УДК 517.2

В.А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПОЛЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ВОЗМУЩАЕМОМ ИНЕРЦИЕЙ ГРУЗА

Рассматривается задача об отыскании поля перемещений в стержне переменной длины, возбуждаемом инерцией груза с подвижного нижнего конца. Разработан метод решения такой задачи и получено ее точное решение. Этот метод является обобщением метода отражений, применяемого для сред с неподвижной границей. Рассматриваются варианты движения подвижного конца с дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а также произвольной скоростью.

Ключевые слова: поле перемещений, стержень переменной длины.

Розглядається задача про пошук поля зміщень у стрижні змінної довжини, який збуджується інерцією кінцевого вантажу. Розроблено метод розв'язування такої задачі і отримано точний її розв'язок. Він є узагальненням методу відбиття для середовищ з нерухомою границею. Розглянуто варіанти руху рухомого кінця з дозвуковою, звуковою, надзвуковою та будь якою швидкістю.

Ключові слова: поле зміщень, стержень змінної довжини.

The problem about search of a displacement field in the rod of variable length excited by inertia of a cargo from the mobile bottom end is considered. The method of the solution of such problem is developed and its exact solution is obtained. This method is generalization of a method of the reflections used for environments with motionless border. Variants of movement of the mobile end with subsonic, sound, supersonic, and also with arbitrary speed are considered.

Keywords: displacement field, rod of variable length.

Введение. В инженерной практике нередко возникают краевые задачи, связанные с динамическим нагружением стержней переменной длины. В частности, при определении напряженно-деформированного состояния в канатах шахтных и лифтовых подъемников приходится иметь дело с такого рода задачами. Даже в предположении, что сила трения между намоточным барабаном и наматываемым на него канатом настолько велика, что проскальзывание каната по барабану исключается, краевые условия задачи продолжают оставаться сложными. Существенная особенность краевых задач для стержней переменной длины состоит в том, что различные типы краевых условий требуют разных подходов к решению таких задач. Поэтому в этих задачах используется принцип суперпозиции, позволяющий разделять основную краевую задачу на несколько вспомогательных. Такой подход существенно упрощает решение основной задачи в целом. В то же время, в каждой из вспомогательных задач удается проследить за характером распространения упругих волн вдоль стержня, что способствует построению методов решения вспомогательных задач и получению собственно решений.

В [1] рассмотрена редукция основной краевой задачи об упругих перемещениях в канате при навивке его на барабан. Показано, что движение каната с грузом удобно представить в виде суммы переносного и относительного движений. Здесь будет рассмотрен такой вариант этой задачи, в котором до начала вращения барабана груз висит на канате и приходит в движение из состояния равновесия и покоя. В переносном движении канат движется как абсолютно твердое тело со скоростью $\nu'(t)$ его намотки на барабан. Здесь функция $\nu(t)$ – траектория движения точек каната как абсолютно твердого тела. Принято, что $\nu(0) = 0$. При этом учитываются статические напряжения в канате, возникающие вследствие действия веса каната и груза. Суммарные перемещения, возникающие в переносном движении с учетом действия статических напряжений, оказываются равными [1]

$$w_1(\xi,t)=\frac{G\xi}{ES}+\frac{gl\xi}{a^2}-\frac{g\xi^2}{2a^2}+\nu(t), \tag{1}$$

где ξ – абсолютная координата, направленная вдоль каната от точки его контакта с барабаном, G – вес груза, E – модуль упругости каната, S – площадь поперечного сечения каната, g – ускорение силы тяжести, a – скорость звука в канате, то есть $a^2=\frac{E}{\rho}$, ρ – объемная плотность каната, l – длина каната до начала движения.

Относительное движение рассматривается как движение точки контакта каната с барабаном вдоль каната со скоростью $-\nu'(t)$ вдоль подвижной оси x. Начало оси x при t = 0 также расположено в точке контакта каната с барабаном. Поэтому в относительном движении для упругих перемещений в канате возникает следующая краевая задача: в области $\nu(t) < x < l$, $t > 0$ найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0\ , \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$w(x,0) = \varphi(x)\ ; \quad w_t(x,0,) = \psi(x)\ , \quad 0 < x < l\ ; \tag{3}$$

$$w(\nu(t),t) = -\,w_1(\nu(t))\ ; \quad w_x(l,t) = \gamma\,[w_{tt}(l,t) - R\,\beta(t)\,H(t)]\ ,\ t > 0, \tag{4}$$

где $m=\frac{G}{g}$, $\gamma = \frac{m}{ES}$, R – радиус барабана, $\beta(t)$ – угловое ускорение барабана, H – функция Хевисайда. Здесь функция Хевисайда учитывает, что ускорение $R\beta(t)$ на нижнем конце каната возникает, только начиная от момента пуска намоточного барабана. Значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ конкретизируются ниже.

С точки зрения построения метода решения данной задачи удобно, используя принцип суперпозиции, представлять ее решение в виде суммы трех функций [1]:

$$w(x,t)=w_2(x,t)+w_3(x,t)+u(x,t)\ . \tag{5}$$

Все три функции в правой части равенства (5) должны в области $\nu(t) < x < l$, $t > 0$ удовлетворять волновому уравнению (2). Функция $w_2(x,t)$, кроме того, должна удовлетворять начальным условиям:

$$w_2(x,0) = -\,w_1(x,0)\ ; \quad w_{2,t}(x,0,) = 0\ ,\ \ 0 < x < l\ ; \tag{6}$$

и однородным краевым условиям:

$$w_2(\nu(t),t) = 0\ ; \quad w_{2,x}(l,t) = 0\ , \quad t > 0\ , \tag{7}$$

Функция $w_3(x,t)$ должна дополнительно удовлетворять однородным начальным условиям:

$$w_3(x,0) = 0\ ; \quad w_{3,t}(x,0,) = 0\ ,\ \ 0 < x < l\ , \tag{8}$$

и краевым условиям:

$$w_3(\nu(t),t) = -\,w_1(\nu(t),t)\ ; \quad w_{3,x}(l,t) = 0\ , \quad t > 0\ . \tag{9}$$

