

УДК 539.376

Ю.А. Черняков, Д.К. Тесленко, В.П. Шнейдер, А.В. Гончаренко
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара**УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ
УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Разработана методика определения точек бифуркации для трехмерных упруго-вязкопластических тел. Упруго-вязкопластическое поведение среды описывается теорией ползучести, учитывающей микродеформации. Исследована устойчивость толстой прямоугольной плиты при сложном нагружении.

Ключевые слова: теория ползучести, микродеформации, устойчивость, трехмерные тела.

Розроблена методика визначення точок біфуркації для тривимірних пружно-в'язкопластичних тіл. Пружно-в'язкопластична поведінка середовища описується теорією повзучості, що враховує мікродеформації. Досліджено стійкість товстої прямокутної плити при складному навантаженні.

Ключові слова: теорія повзучості, мікродеформації, стійкість, тривимірні тіла.

The method of the definition of bifurcation point of three-dimensional elastic-viscoplastic bodies was developed. The elastic-viscoplastic behaviour of continuum is described by the creeping theory, which includes micro strains. The stability of thick rectangular plate under complex loading was examined.

Keywords: creeping theory, micro strains, stability, three-dimensional bodies.

Исследование бифуркации процесса деформирования в вязкоупругопластических средах. Рассмотрим произвольное вязкопластическое тело, занимающее в недеформированном состоянии область V_0 с границей S_0 . На части S_σ поверхности будем предполагать, что заданы номинальные поверхностные нагрузки $p_i(t)$, на оставшейся части S_u – заданы скорости перемещений $v_i(t)$. Пусть в произвольный момент времени t_b напряженно-деформированное состояние в теле характеризуется тензором напряжений Кирхгофа τ^{ij} и метрическим тензором деформированной конфигурации G^{ij} . Соответствующая задача устойчивости сводится к нахождению нетривиального решения следующей системы дифференциальных уравнений для разностей [1]

$$\Delta \dot{\pi}_{ij,i} = 0 \text{ для } \bar{x} \in V_0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$N_i \Delta \dot{\pi}_{ij} = 0 \text{ для } \bar{x} \in S_\sigma, \quad (2)$$

$$\Delta v_i = 0 \text{ для } \bar{x} \in S_u. \quad (3)$$

Выше обозначено: $\dot{\pi}_{ij}$ – компоненты скорости изменения тензора Пиола-Кирхгофа 1-го рода, N_i – компоненты внешней нормали к поверхности S_0 , запятая обозначает ковариантную производную по соответствующему индексу.

Записанная выше система уравнений должна быть дополнена соответствующими определяющими соотношениями теории упруго-вязкопластичности. Боднер [6] предложил приближенный метод определения вязкопластической бифуркационной точки. Суть этого метода состоит в том, что скорость пластической деформации

$\dot{\varepsilon}_p$ вважається постійною при диференціюванні в'язкопластического визначеного співвідношення по пластическій деформації ε_p . Використання цього підходу має то перевагу над повним чисельним аналізом, що він дає швидку оцінку біфуркаційної навантаження. В [7] запропоновано модифікацію підходу Боднера, в якій уже закладено напрямлення виходу системи з точки біфуркації. Цей варіант к тому ж є більш простим і універсальним. Використовуючи запропоновані в [6–7] методики, визначаючі співвідношення для епруго-в'язкопластического матеріалу нетрудно привести к виду, формально збігаючому с епругопластическими

$$\dot{\sigma}_{ij} = G_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4)$$

і використовувати для отримання точки біфуркації процесу деформування хорошо розроблені методики [1].

Визначаючі співвідношення теорії ползучести, улічуючої мікродеформації. Як уже неодноразово відзначалося во багатьох дослідженнях стійкості деформуємих тіл, біфуркація процесу деформування супроводжується изломом траєкторії навантаження. Крім того, складні процеси навантаження можуть передшествовати непосредственно самій точці біфуркації. Слідовательно, для дослідження стійкості епруго-в'язкопластических тіл, необхідно використовувати відповідну диференціально-нелінійну теорію. Нижче приведемо алгоритм побудови визначаючих співвідношень теорії епруго-в'язкопластичности, улічуючої мікродеформації [3].

