

УДК 539.3

Н. М. Антоненко, І. Г. Величко
Запорізький національний університет

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ НА ВИПАДОК ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОТИЧНИХ І НОРМАЛЬНИХ ПРУЖНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ШАРАМИ

Пропонується спосіб точного розв'язання першої граничної задачі теорії пружності для багатошарових основ при наявності пружного контакту між шарами у випадку плоскої деформації. Даний спосіб є узагальненням методу функцій податливості, який раніше використовувався для основ з повним або гладким контактами між шарами. Досліджено вплив коефіцієнтів, які характеризують пружні зв'язки, на розподіл напружень і переміщень у шарах двошарової основи.

Ключові слова: теорія пружності багатошарових основ, функції податливості, дотичні та нормальні зв'язки між шарами.

Предложен способ точного решения первой граничной задачи теории упругости для многослойного основания при наличии упругого контакта между слоями в случае плоской деформации. Данный способ является обобщением метода функций податливости, который раньше использовался для оснований с полным или гладким контактами между слоями. Исследовано влияние коэффициентов, которые характеризуют упругие связи, на распределение напряжений и перемещений в слоях двухслойного основания.

Ключевые слова: теория упругости многослойного основания, функции податливости, касательные и нормальные связи между слоями.

The method of exact solution of the first boundary problem of the elasticity theory for multilayer base with elastic contact between the layers for the case of two-dimensional deformations is presented. The given method provides generalization of the flexibility function method, which was previously used for the basis with full or smooth contact between the layers. The influence of above mentioned loads on relative length of contact zone, stress, intensity coefficient and the rate of discharged energy is estimated.

Keywords: The theory of elasticity, multiplayer basis flexibility functions, circumferential and normal bumping relation.

Постановка задачі і огляд публікацій. При розрахунку на міцність конструкцій, які мають шарувату структуру, часто використовується модель багатошарової основи. Сучасний стан механіки багатошарових середовищ відображений в оглядах В.Г. Піскунова і А.О. Рассказова [5], Carrera Erasmo [8], О.М. Гузя і В.М. Чехова [4].

Одним із ефективних способів розв'язку задач теорії пружності для багатошарових основ є метод функцій податливості, описаний, наприклад, в [6]. Як правило, він застосовувався для розрахунку НДС багатошарових основ з повним або гладким контактами між шарами. Існують лише окремі публікації присвячені дослідженню напружено-деформованого стану багатошарових основ з пружним типом контакту між шарами. Наприклад, у статті Ю.Я. Годеса [3] розглянута задача про просторову деформацію багатошарової основи з дотичними пружними зв'язками між шарами і отримано її аналітичний розв'язок. С.І. Вільданова [2] розповсюдила метод функцій податливості на динамічні задачі про усталений рух навантаження по поверхні багатошарової основи з довільним чергуванням однорідних та неперервно неоднорідних по глибині шарів з пружними зв'язками. Випадок плоскої деформації багатошарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами не розглядався.

Розглянемо пакет із n шарів, які лежать на півпросторі (пружному чи абсолютно жорсткому). Таку конструкцію, зображену на рис. 1, будемо називати багатошаровою основою. Кожний шар вважатимемо невагомим, однорідним і ізотропним. Кожний шар характеризується товщиною h , модулем зсуву μ і коефіцієнтом Пуассона ν . Між сусідніми шарами має місце клейове з'єднання, яке будемо моделювати пружним контактом. Деформація багатошарової основи плоска. Ставиться задача знаходження переміщень і напружень у шарах основи, якщо на поверхні основи відомі напруження.

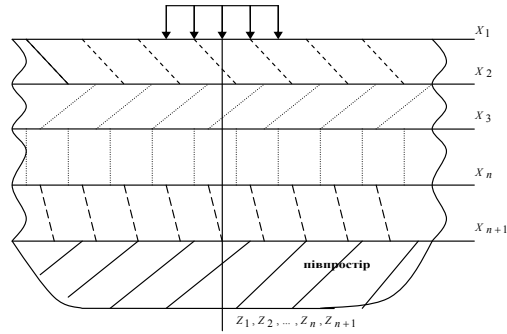


Рис. 1. Багатошарова основа

Деформація багатошарової основи. Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Півплощині присвоїмо номер $n + 1$. Усі величини, які відносяться до k -го шару, будемо позначати нижнім індексом k . Якщо індекс відсутній, то це означає що величина відноситься до k -го шару. У кожному шарі введемо прямокутну декартову систему координат $O_k X_k Z_k$ з початком на верхній границі шару так, щоб вісі Z_k усіх систем координат збігалися і були напрямлені углиб шару. Всі вісі X_k паралельні X_1 і лежать на верхніх площинах відповідних шарів.