Функция $u(x,t)$ должна удовлетворять также начальным условиям типа (8) и краевым условиям:

$$u(\nu(t),t)=0\ ; \quad u_x(l,t)=\gamma[u_{tt}(l,t)+h(at)]H(at), \quad t>0\ , \tag{10}$$

где обозначено

$$h(at)=-R\beta(t)+\frac{\partial^2 w_2(l,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w_3(l,t)}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Так как решения краевых задач для функций $w_2(x,t)$ и $w_3(x,t)$ получены и опубликованы ранее [2–6], функцию $h(at)$ можно считать известной.

Целью настоящей статьи является получение решения краевой задачи для функции $u(x,t)$.

Постановка задачи. В связи с изложенным выше, краевая задача для функции u(x,t) поставлена следующим образом: в области $\nu(t) < x < l$, $t > 0$ найти решение волнового уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0)=0\,;\quad u_t(x,0)=0\,,\quad 0<x<l, \tag{12}$$

и краевым условиям (10). Относительно функции $\nu(t)$, описывающей перемещение верхнего конца стержня, предполагается, что $\nu(0) = 0$ и из условия сохранения области интегрирования краевой задачи следует, что $\nu(t) < l$ при $t > 0$. Особенность второго краевого условия (10) состоит в том, что при $t < 0$ правая его часть становится равной нулю, так как до начального момента времени стержень и груз неподвижны.

Учитывая то обстоятельство, что единственным источником возмущения в рассматриваемой краевой задаче является нижний конец груза, решение задачи на начальном интервале времени естественно искать в виде

$$u(x,t) = \chi(x + at - l)\,. \tag{13}$$

Подстановка формы решения (13) во втрое краевое условие (10) приводит к равенству

$$\chi'(at) = \gamma[a^2\chi''(at) + h(at)H(at)]\,,$$

откуда после введения преобразования $z = at$ получается дифференциальное уравнение

$$\chi''(z)-\frac{1}{\gamma a^2}\chi'(z)=-\frac{1}{a^2}h(z)H(z)\,. \tag{14}$$

Общим решением дифференциального уравнения (14) является функция

$$\begin{gathered}\chi(z)=\gamma a^2\chi'(0)[exp(\frac{z}{\gamma a^2})-1]+\chi(0)-\\ -\int_0^z exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s \frac{1}{a^2}\,h(\zeta)\,exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})H(\zeta)d\zeta ds\,.\end{gathered} \tag{15}$$

Из (15) следует, что единственным решением уравнения (14), обращающимся тождественно в нуль при отрицательных z будет функция

$$\chi(z)=-\int_0^z exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s \frac{1}{a^2}\,h(\zeta)\,exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})H(\zeta)d\zeta ds\,. \tag{16}$$

Из равенства (13) теперь следует, что на начальном интервале времени решением краевой задачи будет функция

$$u(x,t)=-\int_0^{x+at-l} exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s \frac{1}{a^2}\,h(\zeta)\,exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})H(\zeta)d\zeta ds\,. \tag{17}$$

Действительно, процесс построения функции (17) свидетельствует, что эта функция при всех t будет удовлетворять второму краевому условию (10). Будучи функцией распространяющихся волн, функция (17) будет удовлетворять уравнению (2). В силу значений функции Хевисайда, при $0 < x < l$ и $t = 0$ эта функция тождественно равна нулю вместе со своей производной по t, то есть удовлетворяет начальным условиям (12). При $t < \dfrac{l-\nu(t)}{a}$ функция $u(\nu(t),t) = 0$, то есть первое краевое условие (10) также будет удовлетворено. При $t > \dfrac{l-\nu(t)}{a}$ первое краевое условие (10) функцией (17) не будет удовлетворяться, поэтому возникает необходимость построения волны, отраженной от подвижного верхнего конца стержня.

Для этого используется метод, разработанный в [7–9]. Этот метод заключается в следующем. Пусть τ_1 – наименьший положительный корень уравнения

$$\nu(t) + at = l\,, \tag{18}$$

то есть момент вступления переднего фронта волны (17) в контакт с подвижным концом. Поставим следующую вспомогательную краевую задачу: в области $\nu(t) < x < l$, $t > \tau_1$ найти решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$u_в(x,\tau_1) = 0\,; \quad u_{в,t}(x,\tau_1) = 0\,, \quad \nu(\tau_1) < x < l\,, \tag{19}$$

$$u_в(\nu(t),t) = f(t)\,; \quad u_{в,t}(l,t) = 0\,, \quad t > \tau_1\,, \tag{20}$$

где, в данном случае

$$f(t) = -u(\nu(t),t)\,, \tag{21}$$

причем $u(\nu(t),t)$ – это значение функции (17) при $x = \nu(t)$.

Решение задачи. Вопрос о разрешимости уравнения (18) относительно t и построения решения вспомогательной задачи существенно зависит от поведения функции $\nu(t)$. С этой точки зрения появляется необходимость рассмотрения вариантов поведения функции $\nu(t)$.

