* \in L_2^2(\Omega)$ оператора F_2. Но так как $\left\{p_{Tn_{k_j}}\right\}$ слабо сходится в $L_2^2(\Omega)$ к $\tilde{p}_T = (\tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$, то $\tilde{p}_T = x_T^*$, $\lim\limits_{n_{k_j}\to\infty}\left\|p_{Tn_{k_j}} - p_T\right\|_2 = 0$ и справедливо равенство $\tilde{p}_T = F_2(\tilde{p}_T)$, которое можно записать в виде

$$\tilde{p}_T = G^\mu(\tilde{p}_T, \tilde{p}_1). \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) означают, что элемент $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_T)$ удовлетворяет системе (5) и, следовательно, уравнению (4). Но так как уравнение (4) при выполнении условий доказываемой теоремы имеет единственное решение в $L_2^3(\Omega)$ [11], то $\tilde{p} = p_\varepsilon$ и последовательность $\left\{p_{n_{k_j}}\right\}$ сильно в $L_2^3(\Omega)$ сходится к p_ε. Теорема доказана.

Построим такие, удовлетворяющие условиям (8)–(9) аппроксимирующие последовательности $\{A_n\}$, $\left\{f^{(n)}\right\}$ и $\{u_n\}$, для которых операторное уравнение (6) можно решить численно с любой степенью точности. Для этого зададим область Ω в виде открытого квадрата площади d, ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям некоторой декартовой системы координат, введенной на общей для взаимодействующих тел касательной плоскости. Для каждого натурального числа n разобьем Ω на n^2 непересекающихся квадратных областей $\omega_1^n, \omega_2^n, \ldots, \omega_{n^2}^n$ равной площади, ориентированных подобно квадрату Ω. Полагая, что в выражениях (2) линейные ограниченные операторы $A_{ij} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ допускают интегральное представление

$$A_{ij}(x)_t = \int_{\Omega} K_{ij}(t,s)x(s)ds, \quad t \in \Omega; \quad i,j = \overline{1,3}$$

и являются вполне непрерывными, зададим линейный ограниченный оператор $A_n : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ в виде

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in L_2^3(\Omega); \\ v = A_n(u); v_i = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij}^{(n)}(u_j), \quad i = \overline{1,3}; \\ A_{ij}^{(n)}(u_j)_t = \int\limits_{\Omega} K_{ij}^{(n)}(t,s)u_j(s)ds, \quad t \in \Omega; \quad i,j = \overline{1,3}; \end{cases} \tag{13}$$

где функции $K_{ij}^{(n)}(t,s)$ определяются из соотношений

$$\begin{cases} K_{ij}^{(n)}(t,s) = \dfrac{1}{mes(\omega_l^n) \cdot mes(\omega_k^n)} \int\limits_{\omega_l^n} \left(\int\limits_{\omega_k^n} K_{ij}(t,s)ds \right) dt, \\ если \quad t \in \omega_l^n, \quad s \in \omega_k^n; \quad k,l = \overline{1,n^2}; \quad (i,j = \overline{1,3}), \end{cases} \tag{14}$$

в которых символ $mes(\omega_l^n)$ обозначает лебегову меру множества ω_l^n. Элементы $f^{(n)}$ и u_n зададим в виде

$$f^{(n)} = (P_n(f_1), P_n(f_2), P_n(f_3)), \quad u_n = P_n(u),$$

где оператор $P_n : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ определяется соотношением

$$P_n(x)_t = \frac{1}{mes(\omega_k^n)} \int\limits_{\omega_k^n} x(s)ds, \quad если \quad t \in \omega_k^n; \quad \left(k = \overline{1,n^2}\right).$$

Очевидно, что построенные аппроксимирующие последовательности $\{A_n\}$, $\{f^{(n)}\}$, $\{u_n\}$ удовлетворяют условиям (8)-(9) и заданы так, что оператор $F_n : L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, определенный правой частью уравнения (6), отображает конечномерное подпространство $H_n = P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega))$ пространства $L_2^3(\Omega)$ в H_n. Следовательно, каждое решение $p_n \in H_n$ уравнения (6) удовлетворяет следующей системе $3k$ скалярных уравнений с $3k$ неизвестными $\left(k = n^2\right)$:

$$\begin{cases} x_{3i-2} = h_{\sigma_i}\left(x_{3i-2} - E\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-2\ j} x_j - b_{3i-2} \right) \right); \\ x_{3i-1} = q\left(x_{3i-1} - E\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j - b_{3i-1} \right), \right. \\ \qquad \left. x_{3i} - E\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\ j} x_j - b_{3i} \right), \quad \mu \cdot x_{3i-2} \right); \\ x_{3i} = q\left(x_{3i} - E\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\ j} x_j - b_{3i} \right), \right. \\ \qquad \left. x_{3i-1} - E\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j - b_{3i-1} \right), \quad \mu \cdot x_{3i-2} \right); \quad i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{15}$$