Умови того, що між k -м і $k + 1$ -м шарами має місце пружний контакт, мають вигляд:

$$\begin{cases} u_{k+1}(x, 0) = u_k(x, h_k) + m_k \tau_{xzk}(x, h_k); \\ w_{k+1}(x, 0) = w_k(x, h_k) + r_k \sigma_{zk}(x, h_k), w_{k+1}(x, 0) \geq w_k(x, h_k); \\ \sigma_{zk+1}(x, 0) = \sigma_{zk}(x, h_k); \\ \tau_{xzk+1}(x, 0) = \tau_{xzk}(x, h_k). \end{cases} \quad (1)$$

Тут $m_k \geq 0$, $r_k \geq 0$ – коефіцієнти пружних зв'язків (вони мають розмірність $m/Па$). У другому із цих співвідношень записана додаткова умова, яка виключає взаємне проникнення сусідніх шарів.

Зауважимо, що з умов сумісності деформації для пружного контакту при $m_k = r_k = 0$ одержимо умови того, що між k -м і $k + 1$ -м шарами основи має місце повний контакт, а при $m_k \rightarrow \infty$ і $r_k = 0$ – гладкий контакт.

Уведемо допоміжні функції, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній границі шару формулами:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk}(\xi, 0), \beta_k = \mu_k p w_k(\xi, 0), \gamma_k = -\mu_k i \xi u_k(\xi, 0), \delta_k = -\frac{i \xi}{p} \bar{\tau}_{xzk}(\xi, 0). \quad (2)$$

Тоді напруження і переміщення в одному шарі повністю визначаються заданням четвірки допоміжних функцій $\alpha_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), \delta_k(\xi)$ [7]:

$$\begin{aligned}
 W_k(\xi, z) &= \frac{1}{2\mu_k} [((2 - \omega_k)shpz - \omega_k pzchpz)\alpha_k + 2(-\omega_k pzshpz + chpz)\beta_k + \\
 &\quad + 2((1 - \omega_k)shpz - \omega_k pzchpz)\gamma_k - \omega_k pzshpz\delta_k], \\
 S_k(\xi, z) &= \frac{1}{2\mu_k} [\omega_k pzshpz\alpha_k + 2((1 - \omega_k)shpz + pz\omega_k chpz)\beta_k + 2(\omega_k pzshpz + \\
 &\quad + chpz)\gamma_k + ((2 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k], \\
 \bar{\sigma}_{\mathbf{x}}(\xi, z) &= (chpz - \omega_k pzshpz)\alpha_k + 2\omega_k(shpz - pzchpz)\beta_k - 2\omega_k pzshpz\gamma_k - \\
 &\quad - ((1 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k, \\
 \bar{\sigma}_{\mathbf{xk}}(\xi, z) &= ((2\omega_k - 1)chpz + \omega_k pzshpz)\alpha_k + 2\omega_k(shpz + pzchpz)\beta_k + \\
 &\quad + 2\omega_k(pzshpz + 2chpz)\gamma_k + ((1 + \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k, \\
 -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\mathbf{xzk}}(\xi, z) &= -(1 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\alpha_k + 2\omega_k pzshpz\beta_k + \\
 &\quad + 2\omega_k(shpz + pzchpz)\gamma_k + (chpz + \omega_k pzshpz)\delta_k. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Таким чином, для визначення напружено-деформованого стану основи необхідно знайти $4n$ допоміжних функцій.