І-й вариант. Перемещение верхнего конца стержня в любой момент времени $t > 0$ осуществляется с дозвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\nu'(t)| < a, \quad t > 0\,. \tag{22}$$

В этом случае уравнение (18) имеет решение, так как при $t = 0$ правая часть этого уравнения больше левой, в то же время при $t > 0$ левая часть непрерывно возрастает. Решение вспомогательной задачи будем искать в виде

$$u_в(x,t) = \chi_1(x - at)\,. \tag{23}$$

Заметим, что в этом варианте функция $f(t)$ определена при всех t, причем, так как функция $\nu(t) + at$ возрастает, то $\nu(t) + at < l$ при $t < \tau_1$, поэтому $f(t) = 0$ при $t < \tau_1$. Подставив форму решения (23) в первое краевое условие (20), получим

$$\chi_1(\nu(t) - at) = f(t) \text{ при } t > \tau 1. \tag{24}$$

Введем в последнем равенстве преобразование

$$z = \nu(t) - at\,. \tag{25}$$

Из (25) следует, что $z'(t) < 0$ при $t > 0$. А так как при $t = 0$ $\nu(0) = 0$ и $z(0) = 0$, то $z(t) < 0$ при $t > 0$. Таким образом, в данном варианте функция $z(t)$ строго монотонно убывает и поэтому существует обратная к ней функция $t_0(z)$, также строго монотонно убывающая и непрерывно дифференцируемая. Из $z'(t) < 0$ и $z(0) = 0$ следует, что $t_0(0) = 0$ и $t_0(z) > 0$ при $z < 0$.

Обобщенный метод отражений, применяемый для решения рассматриваемой задачи [7–9], требует доопределения функции $t_0(z)$ при $z > 0$, что, в свою очередь, требует доопределения функции $z(t)$ (25), а потому и функции $\nu(t)$ при $t < 0$. Оказывается, что продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t можно выполнить достаточно произвольно, потребовав лишь существования производной этого продолжения на всей оси t и выполнения на всей оси t условия (22). Обозначим это продолжение функции $\nu(t)$ через $\nu_1(t)$, причем мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\nu_1'(t)\right| < a, \;\; t < 0 . \tag{26}$$

Тогда на всей оси t будет определена функция

$$\mathrm{N}(t) = \begin{cases} \nu(t), \; t > 0; \\ \nu 1(t), \; t < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Продолженную на всю ось t функцию $z(t)$ обозначим $Z(t)$ и определим выражением

$$Z(t) = \mathrm{N}(t) - at . \tag{28}$$

Из этого выражения ясно, что при $t > 0$ $Z(t) = z(t)$. Так как по условию функция $\mathrm{N}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\mathrm{N}'(t)\right| < a , \tag{29}$$

при всех t, функция $Z(t)$ будет строго монотонно убывающей, и так как $z(0) = 0$, при $t < 0$ будет справедливо $Z(t) > 0$.

В силу того, что функция $Z(t)$ является строго монотонной при всех t, для нее существует обратная функция $T_0(Z)$, причем при $Z \le 0$ $T_0(Z) = t_0(z)$ и $T_0(Z)$ будет строго монотонно убывающей функцией. Таким образом, функция $T_0(Z)$ удовлетворяет условию

$$T_0(Z) = \begin{cases} t_0(z), \; Z < 0; \\ 0, \qquad Z = 0; \\ < 0, \qquad Z > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Отметим, что при $z < 0$ и $t > 0$ справедливы следующие тождества:

$$z \equiv \nu(t_0(z)) - at_0(z) \; ; \quad t \equiv t_0(\nu(t) - at) \; . \tag{31}$$

Заметим также, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\nu(t) < x < l$, очевидно, справедливо также неравенство $\nu(t) - at < x - at$, из которого в силу строго монотонного убывания функции $T_0(z)$ и тождеств (31) следует, что при $t > 0$

$$t = t_0(\nu(t) - at) > T_0(x - at) . \tag{32}$$

Выполнив теперь в равенстве (24) преобразование (28), получим

$$\chi_1(z) = f\left(T_0(z)\right). \tag{33}$$

Отсюда, из равенства(23) и определения (21) функции $f(t)$, а также представления функции $u(x,t)$ в виде (13), где функция $\chi(z)$ определяется равенством (16), следует, что решением вспомогательной задачи будет функция

$$u_в(x,t) = -\chi(\nu(T_0(x-at) + aT_0(x-at) - l) \; . \tag{34}$$

Действительно, будучи функцией распространяющейся волны, функция (34) удовлетворяет уравнению (2). Так как в силу условия (22) $\nu(t) - at < 0$, то $T_0(\nu(t) - at) = t$, и поэтому функция (34) удовлетворяет первому краевому условию (20). Функция (34) удовлетворяет также второму краевому условию (20) при $at < 2(l - \nu(\tau_1))$. Действительно, в этом случае справедлива цепочка неравенств

$$l - at > l - 2(l - \nu(\tau_1)) = \nu(\tau_1) - a\tau_1,$$

поэтому $T_0(l - at) < T_0(\nu(\tau_1) - a\tau_1)$ и так как функция $\nu(t) + at$ возрастает, то

$$\nu(T_0(l-at)) + aT_0(l-at) < \nu(\tau_1) + a\tau_1 = l.$$

Поэтому при таких t и $x = l$ аргументы функций Хевисайда будут отрицательны и функция (34) будет равна нулю. При $t = \tau_1$ и $\nu(t) < x < l$ справедливо $x - at > \nu(\tau_1) - a\tau_1$, поэтому $T_0(x-at) < T_0(\nu(\tau_1) - a\tau_1) = \tau_1$, следовательно, $\nu(T_0(x - t)) + aT_0(x - at) < l$. Значит, при $t = \tau_1$ функция (34) тождественно равна нулю вместе со своей производной по t, то есть начальные условия (19) функцией (34) удовлетворяются.
Поэтому при $at < 2(l - \nu(\tau_1))$ решением основной краевой задачи будет функция

$$u(x,t) = \chi(x + at - l) - \chi(\nu(T_0(x - at) + aT_0(x - at) - l), \qquad (35)$$

где функция χ имеет вид (16).