В основу теорії мікродеформацій закладається представлення о том, що представительний макрооб'єм є деякою сукупністю взаємозв'язаних мікрочастиць, напружено-деформованное состояние которых визначається мікронапруженнями і мікродеформаціями відповідно. Таким образом, приймається существование, по крайней мере, двух уровней характерных размеров: макроуровень, визначаємих розмірами представительного макрооб'єма, і мікроуровень, характерний розмір которого визначається розмірами мікрочастиці. В теорії мікродеформацій мікроуровень обычно находится в диапазоне от уровня монокристалла до уровня зерна поликристаллического материала. В основном [2–3] именно уровень зерна выступает в качестве микроуровня, что и принято в настоящей работе.

Следую [3], будем считать, что каждая микрочастица находится в однородном напружено-деформованном состоянии. При этом ее относительный объем (отношение объема микрочастицы к объему представительного макрооб'єма) равен Δv_n ($n = 1 \dots N$). Каждая микрочастица обладает следующими свойствами: ее предел текучести равен $\tau_n \in T$ и однородная в пределах этого объема пластическая деформация характеризується некоторим тензорным направлением $\hat{\mu}_n \in \Omega$. Поскольку материал предполагается изначально изотропным, то мы считаем, что все возможные направления микровязкопластического деформування распределены равномерно в Ω , и для каждого фиксированного направления локальные пределы текучести распределены одинаково.

Для упрощения изложения будем рассматривать случай малых деформаций. Поэтому при построении локального закона деформування n -й микрочастицы тензор мікродеформації $\hat{\varepsilon}_n$ представим в виде суммы епругой $\hat{\varepsilon}_{en}$ и пластической $\hat{\varepsilon}_{pn}$ составляющих

$$\hat{\varepsilon}_n = \hat{\varepsilon}_{en} + \hat{\varepsilon}_{pn}. \quad (1)$$

В предположении, что пластические деформации не влияют на упругость среды, закон упругости принимается в следующем виде

$$\hat{\sigma}_n = \tilde{G} : \hat{\varepsilon}_{pn}, \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}_n$ – тензор микронапряжений, \tilde{G} – тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости), который записывается

$$\tilde{G} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \tilde{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{i}\hat{i} \right], \quad (3)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона частицы соответственно, \tilde{I} , \hat{i} – единичные тензоры четвертого и второго ранга. При этом считается, что упругая матрица жесткости микрочастицы совпадает с упругой матрицей жесткости макрообъема.

Макропластическая деформация получается осреднением по всему представительному макрообъему микровязкопластической деформации

$$\hat{\varepsilon}_p = \sum_{n=1}^N \hat{\varepsilon}_{pn} \Delta v_n, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^N \Delta v_n = 1. \quad (4)$$

Девииатор напряжений \hat{s}_n представим в виде

$$\hat{s}_n = \hat{\tau}_n + \hat{\rho}_n, \quad (5)$$

подразумевая, как и в [4], под девиаторами $\hat{\tau}_n$ и $\hat{\rho}_n$ диссипативную и упругую составляющие сопротивления пластическим деформациям. Такое представление связано с тем, что при деформировании по замкнутому циклу часть работы пластических деформаций всегда обратима, что обуславливается существованием микроупругих сил, оказывающих сопротивление остаточным сдвигам. Механизм возникновения этих микроупругих сил, как отмечалось в [4], состоит в том, что условиям совместности деформации подчиняются не упругие и пластические деформации порознь, а их сумма. Отсюда неоднородной пластической деформации всегда соответствует и неоднородная упругая деформация, сопровождающаяся возникновением внутренних упругих сил, оказывающих сопротивление пластическому деформированию (а в некоторых случаях, например, при разгрузке и противоположном нагружении, наоборот, ему помогающих).

Следуя [3], тензор диссипативных сил $\hat{\tau}_n$ задается законом пластического течения

$$\hat{\tau}_n = \tau_n \hat{\mu}_n, \quad \hat{\mu}_n = \hat{\varepsilon}_{pn} / \dot{\lambda}_n, \quad (6)$$

где τ_n – локальный предел текучести n -й микрочастицы, $\hat{\mu}_n$ – как уже сказано было выше, направляющий тензор ($\hat{\mu}_n : \hat{\mu}_n = 1$), определяющий направление скорости микровязкопластической деформации n -й микрочастицы, $\dot{\lambda}_n$ ($\dot{\lambda}_n = \sqrt{\hat{\varepsilon}_{pn} : \hat{\varepsilon}_{pn}}$) – интенсивность скорости микровязкопластической деформации.