Застосуємо до співвідношень (1) пряме перетворення Фур'є. Отримані співвідношення можна привести до вигляду:

$$\begin{cases}
 -i\xi\bar{u}_{k+1}(\xi, 0) = -i\xi\bar{u}_k(\xi, h_k) + m_k p(-\frac{i\xi}{p})\bar{\tau}_{\mathbf{xzk}}(\xi, h_k), \\
 p\bar{w}_{k+1}(\xi, 0) = p\bar{w}_k(\xi, h_k) + r_k p\bar{\sigma}_{\mathbf{zk}}(\xi, h_k), \\
 \bar{\sigma}_{\mathbf{zk}+1}(\xi, 0) = \bar{\sigma}_{\mathbf{zk}}(\xi, h_k), \\
 -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\mathbf{xzk}+1}(\xi, 0) = -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\mathbf{xzk}}(\xi, h_k).
 \end{cases} \tag{4}$$

Підставляючи (3) до(4), одержимо рекурентні формули, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів. Дані співвідношення можна представити в матричному вигляді:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k}\bar{\alpha}_k + T_{12k}\bar{\beta}_k, \tag{5}$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = (T_{21k} + NT_{11k})\bar{\alpha}_k + (T_{22k} + NT_{12k})\bar{\beta}_k, \tag{6}$$

де
$$N = \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix}, \Delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}},$$

$$T_{11k} = \begin{pmatrix} chph_k - \omega_k ph_k shph_k & -(1 - \omega_k)shph_k - \omega_k ph_k chph_k \\ -(1 - \omega_k)shph_k + \omega_k ph_k chph_k & chph_k + \omega_k ph_k shph_k \end{pmatrix},$$

$$T_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k (shph_k - ph_k chph_k) & -2\omega_k ph_k shph_k \\ 2\omega_k ph_k shph_k & 2\omega_k (shph_k + ph_k chph_k) \end{pmatrix},$$

$$T_{21k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k)shph_k - \omega_k ph_k chph_k & -\omega_k ph_k shph_k \\ \omega_k ph_k shph_k & (2 - \omega_k)shph_k + \omega_k ph_k chph_k \end{pmatrix},$$

$$T_{22k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} -\omega_k ph_k shph_k + chph_k & (1-\omega_k)shph_k - \omega_k ph_k chph_k \\ (1-\omega_k)shph_k + ph_k \omega_k chph_k & \omega_k ph_k shph_k + chph_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t, \quad \bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t.$$

Отже, розв'язок основної граничної задачі теорії пружності для багатошарової основи зводиться до знаходження четвірки допоміжних функцій одного із шарів, наприклад, першого. Дві з чотирьох допоміжних функцій можна знайти із граничних умов. Для знаходження інших функцій використовують функції податливості. Використовуючи міркування застосовані для основ із зчепленими шарами викладені в [1], можна показати, що четвірка допоміжних функцій шару лінійно-залежна. Ця залежність може бути представлена у вигляді

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k, \quad (7)$$

де A_k – матриця податливості k -го шару, а матриці податливості сусідніх шарів пов'язані співвідношеннями

$$A_k = (A_{k+1}T_{12k} - T_{22k} - NT_{12k})^{-1}(T_{21k} + NT_{11k} - A_{k+1}T_{11k}). \quad (8)$$

Елементи матриць податливості не залежать від напружено-деформованого стану основи. Вони залежать від модулів пружності, товщин шарів, які лежать нижче k -го, коефіцієнтів пружних зв'язків r , m та змінної $p = |\xi|$.

Знайдемо матрицю податливості абсолютно жорсткого півпростору. Відомо, що в цьому випадку переміщення точок верхньої границі півпростору будуть нульовими. Це рівносильно рівностям $\beta_{n+1}(\xi) = \gamma_{n+1}(\xi) = 0$. Таким чином, матриця податливості абсолютно жорсткого півпростору буде нульовою: $A_{n+1} = \theta$.