При $at > 2(l - \nu(\tau_1))$ функция (35) не будет удовлетворять второму краевому условию (10), так как при $t = \dfrac{2(l-\nu(\tau_1))}{a}$ передний фронт волны, отраженной от подвижного конца стержня, дойдет до его нижнего конца и возникнет необходимость построения волны, отраженной от нижнего конца. Учитывая тот факт, что первое слагаемое в формуле (35) удовлетворяет второму краевому условию (10) при всех t, необходимо строить отраженную от нижнего конца волну только для второго слагаемого в формуле (35), то есть для функции

$$\chi_1(x - at) = -\chi(\nu(T_0(x - at) + aT_0(x - at) - l) \ . \qquad (36)$$

Таким образом, если отраженную волну строить в виде $\chi_2(x + at)$, то необходимо, чтобы функция

$$v(x,t) = \chi_1(x - at) + \chi_2(x + at) \qquad (37)$$

удовлетворяла краевому условию

$$v_x(l,t) = \gamma v_{tt}(l,t) \ . \qquad (38)$$

Подставляя в (38) форму решения (37), получим

$$\chi_1'(x - at) + \chi_2'(x + at) = \gamma a^2(\chi_1''(x - at) + \chi_2''(x + at)),$$

откуда после введения преобразования $z = l + at$ с учетом того, что $l - at = 2l - (l + at)$, следует дифференциальное уравнение

$$\chi_2''(z) - \frac{1}{\gamma a^2}\chi_2'(z) = -\chi_1''(2l - z) + \frac{1}{\gamma a^2}\chi_1'(2l - z) \ . \qquad (39)$$

Общим решением дифференциального уравнения (39) есть функция

$$\begin{aligned} \chi_2(z) = {} & C_1\gamma a^2(exp(\frac{z}{\gamma a^2}) - 1) - \\ & -\int_0^z exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})[\chi_1''(2l - \zeta) - \\ & -\frac{1}{\gamma a^2}\chi_1'(2l - \zeta)]d\zeta ds + \chi_2(0) \ . \end{aligned} \qquad (40)$$

Следует обратить внимание на важную особенность функции $\chi_2(z)$. В выражении (37) аргумент z этой функции принимает значение $x + at$, поэтому наибольшим значением аргумента производных функции χ_1 под знаками интегралов в формуле (40) будет величина $2l - (x + at)$, которая в силу условия $x< l$ будет больше, чем $l - at$. Поэтому при $at < 2(l - \nu(\tau_1)) = l - \nu(\tau_1)+a\tau_1$ справедливо соотношение

$$2l-(x+at)>l-at>l-(l-\nu(\tau_1)+a\tau_1)=\nu(\tau_1)-a\tau_1.$$

А так как функция χ_1 аргумента $2l-(x+at)$ с помощью формулы (38) выражается через функцию χ, в которой на такого рода аргумент действует обратная функция T_0, то с учетом убывания функции T_0 и тождества (31) получаем что $T_0(2\,l-(x+at))<T_0(\nu(\tau_1)-a\tau_1)=\tau_1$. А поскольку при $t<\tau_1$ $\nu(t)-at-l<0$, функция χ_1 под знаками интегралов при $at<2(l-\nu(\tau_1))$ будет тождественно равна нулю вместе со всеми своими производными, ибо функция χ содержит в качестве множителя функцию Хевисайда. Это очень важно, так как отраженная от нижнего конца волна должна начинать принимать ненулевые значения, начиная от $t=\dfrac{2(l-\nu(\tau_1)}{a}$. Внеинтегральные слагаемые в формуле (47) этим свойством не обладают, то есть не удовлетворяют условию построения отраженной волны. Поэтому в этой формуле необходимо принять $C_1=0$, $\chi_2(0)=0$. Таким образом, отраженная от нижнего конца волна будет иметь вид

$$\chi_2(x+at)=-\int_0^{x+at}exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})[\chi_1''(2l-\zeta)- \\ -\frac{1}{\gamma a^2}\chi_1'(2l-\zeta)]d\zeta ds\,, \tag{41}$$

а решение основной краевой задачи на этом интервале времени будет представляться формулой

$$u(x,t)=\chi(x+at-l)-\chi(\nu(T_0(x-at)+ \\ +aT_0(x-at)-l)+\chi_2(x+at)\,, \tag{42}$$

в которой функция χ определяется формулой (17), а функция χ_2 – формулой (41).

Функция (42) будет решением основной краевой задачи при $at<2t-2\nu(\tau_1)-\nu(t)$, то есть до тех пор, пока передний фронт волны, излученной нижним концом, не отразится по одному разу от верхнего и нижнего концов и вновь не подойдет к верхнему концу. Это событие произойдет в момент времени $t=\tau_2$, где τ_2 – наименьший положительный корень уравнения

$$at=3l-2\nu(\tau_1)-\nu(t)\,, \tag{43}$$

не превосходящий τ_1.