Примем, как это обычно принято при формулировке теорий ползучести, что локальный предел текучести τ_n зависит от интенсивности скорости микровязкопластической деформации $\dot{\lambda}_n$

$$\tau_n = \tau_{n0} + \tau_{n1} \cdot \left(\dot{\lambda}_n\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{7}$$

Такой подход позволяет описать рост локального предела текучести с ростом скорости нагружения. Параметр τ_{n0} определяется как предел текучести при квазистатическом нагружении.

Отметим, что, вообще говоря, локальный предел текучести (предел текучести отдельного зерна) зависит, например, от размеров и формы конкретного зерна. В [5] было показано, что учет реального распределения размеров зерен в образце материала (а соответственно, и распределение пределов текучести различных зерен) позволяет существенно улучшить описание пластического деформирования поликристаллических материалов. Таким образом, в реальном материале всегда наблюдается некоторый разброс (распределение) параметров материала, относящихся к определению локального предела текучести. Поэтому, в данной работе, принято, что параметры τ_{n0} и τ_{n1} меняются от частицы к частице, и их общее распределение задается линейным законом (вообще говоря, такое распределение в реальных материалах обычно бывает логнормальным, но в данной работе принципиальным моментом является именно наличие такого распределения, а не его характер).

Записанные выше соотношения (6) выполняются при активном микровязкопластическом деформировании, которое имеет место, когда

$$\sqrt{\hat{\tau}_n : \hat{\tau}_n} = \tau_n \text{ и } \dot{\lambda}_n > 0. \tag{8}$$

Когда записанное условие (8) не выполняется, то имеет место разгрузка по упругому закону (2).

Примем, с учетом [3; 5], изменение девиатора внутренних микронапряжений n -й микрочастицы в следующем обобщенном виде:

$$\dot{\rho}_n = \begin{cases} R_{1n} \dot{\epsilon}_{pn} + R_{2n} \dot{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \dot{\lambda}_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n' \text{ и } \tau_n = \tau_n' \\ R_{2n} \dot{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \dot{\lambda}_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n \neq \hat{\mu}_n' \text{ или } \tau_n \neq \tau_n' \\ -R_{4n} (R_{1n} + A_n) \dot{\epsilon}_{pn} + R_{2n} \dot{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \dot{\lambda}_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n = -\hat{\mu}_n' \text{ и } \tau_n = \tau_n' \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{\mu}_n'$ и τ_n' – соответственно направление пластического деформирования и предел текучести микрочастицы, деформирующейся активно, R_{1n} , R_{2n} , R_{3n} , R_{4n} , A_n – константы материала.

В данном соотношении, как показано в [4], можно выделить отдельные части, отвечающие за различные механизмы упрочнения. В частности, слагаемое с коэффициентом R_{1n} отвечает за сингулярность поверхности текучести, слагаемое с R_{2n} отвечает за поступательное перемещение (трансляцию) регулярной части поверхности текучести, слагаемое с R_{3n} – за расширение регулярной части поверхности текучести (изотропное упрочнение). В соотношении (9) последняя строчка отвечает за поведение тыльной части поверхности текучести. В частности, при $R_{4n} = 1$ теория будет описывать идеальный эффект Баушингера (принцип Мазинга) (как показано в [4]). При $R_{4n} \neq 1$ становится возможным учет неидеального эффекта Баушингера, таким образом, теория в состоянии описывать и циклически нестабильные материалы (циклически упрочняющиеся и разупрочняющиеся).

Для установлення зв'язи локальних законів мікро- і макроскопічного деформування воспользуємося соотношениями типа соотношения Кренера

$$\hat{s} - \hat{s}_n = \tilde{A}_n : (\hat{\varepsilon}_{pn} - \hat{\varepsilon}_p), \quad (10)$$

где \tilde{A}_n – тензорная функция четвертого ранга микро- и макроскопического состояния материала.

Влияние истории добифуркационного нагружения на устойчивость упруго-вязкопластической плиты. С использованием предложенного алгоритма рассмотрим задачу об устойчивости прямоугольной упруго-вязкопластической плиты. Рассмотрим плиту, шарнирно закрепленную по боковым поверхностям, занимающую в недеформированном состоянии область:

$$0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}.$$

На боковых поверхностях пластины предположим известными значения сжимающих усилий $p(t)$ и $q(t)$.

Представим форму потери устойчивости для плиты в виде

$$\begin{cases} \Delta v_1 = h \cdot f_1 \left(\frac{x_3}{h} \right) \cdot \cos \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \\ \Delta v_2 = h \cdot f_2 \left(\frac{x_3}{h} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \cos \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \\ \Delta v_3 = h \cdot f_3 \left(\frac{x_3}{h} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \end{cases} \quad (11)$$

где m и n – параметры волнообразования.