Розглянемо шар, який лежить на абсолютно жорсткому півпросторі. З (8) слідує, що його матриця податливості буде обчислюватися за формулою

$$A_1 = (-T_{221} - NT_{121})^{-1}(T_{211} + NT_{111}). \quad (9)$$

Щоб знайти матрицю податливості пружного півпростору, перейдемо в (9) до границі при $h_1 \rightarrow \infty$. Отже, матриця податливості пружного півпростору прийме вигляд

$$A_{n+1} = \frac{1}{2\omega_{n+1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 - \omega_{n+1} \\ 1 - \omega_{n+1} & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Зауважимо, що елементи матриці податливості пружного півпростору не залежать від коефіцієнтів пружних зв'язків m_k і r_k . Наявність формул для обчислення матриць податливості абсолютно жорсткого й пружного півпросторів дає можливість використовувати формули (8) для обчислення всіх матриць податливості багатошарової основи.

Дослідження впливу нормального навантаження на розподіл напружень і переміщень у шарах двошарової основи з пружними зв'язками між шарами. Наведемо результати розв'язку першої граничної задачі для двошарової основи, яка лежить на абсолютно жорсткому півпросторі (випадок плоскої деформації). Кожен із шарів характеризується наступними параметрами: модулем зсуву $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, коефіцієнтом Пуасона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ і товщиною $h_1 = h_2 = h$. Між шарами – пружний контакт. На верхній границі шару дотичне навантаження відсутнє, а на початку координат прикладена нормальна зосереджена розтягуюча сила величиною Q , тобто

$$\sigma_z(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0.$$

На рис. 2(5), 3(6) і 4(7) наведені графіки нормальних (дотичних) напружень на нижній границі другого шару для значень коефіцієнтів пружних зв'язків, вказаних у табл. 1. Номери графіків на рисунках відповідають номерам, вказаним у першому стовпці табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнти пружних зв'язків шарів

№ графіка	Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис. 2, рис. 5, рис. 8, m / Pa				Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис. 3, рис. 6, рис. 9, m / Pa				Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис. 4, рис. 7, рис. 10, m / Pa			
	m_1	r_1	m_2	r_2	m_1	r_1	m_2	r_2	m_1	r_1	m_2	r_2
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	10	10
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10
3	10	10	10	10	1	1	10	10	10	10	10	10
4	100	100	100	100	1	1	100	100	100	100	10	10