Так как первые два слагаемых в формуле (42) удовлетворяют первому краевому условию (10) при любых t, отраженную от верхнего конца волну достаточно построить лишь для последнего слагаемого в формуле (42). Для построения отраженной волны аналогично тому, как это сделано на интервале $\tau_1<t<\tau_2$, необходимо вновь рассмотреть вспомогательную краевую задачу (2), (19), (20), заменив в ее постановке лишь τ_1 на τ_2 и приняв функцию $f(t)$ в виде

$$f(t)=-\chi_2(\nu(t)+at)\,. \tag{44}$$

Тогда, по-прежнему разыскивая решение этой вспомогательной задачи в виде

$$u(x,t)=\chi_3(x-at)\,, \tag{45}$$

получим, что функция χ_3 будет иметь вид, подобный (33), то есть

$$\chi_3(z)=f(T_0(z))\,. \tag{46}$$

Поэтому решение вспомогательной задачи в данном случае будет иметь вид

$$u(x,t)=-\chi_2(\nu(T_0(x-at))+aT_0(x-at))\,, \tag{47}$$

где функция χ_2 определяется равенством (41). Решением же основной задачи на этом интервале времени будет функция

$$u(x,t)=\chi(x+at-l)-\chi(\nu(T_0(x-at)+aT_0(x-at)-l)+ \\ +\chi_2(x+at)-\chi_2(\nu(T_0(x-at))+aT_0(x-at)), \tag{48}$$

в которой функция χ определяется формулой (16), а функция χ_2 – формулой (41).

Функция (48) будет решением основной краевой задачи при $t<\dfrac{4l-2\nu(\tau_1)-2\nu(\tau_2)}{a}$, то есть до такого момента времени, в который передний фронт волны, генерируемой нижним концом стержня, дважды отразившись от верхнего конца и один раз – от нижнего, вновь не подойдет к нижнему концу. При больших t снова возникает необходимость построения волны, отраженной от нижнего конца. Учитывая, что первые три слагаемых в формуле (48) удовлетворяют второму краевому условию (10), для построения отраженной волны в виде $\chi_4(x+at)$, то необходимо добиться, чтобы функция

$$v(x,t)=\chi_3(x-at)+\chi_4(x+at) \tag{49}$$

удовлетворяла краевому условию

$$v_x(l,t)=\gamma v_{tt}(l,t)\ . \tag{50}$$

Подставляя в (50) форму решения (49), получим

$$\chi_3'(l-at)+\chi_4'(l+at)=\gamma a^2[\chi_3''(l-at)+\chi_4''(l+at)\ ,$$

откуда после введения преобразования $z = l + at$ с учетом того, что $l - at = 2l - (l + at)$ следует дифференциальное уравнение

$$\chi_4''(z)-\frac{1}{\gamma a^2}\chi_4'(z)=-\chi_3''(2l-z)+\frac{1}{\gamma a^2}\chi_3'(2l-z)\ . \tag{51}$$

По соображениям, аналогичным рассуждениям при построении функции χ_2, то есть, исходя из условия того, чтобы функция χ_4 принимала ненулевые значения только при $t>\dfrac{4l-2\nu(\tau_1)-2\nu(\tau_2)}{a}$, необходимо ограничиться частным решением уравнения (51), приняв функцию χ_4 в виде

$$\chi_4(x+at)=-\int_0^{x+at} exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})[\chi_3''(2l-\zeta)- \\ -\frac{1}{\gamma a^2}\chi_3'(2l-\zeta)]d\zeta ds\ , \tag{52}$$

где, как показано ранее, функция χ_3 имеет вид

$$\chi_3(z)=-\chi_2(\nu(T_0(z))+aT_0(z))\ . \tag{53}$$

Тогда на рассматриваемом интервале времени решением краевой задачи будет функция

$$u(x,t)=\chi(x+at-l)-\chi(\nu(T_0(x-at)+aT_0(x-at)-l)+ \\ +\chi_2(x+at)-\chi_2(\nu(T_0(x-at))+aT_0(x-at))+\chi_4(x+at), \tag{54}$$

в которой функция χ определяется формулой (16), функция χ_2 – формулой (41), а функция χ_4 – формулой (52).

При $t > \tau_3$, где τ_3 – наибольший положительный корень уравнения

$$at = 5l - 2\nu(\tau_1) - 2\nu(\tau_2) - \nu(t) \ , \tag{55}$$

не превосходящий τ_2, функция (54) не будет удовлетворять первому краевому условию (10). Поэтому для последнего слагаемого в формуле (54) необходимо строить отраженную от подвижного конца волну. Построение этой отраженной волны, как и прежде, осуществляется путем решения вспомогательной задачи (2), (19), (20) с заменой в ней τ_1 на τ_3 и с функцией f(t), равной

$$f(t) = -\chi_4(\nu(t) + at) \ . \tag{56}$$

Как показано ранее, решением этой задачи будет функция

$$u(x,t) = -\chi_4(\nu(T_0(x-at)) + aT_0(x-at)) \ , \tag{57}$$

где функция χ_4 определяется равенством (52). Решением же основной задачи на этом интервале времени будет функция

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \chi(x+at-l) - \chi(\nu(T_0(x-at) + aT_0(x-at) - l) + \\ &+ \chi_2(x+at) - \chi_2(\nu(T0(x-at)) + aT_0(x-at)) + \chi_4(x+at) - \\ &- \chi_4(\nu(T_0(x-at)) + aT_0(x-at)) \ , \end{aligned} \tag{58}$$

в которой функция χ определяется формулой (16), функция χ_2 – формулой (41), а функция χ_4 – формулой (52).