Связь между неизвестными $x_1, x_2, ..., x_{3k}$ данной системы и вектор-функцией $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in H_n$, удовлетворяющей уравнению (6), такова, что $p_{1n}(s) = x_{3i-2}$, $p_{2n}(s) = x_{3i-1}$, $p_{3n}(s) = x_{3i}$, при $s \in \omega_i^n$ (для всех $i = \overline{1,k}$). Входящие в систему (15) параметры $a_{ij}, b_{i,}\ \sigma_i$ определяются из очевидных соотношений, полученных с учетом (13) и (14):

$$\begin{cases} b_{3i-2} = \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} f_1(s)ds, \quad b_{3i-1} = \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} f_2(s)ds, \\ b_{3i} = \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} f_3(s)ds, \quad \sigma_i = \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} u(s)ds, \quad i = \overline{1,k}; \\ a_{3i-g\ 3j-l} = \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} \left(\int\limits_{\omega_j^n} K_{3-g\ 3-l}(t,s)ds \right) dt + \varepsilon\delta_{3i-g\ 3j-l}; \\ i, j = \overline{1,k}; \quad g, l = \overline{0,2}. \end{cases} \tag{16}$$

В этих соотношениях $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$.

Как следует из теоремы Брауэра [12], система уравнений (15) всегда совместна. Это означает, что одно из решений уравнения (6) в пространстве $L_2^3(\Omega)$ (при использовании аппроксимирующих последовательностей $\{A_n\}$, $\left\{f^{(n)}\right\}$, $\{u_n\}$ рассмотренного типа) всегда может быть найдено из решения системы уравнений (15).

Отметим, что для случая аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами [7] при построении аппроксимирующей последовательности $\{A_n\}$ вида (13) можно вместо формул (14) использовать более простые соотношения:

$$\begin{cases} K_{gl}^{(n)}(t,s) = \begin{cases} K_{gl}\left(s_i^n, s_j^n\right) & при \quad t \in \omega_i^n, \quad s \in \omega_j^n, \quad i \neq j; \\ \dfrac{1}{mes\left(\omega_i^n\right)} \int\limits_{\omega_i^n} K_{gl}\left(s_i^n, s\right) ds & при \quad t, s \in \omega_i^n; \end{cases} \\ i, j = \overline{1,k}; \quad g, l = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{17}$$

В соотношениях (17) точка s_i^n есть центр квадрата ω_i^n.

В [7] показано, что для последовательности $\{A_n\}$ вида (13), (17) и для оператора влияния $A: L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ системы двух упругих полупространств выполнено условие (8). Это означает, что при решении задачи о контакте двух упругих полупространств в системе уравнений (15) коэффициенты a_{ij} можно вычислять без использования соотношений (16) следующим упрощенным способом

$$\begin{cases} a_{3i-l\ 3i-l} = \varepsilon + \int\limits_{\omega_i^n} K_{3-l\ 3-l}\left(s_i^n, s\right) ds \quad \left(\forall l = \overline{0,2}\right), \\ a_{3i-2\ 3i-1} = a_{3i-2\ 3i} = a_{3i-1\ 3i-2} = a_{3i-1\ 3i} = a_{3i\ 3i-2} = a_{3i\ 3i-1} = 0 \quad \forall i = \overline{1,k}; \\ a_{3i-g\ 3j-l} = mes\left(\omega_j^n\right) \cdot K_{3-g\ 3-l}\left(s_i^n, s_j^n\right) \quad \forall i, j = \overline{1,k} \quad (i \neq j); \\ g, l = \overline{0,2}. \end{cases} \tag{18}$$