Данный выбор формы потери устойчивости удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания в интегральном смысле на боковых поверхностях плиты. Подставляя форму потери устойчивости (11) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций f_i .

Решение данной системы можно представить в виде

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^6 C_i \cdot \vec{a}_i \cdot \exp \left(\frac{\lambda_i \cdot x_3}{h} \right),$$

где C_i – произвольные константы интегрирования, \vec{a}_i и λ_i – собственные вектора и характеристические корни системы.

Удовлетворяя граничным условиям (2) на верхней и нижней поверхностях пластины ($x_3 = \pm \frac{h}{2}$), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для констант интегрирования C_i . Условием для существования ненулевого решения для данной системы, а соответственно и для нахождения критического времени, будет равенство нулю определителя

$$\text{Det}(m_{ij}) = 0.$$

Используя описанный выше алгоритм, исследуем устойчивость квадратной плиты, под действием боковых сжимающих усилий. Отличительной особенностью для упруго-вязкопластических сред является тот факт, что сложные процессы могут не

сопроводяться изломом траектории нагружения, а быть следствием скачкообразного изменения скорости. В качестве примера рассмотрим одноосное сжатие плиты с различными скоростями увеличения внешней нагрузки.

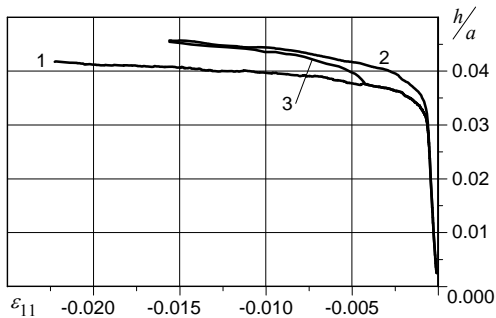


Рис. 1. Критическая толщина плиты при различных скоростях нагружения

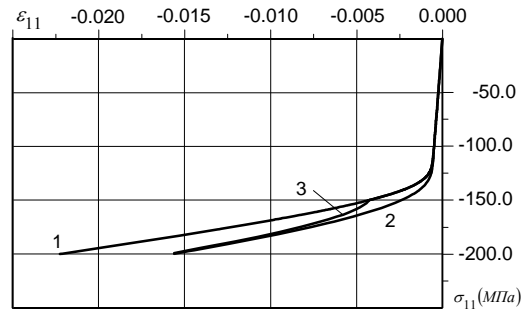


Рис. 2. Диаграммы деформирования упруго-вязкопластического материала при различных скоростях нагружения.

Результаты расчетов приведены на рис. 1. Кривая 1 на нем соответствует нагружению с постоянной скоростью $v_1 = 0.1 \frac{МПа}{час}$, кривая 2 – $v_2 = 1.0 \frac{МПа}{час}$, а кривая 3 соответствует скачкообразному изменению скорости при $\sigma_1 = -150 МПа$ от значения v_1 до значения v_2 . Соответствующие диаграммы деформирования материалов приведены на рис. 2.

Библиографические ссылки

1. **Гузь А.Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь. – К. 1986, 511с.
2. **Кадашевич Ю.И.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 2, №1. – С. 78-89.
3. **Черняков Ю.А.** Описание сложного циклического нагружения в теории пластичности, учитывающей микродеформации / Ю.А. Черняков, В.П. Шнейдер // Доповіди АН України. – 2006. – №6. – С.56–59.
4. **Kadashevich Yu.I.** Theory of plasticity, taking into account micro stresses / Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // Advances in Mechanics. – 1992. – 15(№3-4). – P. 3-39.
5. **Shneider V.P.** The development of micro deformations theory: the account of polycrystalline material grain sizes / V.P. Shneider, Yu.A. Chernyakov // Proceedings of third international conference «Multiscale Material Modeling». – Freiburg (Germany), 2006. – P. 530–533.
6. **Bodner S.R.** Deformation and buckling of axisymmetric viscoplastic shells under thermomechanical loading / S.R. Bodner, M. Naveh, M. Merzer // Int. J. Solids Structures. 1991. 27. P. 1915–1924.
7. **Гончаренко А.В.** Бифуркационный критерий в теории устойчивости упруго-вязкопластических тел / А.В. Гончаренко, Ю.А. Черняков // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С.12.

Надійшла до редакції 02.02.10.