Продолжая этот процесс построения решения краевой задачи, получим, что для произвольного t ее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \chi(x+at-l) - \chi(\nu(T_0(x-at) + aT_0(x-at) - l) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [\, \chi_{2k}(x+at) - \chi_{2k}(\nu(T_0(x-at)) + aT_0(x-at))] \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Каждая из функций χ_{2k} в формуле (59) строится следующим образом. На предыдущем этапе построена функция $\chi_{2(k-1)}$. По этой функции, как результат отражения от подвижного верхнего конца, строится функция χ_{2k-1} по формуле, подобной (53)

$$\chi_{2k-1}(z) = -\chi_{2(k-1)}(\nu(T_0(z)) + aT_0(z)) \ . \tag{60}$$

Затем рассматривается дифференциальное уравнение, подобное (51)

$$\chi''_{2k}(z) - \frac{1}{\gamma a^2}\chi'_{2k}(z) = -\chi''_{2k-1}(2l-z) + \frac{1}{\gamma a^2}\chi'_{2k-1}(2l-z) \ , \tag{61}$$

и в качестве функции χ_{2k} берется его частное решение, то есть

$$\begin{aligned} \chi_{2k}(x+at) = -\int_0^{x+at} exp(\frac{s}{\gamma a^2}) \int_0^{s} exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}) [\, \chi''_{2k-1}(2l-\zeta) - \\ - \frac{1}{\gamma a^2}\chi'_{2k-1}(2l-\zeta)] \, d\zeta \, ds. \end{aligned} \tag{62}$$

Следует также заметить, что для каждого конечного t функция (59) будет содержать только конечное число слагаемых. В самом деле, пусть τ_n, n=1,2,…, есть наименьший положительный корень уравнения

$$at = 2(n-1)l - 2\sum_{k=0}^{n-1} \nu(\tau_k) + l - \nu(t), \tag{63}$$

где $\tau_0 = 0$, или, что то же самое, уравнения

$$at = 3l + a\tau_{n-1} - \nu(\tau_{n-1}) - \nu(t)\ . \tag{64}$$

Тогда, если t удовлетворяет неравенству

$$\tau_{n-1} < t < \tau n - \frac{l - \nu(\tau_n)}{a}, \quad \text{n} = 1,2,\ldots,$$

то на основании алгоритма построения волн, отраженных от нижнего конца, суммирование в формуле (59) достаточно осуществлять до $k = n - 1$, так как члены ряда с большими значениями k будут равны нулю. По этой же причине, если t удовлетворяет неравенству $\tau_{n-1} < t < \tau_n$, где n = 1,2,…, то, кроме того, функция $\chi_{2(n-1)}(\nu(T_0(x - at)) + a\ T_0(x - at))$ будет равна нулю.

II-й вариант. Перемещение верхнего конца стержня в любой момент времени $t > 0$ осуществляется со скоростью звука или сверхзвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\upsilon'(t)| \geq a, \qquad t > 0\ . \tag{65}$$

Здесь по-прежнему предполагается непрерывность функции $\upsilon(t)$ при всех $t > 0$. Однако из условия (65) следует, что в общем случае $\upsilon'(t)$ не может быть непрерывной. Поэтому здесь предполагается только, что $\upsilon'(t)$ определена почти всюду на положительной полуоси t. Предполагается также, что положительная полуось t может быть покрыта не более чем счетным множеством чередующихся подинтервалов, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$\nu'(t) \geq a\,, \tag{66}$$

или

$$\nu'(t) \leq -a\,. \tag{67}$$

В данной задаче единственным источником возмущения является нижний конец стержня, который генерирует волну (17). Эта волна в рассматриваемом варианте не может отражаться от подвижного верхнего конца, так как, если выполнено условие (67), то волна, двигаясь со звуковой скоростью, не может догнать этот конец, а, если выполнено условие (66), то верхний конец не может излучать волны. Поэтому в данном варианте может только происходить поглощение волны (17) подвижным верхним концом. Для того чтобы такое поглощение произошло, необходимо, чтобы верхний конец вступил в контакт с передним фронтом волны (17). Такое событие может произойти только при условии, что выполнено условие (66), то есть верхний конец движется навстречу волне. До возникновения контакта переднего фронта волны (17) с верхним концом может существовать несколько под-интервалов, на которых поочередно выполняется одно из неравенств (66) или (67). Однако, если данный контакт не возник ни на одном из этих интервалов, то движение верхнего конца будет приводить лишь к изменению области, в которой отыскивается решение задачи, но само решение будет по прежнему иметь вид (17). С этой точки зрения достаточно начать рассмотрение задачи с такого подинтервала времени, на котором, с одной стороны, выполнено неравенство (66), а, с другой стороны, произошло поглощение волны (17) верхним концом. Поэтому разбиение полуоси t на подинтервалы осуществляется следующим образом: для интервала $0 < t < T_1$ выполнено неравенство (66), для $T_1 < t < T_2$ – неравенство (67), для $T_2 < t < T_3$ – неравенство (66) и так далее.

Условие вступления в контакт верхнего конца с передним фронтом волны (17) имеет вид

$$l - \nu(t) = at\ . \tag{68}$$

Пусть τ_1 – наименьший положительный корень уравнения (68). Для того чтобы поглощение волны (17) верхним концом действительно произошло, необходимо, чтобы на интервале времени $\tau_1 < t < T_1$ было выполнено неравенство

$$l-\nu(t)<at \ . \tag{69}$$

В этом случае волна (17) будет срезана на длине $aT_1+\nu(T_1)-l$, и при $t = T_1$ отличные от нуля волны сохранятся лишь на интервале $\nu(T_1) < x < l$. Учесть такого рода срезку можно, сдвинув в формуле (17) функции Хевисайда на величину, равную длине этой срезки. Таким образом, после срезки функция (17) приобретет вид

$$\begin{gathered}u(x,t)=-\int\limits_0^{x+at-l} exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int\limits_0^s \frac{1}{a^2}\, h(\zeta)\, exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})\times \\ \times H(\zeta-(aT_1+\nu(T1)-l))d\zeta ds \ .\end{gathered} \tag{70}$$

Функция (70) учитывает описанную срезку, то есть будет решением задачи при $t>T_1$.