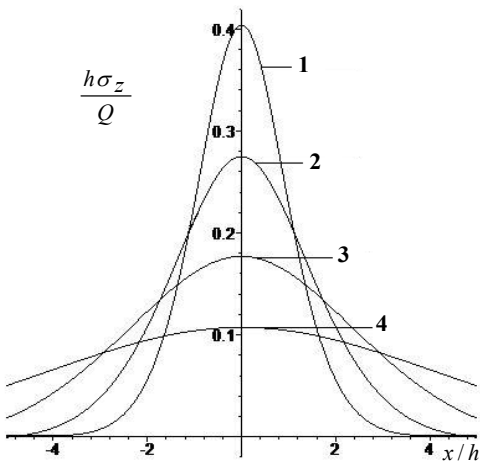


Рис. 2. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

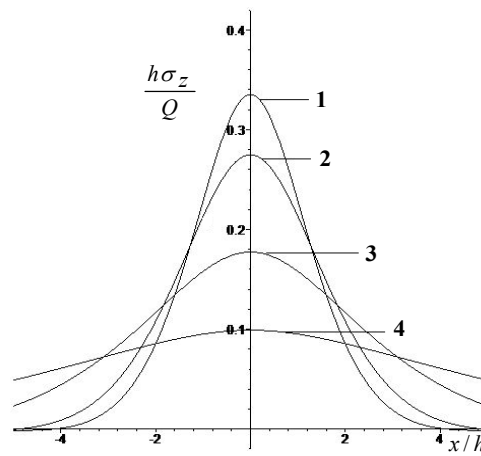


Рис. 3. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

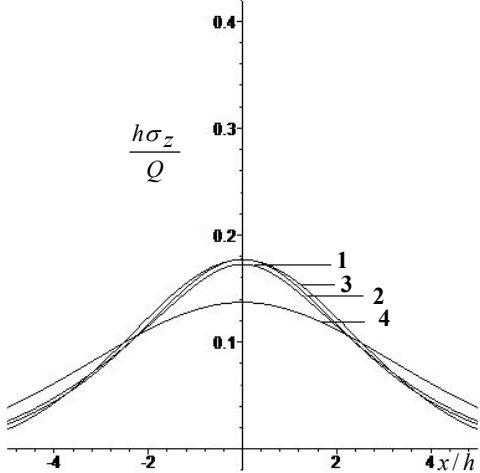


Рис. 4. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

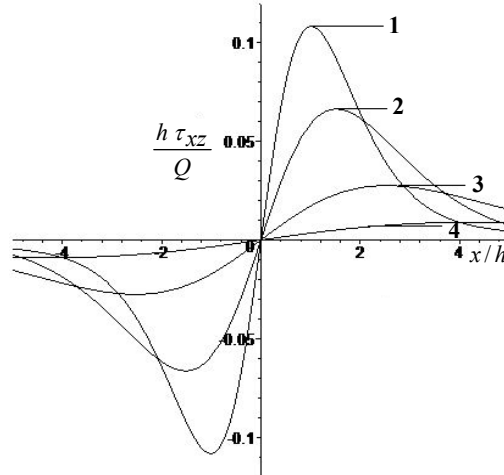


Рис. 5. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

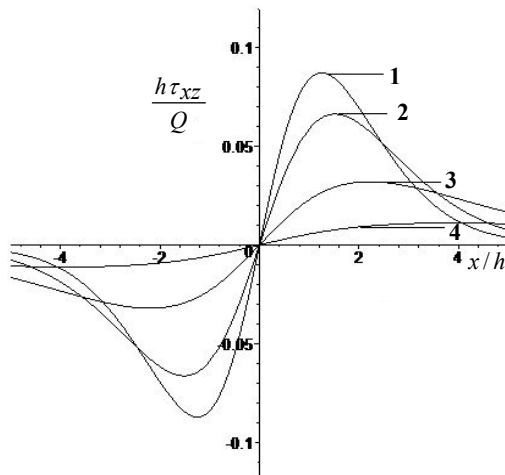


Рис. 6. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

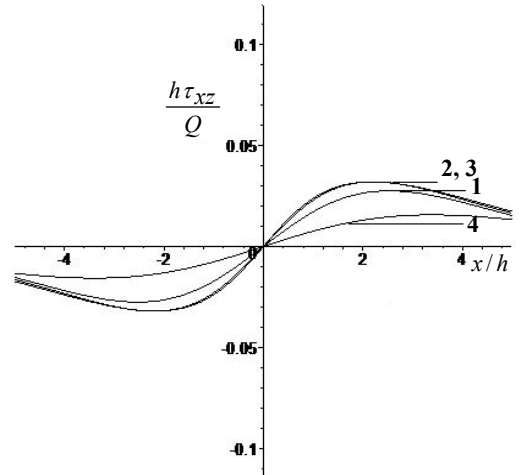


Рис. 7. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

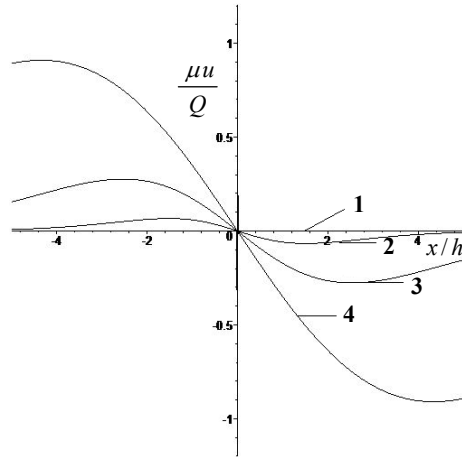


Рис. 8. Горизонтальні переміщення

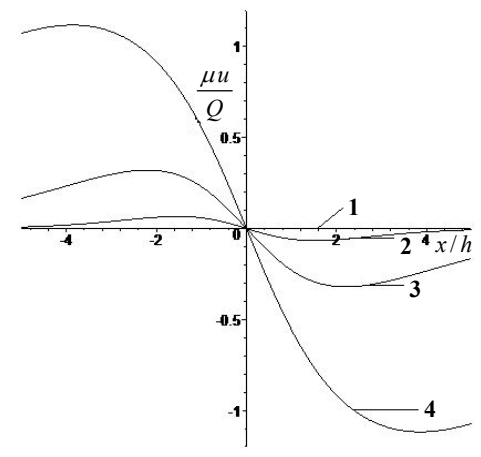


Рис. 9. Горизонтальні переміщення

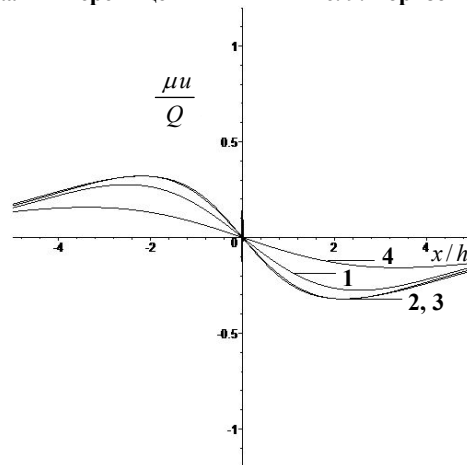


Рис. 10. Горизонтальні переміщення

Аналіз проведених чисельних досліджень дозволив зробити деякі висновки відносно впливу коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень у двошаровій основі, яка навантажена зосередженою силою, прикладеною до її верхньої межі.

На рис. 2 графіки нормальних напружень σ_z , які обчислюються на нижній межі другого шару, побудовані для випадків, коли всі чотири коефіцієнта пружних зв'язків основи є однаковими між собою. Можна побачити, що при одночасному збільшенні коефіцієнтів пружних зв'язків спостерігається зменшення максимальних значень для напружень σ_z , і їх розподіл стає ближчим до рівномірного. Якщо порівняти між собою рисунки 3 та 4, в яких зафіксовані модулі пружних зв'язків на нижній межі першого і другого шару відповідно, а змінюються два інших коефіцієнта, то можна помітити, що зміна коефіцієнтів m_1 і r_1 менш суттєво впливає на розподіл нормальних напружень, ніж коефіцієнтів m_2 і r_2 .

Для дотичних напружень τ_{xz} на нижній межі другого шару, зображених на рис. 5, 6 та 7, також можна зробити висновок про суттєву їх залежність від коефіцієнтів пружних зв'язків на нижній межі нижнього і відносно малу залежність від таких же коефіцієнтів на верхній межі цього шару.