Итерационный процесс для решения дискретного аналога уравнения. Приближенное решение операторного уравнения (1) и каждого из операторных уравнений системы (3) сводится к решению системы скалярных уравнений (15) при достаточно малом положительном ε и достаточно большом натуральном k. Эту систему можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\begin{cases} x_{3i-2} = h_{\sigma_i}\left(x_{3i-2} - E_1\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-2\ j} x_j - b_{3i-2}\right)\right); \\ x_{3i-1} = q\left(x_{3i-1} - E_2\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j - b_{3i-1}\right),\right. \\ \qquad\qquad \left. x_{3i} - E_3\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\ j} x_j - b_{3i}\right), \quad \mu \cdot x_{3i-2}\right); \\ x_{3i} = q\left(x_{3i} - E_3\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\ j} x_j - b_{3i}\right),\right. \\ \qquad\qquad \left. x_{3i-1} - E_2\left(\sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j - b_{3i-1}\right), \quad \mu \cdot x_{3i-2}\right); \\ i = \overline{1,k}; \end{cases} \tag{19}$$

где k есть количество граничных элементов равной площади, на которые разбивается область Ω, а E_1, E_2, E_3 есть произвольные положительные константы. Если положить $E_1 = 1/a_{3i-2\ 3i-2}$, $E_2 = 1/a_{3i-1\ 3i-1}$, $E_3 = 1/a_{3i\ 3i}$ в (19), то для решения этой системы можно предложить итерационный процесс

$$\begin{cases} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{3k}^{(0)}\right) \in R^{3k}; \\ x_{3i-2}^{(m+1)} = h_{\sigma_i}\left(\gamma_i^{(m)}\right), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} = q\left(\alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}\right), \\ x_{3i}^{(m+1)} = q\left(\beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}\right), \quad i = \overline{1,k}; \quad m = 0,1,2,\ldots\ , \end{cases} \tag{20}$$

где R^{3k} есть $3k$ -мерное евклидово пространство и величины $\gamma_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}$ определяются равенствами:

$$\begin{cases} \gamma_i^{(m)} = \dfrac{1}{a_{3i-2\ 3i-2}}\left(-\sum\limits_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2\ j} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j=3i-1}^{3k} a_{3i-2\ j} x_j^{(m)} + b_{3i-2}\right), \\ \alpha_i^{(m)} = \dfrac{1}{a_{3i-1\ 3i-1}}\left(-\sum\limits_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1\ j} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j=3i}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j^{(m)} + b_{3i-1}\right), \\ \beta_i^{(m)} = \dfrac{1}{a_{3i\ 3i}}\left(-\sum\limits_{j=1}^{3i-1} a_{3i\ j} x_j^{(m+1)} - \sum\limits_{j=3i+1}^{3k} a_{3i\ j} x_j^{(m)} + b_{3i}\right). \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, что итерационный процесс (20) – (21), который построен по аналогии с процессом Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений, может сходиться в пространстве R^{3k} лишь к такому элементу этого пространства, который является решением системы уравнений (19). Хотя обосновать сходимость итерационного процесса (20) – (21) весьма сложно, но при многократном его использовании для решения различных контактных задач [6; 8] не выявлено случаев, в которых бы не удалось получить приближенное решение задачи.

Численные результаты. Предложенным методом было получено численное решение пространственной квазистатической контактной задачи о вдавливании упругого шара радиуса 0,3 м в упругое полупространство нормальной к поверхности полупространства силой P, медленно возрастающей от нуля до некоторого предельного значения. Модули упругости E_1, E_2 и коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 шара и полупространства таковы: $E_1 = 3 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения $\mu = 0{,}12375$. Значение безразмерного параметра β, определяемого согласно [14] формулой

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_1(1-2\nu_2)(1+\nu_2) - E_2(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1(1-\nu_2)^2 + E_2(1-\nu_1)^2},$$

составляет для рассматриваемой контактной задачи 0,1875. Отношение $\mu/\beta = 0{,}66$.

Решение задачи получено с использованием декартовой системы координат xyz, начало которой расположено в точке начального касания тел, а ось z направлена внутрь шара ортогонально плоской поверхности полупространства. Процесс нагружения тел был осуществлен за десять шагов так, что величина Δ_{zi} жесткого сближения тел в направлении оси z на i–ом шаге нагружения задавалась линейным соотношением

$$\Delta_{zi} = 0,000007 \cdot i,$$

где номер шага i изменялся от 0 до 10 (при отсутствии относительных жестких смещений тел в направлении осей x и y).