При $t > T_1$ может существовать несколько подинтервалов $[T_s, T_{s-1}]$, s = 1,2,…, на которых передний фронт волны (70) не вступит в контакт с подвижным верхним концом. На таких подинтервалах решением задачи будет оставаться функция (70), поэтому данные подинтервалы можно пропустить и полагать, что следующий контакт переднего фронта волны (70) с верхним концом происходит на подинтервале, который обозначим $[T_2, T_3]$. Новое условие вступления в контакт верхнего конца с передним фронтом волны (70) имеет вид

$$l-\nu(t)=at-(aT_1+\nu(T_1)-l) \ . \tag{71}$$

Пусть τ_2 – наименьший положительный корень уравнения (68), не превосходящий τ_1. Для того чтобы поглощение волны (70) верхним концом действительно произошло, необходимо, чтобы на интервале времени $\tau_2 < t < T_3$ было выполнено неравенство

$$l-\nu(t)<at-(aT_1+\nu(T_1)-l) \ . \tag{72}$$

В этом случае волна (70) будет срезана на длине $aT_3+\nu(T_3)-l-(aT_1+\nu(T_1)-l)$, и при $t = T_1$ отличные от нуля волны сохранятся лишь на интервале $\nu(T_3) < x < l$. Учесть такого рода срезку можно так же, как это сделано на интервале $[0, T_1]$, то есть сдвинув в (70) функции Хевисайда на величину $aT_3+\nu(T_3)-(aT_1+\nu(T_1)$. Таким образом, на интервале $[T_3, T_4]$ и, возможно, некоторых последующих подинтервалах, решением задачи будет функция

$$\begin{gathered}u(x,t)=-\int\limits_0^{x+at-l} exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int\limits_0^s \frac{1}{a^2}\, h(\zeta)\, exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})\times \\ \times H(\zeta-(aT_3+\nu(T_3)-(aT_1+\nu(T_1)))d\zeta ds \ .\end{gathered} \tag{73}$$

Аналогичным образом процесс построения поглощения волн верхним концом может быть распространен на следующие подинтервалы времени, на которых такое поглощение действительно происходит. Если предположить, что срезка волны, излученной нижним концом происходит на каждом подинтервале $[T_{2k},T_{2k+1}]$, k = 0,1,2,…,n, то на интервалах $[T_{2k+1},T_{2(k+1)}]$ решением задачи будет функция

$$\begin{gathered}u(x,t)=-\int\limits_0^{x+at-l} exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int\limits_0^s \frac{1}{a^2}\, h(\zeta)\, exp(-\frac{\zeta}{\gamma a^2})H(\zeta- \\ -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}[aT_{2k+1}+\nu(T_{2k+1})-l])d\zeta ds \ .\end{gathered} \tag{74}$$

III-й вариант. Функция $\nu(t)$ изменяется произвольно, являясь непрерывно дифференцируемой при всех $t > 0$. Для решения поставленной задачи положительную полуось t разобьем на подинтервалы, на каждом из которых выполняется одно из трех неравенств

$$\nu'(t) \le -a \ , \tag{75}$$

$$-a < \nu'(t) < a \ , \tag{76}$$

или

$$\nu'(t) \ge a \ . \tag{77}$$

Ясно, что границы каждого из таких подинтервалов будут определяться положительными корнями одного из следующих уравнений. Граница между подинтервалами, на одном из которых справедливо неравенство (75), а на другом – неравенство (76) – из уравнения

$$\nu'(t) + at = 0 \ , \tag{78}$$

а граница между подинтервалами, на одном из которых справедливо неравенство (76), а на другом – неравенство (77) – из уравнения

$$\nu'(t) - at = 0 \ , \tag{79}$$

причем интервалы, на которых будет выполняться неравенство (76) будут открытыми, а интервалы, на которых будет выполняться неравенство (75) или (77) – замкнутыми.

Как показал анализ первых двух вариантов, волна (17), излученная нижним концом стержня, может отражаться от верхнего конца только в случае выполнения на рассматриваемом подинтервале неравенства (76). Если на подинтервале выполняется неравенство (77), происходит только поглощение волны (17) подвижным верхним концом. Если же на подинтервале выполняется неравенство (75), то изменение решения, полученного на предыдущих подинтервалах, на этом подинтервале не происходит. Таким образом, в зависимости от порядка чередования подинтервалов процесс построения решения будет различным. Однако при произвольном чередовании подинтервалов для решения задачи на подинтервале, на котором выполнено неравенство (76) следует применять технику, изложенную в варианте I, а для решения задачи на подинтервале, на котором выполнено неравенство (77) – технику, изложенную в варианте II.

Продемонстрируем такого рода процесс решения задачи на следующем примере. Пусть на подинтервале $[0, T_1)$ выполнено неравенство (76), а на подинтервале $[T_1, T_2]$ – неравенство (77), причем на последнем подинтервале происходит поглощение волн верхним концом.

В этом случае функция $z = \upsilon(t) - at$,очевидно, уже не будет строго монотонной при любых t. Однако на интервале $[0,T_1)$, благодаря условию (76), эта функция будет строго монотонно убывающей. Поэтому на интервале (z_1,z_0), где $z_i = \upsilon(T_i) - aT_i$, $i = 0,1$, будет существовать обратная к функции $z(t)$ функция $\xi_1(z)$, непрерывно дифференцируемая и строго монотонно убывающая на этом интервале. Продолжим каждую из функций $\xi_1(z)$ на всю ось z как непрерывно дифференцируемую и строго монотонно убывающую. Обозначим такое продолжение через $\mathrm{E}_1(z)$. Ясно, что для функции $\mathrm{E}_1(z)$ на интервале (z_1,z_0), или, что то же самое, на интервале $0 < t < T_1$, будет справедливо тождество

$$\mathrm{E}_1(\nu(t) - at) \equiv t \ . \tag{80}$$

Вне интервала $[0,\mathrm{T}_1)$ тождество (80) в общем случае не будет справедливым.