На рис. 8, 9 та 10 зображені графіки горизонтальних переміщень. З них видно, що переміщення змінюються пропорційно дотичним напруженням, хоча і обчислюються за іншими формулами, проте мають протилежний знак, що узгоджується з умовами (1) і додатково свідчить про вірогідність розрахунків.

Висновок. Таким чином, проведений чисельний аналіз дозволяє висунути гіпотезу, що у пружних багатошарових основах при наявності пружного контакту між шарами суттєвий вплив на розподіл напружень поблизу деякої спільної межі двох сусідніх шарів мають лише пружні зв'язки на цій межі. При інженерних розрахунках, у разі підтвердження цієї гіпотези, інші шари можна вважати зчепленими між собою, що спрощує реалізацію розв'язків цієї задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Величко І.Г.** Матричний формалізм метода функцій податливості / І.Г. Величко // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. — 2000. — Т.2, вип..3. — С. 12–19.
2. **Вильданова С.И.** Критическая скорость движения нагрузки по упругому многослойному основанию / С.И. Вильданова // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А.: Природничі науки, Вип. 2. — 2002.— С. 212–216.
3. **Годес Ю.Я.** Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями / Ю. Я. Годес // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. — 1987. — С. 92–97.
4. **Гузь А.Н.** Задачи складкообразования в слоистой толще земной коры / А.Н. Гузь, В.Н. Чехов // Прикл. мех. — 2007. — Т.43(53), №2. — С. 3–44.
5. **Пискунов В.Г.** Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Прикл. мех. — 2002. — 38, №2. — С. 22–56.
6. **Приварников А. К.** Пространственная деформация многослойного основания / А. К. Приварников // Устойчивость и прочность элементов конструкций. — Д., — 1973. — С. 27–45.
7. **Ткаченко І.Г.** Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2005. — Вип. 3. — С. 70–78.
8. **Carrera Erasmo.** Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / Erasmo Carrera // Appl. Mech. Rev. — 2003. — 56, №3. — С. 287–308.

Надійшла до редколегії 10.10.09