Численные результаты получены с использованием поверхностной сетки, содержащей в себе $25 \times 25 = 625$ квадратных граничных элементов одинаковой площади $(k = 625)$. Для вычисления элементов a_{ij} матрицы влияния использовались соотношения (18), в которых функции $K_{ij}(s,t)$ задавались при помощи формул Буссинеска-Черутти [7], а значение ε определялось соотношением:

$$\varepsilon = 10^{-7} \int_{\omega_i^n} K_{11}\left(s_i^n, s\right) ds .$$

Все значения параметров σ_i приняты равными 10^7 МПа. Распределение контактной нагрузки по граничным элементам сетки для квазистатической задачи найдено при помощи итерационного процесса (20) – (21). С целью оценки погрешности, вызванной предположением о статичности рассматриваемой контактной задачи, было получено также численное решение соответствующей статической контактной задачи, для которой жесткое сближение Δ_z тел в направлении оси z принято равным 0,00007 (что соответствует десятому шагу нагружения в квазистатической постановке).

Полученные на десятом шаге нагружения значения напряжений τ_{zy}, действующих в точках поверхности шара, соприкасающихся с полупространством по оси y, сопоставлялись с результатами решения соответствующей осесимметричной контактной задачи, приведенными в работе [14] для случая $\mu / \beta = 0,66$. В табл. 1 показана зависимость величины $\tau_{zy} / \left(\beta \cdot p_{max}\right)$ от параметра y / a (первая строка таблицы соответствует решению [14], вторая – полученному численному решению квазистатической задачи на десятом шаге нагружения, третья – полученному численному решению соответствующей статической задачи). Здесь символ p_{max} обозначает максимальное значение нормального контактного давления, а символ a – радиус площадки контакта.

Таблица 1

Зависимость касательного напряжения от расстояния

y / a	0.000	0.095	0.190	0.285	0.380	0.475	0.570	0.665	0.760	0.855	0.950
1	0.00	-0.16	-0.27	-0.33	-0.40	-0.42	-0.45	-0.43	-0.37	-0.27	-0.10
2	0.00	-0.16	-0.25	-0.35	-0.41	-0.44	-0.46	-0.41	-0.35	-0.27	-0.09
3	0.00	-0.11	-0.30	-0.53	-0.59	-0.58	-0.53	-0.46	-0.37	-.027	-0.10

Заключение. Данные, представленные в таблице, свидетельствуют о хорошем соответствии полученных результатов численного решения квазистатической контактной задачи с ее приближенным аналитическим решением [14]. Эти данные свидетельствуют ещё и о том, что пренебрежение квазистатичностью рассмотренной контактной задачи приводит к заметному уменьшению радиуса зоны сцепления и к увеличению наибольшего значения $\left|\tau_{zy}\right|$ примерно на 30 % по сравнению с квазистатическим решением.

Библиографические ссылки

1. **Галанов Б.А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галаганов // ПММ. – 1985. – Т. 49, вып. 5. – С. 827 – 835.
2. **Галанов Б.А.** О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел / Б.А. Галаганов // Изв. АН СССР, МТТ. – 1981. – № 5. – С. 61–67.
3. **Александров В.М.** Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В.М. Александров, I.I. Kalker, Д.А. Пожарский // Изв. РАН, МТТ. – 1999. – № 4. – С. 51 – 55.
4. **Чебаков М.И.** Трехмерная контактная задача для слоя с учетом сил трения в области контакта / М.И. Чебаков // Изв. РАН, МТТ. – 2002. – № 6. – С. 59 – 68.
5. **Александров В.М.** Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // ПММ. – 2004. – Т. 68, вып. 3. – С. 516 – 527.
6. **Александров А.И.** Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А.И. Александров – Д., 1989. 74 с. (Препринт / АН УССР, Институт технической механики; 89-2).
7. **Александров А.И.** Вопросы существования решений некоторых нелинейных интегральных уравнений / А.И. Александров – Д., – 1991. – 48 с.
8. **Александров А.И.** Решение задачи о контактном взаимодействии упругих тел с кулоновым трением / А.И. Александров, И.Б. Бокий // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д., – 1995. – С. 115 – 120.
9. **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М., – 1981. – 544 с.
10. **Александров А.И.** О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения / А.И. Александров. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2009. – Вип. 14, т.1. – С. 3 – 11.
11. **Александров А.И.** Регуляризирующий алгоритм для нелинейных интегральных уравнений контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения / А.И. Александров // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2009. – 1. – С. 5 – 9.
12. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М., – 1984. – 752 с.
13. **Александров А.И.** Метод последовательных приближений: учебное пособие / А.И. Александров – Д., – 1995. – 36 с.
14. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон – М., – 1989. – 510 с.

Надійшла до редколегії 02.02.10