Тогда на интервале $[0, T_1]$ в силу существования на этом интервале обратной к (31) функции решение будет иметь принципиально такой же вид, как и в варианте I, с заменой в нем функции T_0 на функцию E_1, то есть

$$u(x,t)=\chi(x+at-l)-\chi(\nu(\mathrm{E}_1(x-at)+a\mathrm{E}_1(x-at)-l)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[\chi_{2k}(x+at)-\chi_{2k}(\nu(\mathrm{E}_1(x-at))+a\mathrm{E}_1(x-at))]\ , \qquad (81)$$

где $\chi(z)$ имеет вид (16), N – натуральное число, для которого справедливо неравенство $\tau_{N-1} < T_1 \le \tau_N$, в котором τ_{N-1}, τ_N – наименьшие положительные корни уравнения (63) при $n = N - 1$ и $n = N$ соответственно. Заметим, что если бы на интервале $[T_1, T_2]$ выполнялось неравенство (75), то решение задачи на этом интервале по-прежнему было бы представлено формулой (81).

Далее на интервале $[T_1, T_2]$ произойдет поглощение части волн (81) подвижным верхним концом. Учтя это поглощение точно так же, как это сделано в варианте II, получим, что в начале интервала $[T_2,T_3]$ решением задачи также будет функция (81), однако в ней функцию $\chi(z)$ следует подставлять в виде

$$\chi(z)=-\int_0^z exp(\frac{s}{\gamma a^2})\int_0^s \frac{1}{a^2}\ h(\zeta)\ exp(-\ \frac{\zeta}{\gamma a^2})\times$$
$$\times H(\zeta-(\nu(T_2)+aT_2-l))d\zeta ds\ .$$

При ином чередовании подинтервалов решение задачи получается аналогично.

Выводы. Получено точное решение краевой задачи об упругих перемещениях в стержнях переменной длины при их нагружении инерцией груза. Построение решения основано на анализе распространения упругих волн и их отражения от границ области. Удалось построить метод анализа отражения волн от подвижной границы. Показано, что при набегании конца каната на область интегрирования, происходит срезка волн, существовавших в канате ранее. Вычислены значения такого рода срезок.

Полученное здесь решение краевой задачи позволяет решить общую задачу о динамических нагрузках, возникающих в подъемных канатах и, тем самым, произвести расчет канатов на прочность.

Библиографические ссылки

1. **Остапенко В.А.** Варианты постановки краевых задач о движении волн в канатах переменной длины /В.А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. Дн., 2006. – С. 23–30.
2. **Остапенко В.А.** Динамика волн в канатах переменной длины /В.А. Остапенко // Сборник научных работ Полтавского национального технического университета. – 2005. Вып. 16. – С. 216–220.
3. **Ostapenko V.A.** Dynamic field of displacements in rods of variable length /V.A. Ostapenko //Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005. – P. 316–323.
4. **Остапенко В.А.** Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2006. №2/1. – С. 182–198.
5. **Ostapenko V.A.** Dynamic displacement in ropes of variable length at perturbation of nonzero initial conditions /V.A. Ostapenko, N.V. Polyakov // Proceedings of 9th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2007. – P. 347–354.

6. **Ostapenko V.A.** Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length /V.A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics, Hamburg, Springer-Verlag, 77, 2007. – P. 313–324.
7. **Остапенко В.А.** Первая краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. – Дн., 1989. – С. 4–14.
8. **Остапенко В.А.** Вторая краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика, – 1997. Вип.1. – С. 3–21.
9. **Остапенко В.А.** Третья краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика, – 1996. Вип.2. – С. 4–23.

Надійшла до редколегії 29.01.10

УДК 621.744.35

С.Р. Рахманов

Национальная металлургическая академия Украины

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ОЧАГЕ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРОШИВКИ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ НА ПРОШИВНОМ ПРЕССЕ

Разработана динамическая модель очага деформации при процессе прошивки трубной заготовки, представляющая область возмущений в виде пластической и упругой взаимодействующих зон. Установлены параметры распространения фронта пластической волны при процессе прошивки заготовки в зависимости от расширения границы оправки в очаге деформации.

Ключевые слова: прошивка трубных заготовок, математическая модель прошивки, автомодельная задача.

Розроблено динамічну модель осередку деформації для процесу прошивки трубної заготовки, що являє область збуджень у вигляді пластичної та пружної зон, котрі між собою взаємодіють. Визначені параметри розповсюдження фронту пластичної хвилі у процесі прошивки заготовки в залежності від розширення границі оправки в осередку деформації.

Ключові слова: прошивка трубних заготовок, математична модель прошивки, автомодельна задача.

The mathematical model of the deformation region under piercing pipe shell process, which presents perturbed region in the shape of plastic and elastic zones of interaction was formulated. The parameters of the front edge of the distribution plastic wave under process of piercing shell that is depending on the range expansion arbor in deformation region were determined.

Keywords: piercing process of pipe shell, mathematical model of the piercing process, automodel problem.

Введение. Процессы горячего прессования при производстве бесшовных труб из малопластичных и труднодеформируемых материалов находят широкое применение в мировой практике. При этом повышение эффективности процесса прошивки (экспандирования) на прошивном прессе выдвигает ряд актуальных задач по совершенствованию технологии производства и модернизации оборудования [1; 2].

Совершенствование существующих и разработка новых технологий требует кардинально нового подхода к задаче оптимизации качества бесшовных труб, что, непосредственно, связано с отработкой режимов деформации, прогнозированием показателей стойкости технологического инструмента и надежности функционирования оборудования [3].

Установление возможностей существующих и разработка новых технологических процессов производства труб требует создания математических моделей,