

2. Абрамовский Е.Р. Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик. – Д., 2007. – 188 с.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. – М., 1982. – 320 с.
4. Згуровский М.З. Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев. – К., 1997. – 368 с.
5. Пененко М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Пененко. – Н., 1985. – 272 с.
6. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Берлянд. – Л., 1985. – 72 с.
7. Simiu E. Wind effects on structures. Second edition / E. Simiu, R.Y. Scanlan. – New York, 1986. – 589 p.

Надійшла до редакції 05.12.10

УДК 532.5

В.А. Катан

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Розглянуто задачу про ударну взаємодію нестисливої рідини та твердого віссиметричного тіла, що плаває на її вільній поверхні. На основі непрямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь розроблено алгоритм її розв'язання, що зводить її до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наведено приклади розв'язання задачі.

*Ключові слова:* удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, непрямий метод граничних інтегральних рівнянь.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого осесимметричного тела, плавающего на ее свободной поверхности. На основании непрямого варианта метода граничных интегральных уравнений разработан алгоритм ее решения, который приводит ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Приведены примеры решения задачи.

*Ключевые слова:* удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, непрямой метод граничных интегральных уравнений.

The problem of a impact interaction of incompressible fluid with the rigid body of revolution floating on its surface is considered. On the basis of indirect method of boundary integral equations the algorithm of problem solution was developed which leads to Fredholm integral equation of the second type. The examples of solution are presented.

*Key words:* impact of the floating body of revolution, indirect method of boundary integral equation method.

**Введение.** Классическая постановка задачи об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого тела, плавающего на ее свободной поверхности хорошо известна. Обзор и библиография по этим вопросам содержится в [1–3].

Рассмотрим твердое тело вращения, плавающее на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей соосный осесимметричный резервуар (рис.1). В момент  $t=0$  к телу внезапно прикладывается внешняя импульсная сила и

оно мгновенно приобретает вертикальную скорость  $V$ . Возникающее из состояния покоя под действием нормальных давлений движение жидкости будет осесимметричным и потенциальным. Из интеграла Коши-Лагранжа [4] вытекает связь между потенциалом движения жидкости и импульсным давлением

$$p_i = -\rho\phi, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Определение потенциала  $\phi$  в момент, следующий непосредственно после удара, сводится к решению смешанной осесимметричной краевой задачи для уравнения Лапласа [1; 4]

$$\Delta\phi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_S = V_n, \quad (3)$$

$$\phi|_\Gamma = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0, \quad (5)$$

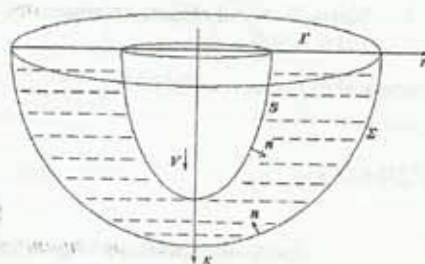


Рис. 1. Схема задачи

где  $V_n$  – проекция скорости жидкости после удара на нормаль к смоченной поверхности тела  $S$ ;  $\Gamma$  – свободная поверхность жидкости.

Условия (3) и (5) следуют из предположения о безотрывности удара. На свободной поверхности жидкости отсутствует импульсное давление, поэтому из соотношения (1) вытекает условие (4).

**Метод граничных интегральных уравнений.** Особенностью рассматриваемой смешанной задачи гидродинамического удара при больших числах Фруда является наличие на отдельных частях границы условий различного типа (либо Дирихле, либо Неймана). Этот факт позволяет с помощью специального представления искомой функции свести решение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на всей границе. Представим функцию  $\phi(M)$  в произвольной точке  $M$  области  $\Omega$  в виде суммы двух интегралов

$$\phi(M) = \int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{dS_Q}{r_{MQ}} + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{MQ}} \right) dS_Q, \quad (6)$$

где  $n$  – внутренняя нормаль к поверхности  $S+\Gamma+\Sigma$ ,  $r_{MQ}$  – расстояние между точками  $M$  и  $Q$ .

Первый интеграл в представлении (6) является потенциалом простого слоя интенсивности  $v(Q)$ , распределенного на поверхностях  $S$  и  $\Sigma$ , а второй интеграл – потенциалом двойного слоя интенсивности  $\mu(Q)$ , распределенного на поверхности  $\Gamma$ .

Интегральные уравнения для определения неизвестных функций  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$  получаются в результате предельного перехода на границу области  $\Omega$ . Если точка  $P$  принадлежит поверхности  $\Gamma$ , то при стремлении точки  $M$  к точке  $P$  изнутри области  $\Omega$  с учетом условия Дирихле на поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $\mu(Q)$  будет иметь вид

$$\int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{dS_Q}{r_{PQ}} + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) dS_Q + 2\pi\mu(P) = f(P), \quad (7)$$



где  $f(P)$  – заданное значение функции  $\phi(P)$  в точке  $P$  поверхности  $\Gamma$ . Если точка  $P$  принадлежит поверхности  $S$  или  $\Sigma$ , то при предельном переходе  $M \rightarrow P$  изнутри области получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $v(Q)$

$$-2\pi v(P) + \int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) dS_Q + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \left[ \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \right] dS_Q = g(P), \quad (8)$$

где  $g(P)$  заданное значение нормальной производной  $\frac{\partial \phi(M)}{\partial n}$  в точке  $P$  поверхности  $S$  или  $\Sigma$ .

В случае ударного взаимодействия твердого тела и несжимаемой жидкости функции  $f(P)$  и  $g(P)$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} f(M) &= 0, & P \in \Gamma, \\ g(M) &= \begin{cases} n_x, & P \in S, \\ 0, & P \in \Sigma. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, решение смешанной краевой задачи сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Уравнения системы (7) и (8) с учетом осевой симметрии после перехода к повторному интегрированию превращаются в систему одномерных уравнений Фредгольма второго рода относительно интенсивностей  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$ :

$$\begin{cases} \pi v(P) + \int_0^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q + 2 \int_{s_S}^{s_\Gamma} \mu(Q) F(P, Q) ds_Q + \\ + \int_{s_\Gamma}^{s_\Sigma} v(Q) R(P, Q) ds_Q = -0,5 r_s(P), & P \in S, \\ 2 \int_0^{s_S} v(Q) G(P, Q) ds_Q + \pi \mu(P) + 2 \int_{s_\Gamma}^{s_\Sigma} v(Q) G(P, Q) ds_Q = 0, & P \in \Gamma, \\ \int_0^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q + 2 \int_{s_S}^{s_\Gamma} \mu(Q) F(P, Q) ds_Q + \\ + \int_{s_\Gamma}^{s_\Sigma} v(Q) R(P, Q) ds_Q + \pi v(P) = 0, & P \in \Sigma, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} R(P, Q) &= \frac{r(Q)}{\eta} \left[ A(P, Q) \cdot E(k) + \frac{4x_s(P)r(Q)}{\eta^2} \cdot \frac{E(k) - K(k)}{k^2} \right], \\ G(P, Q) &= \frac{r(Q)}{\eta} K(k), \end{aligned}$$

$$F(P, Q) = \frac{r(Q)}{\eta^3(1-k^2)} \left\{ \frac{B(P, Q) \frac{x(P)}{\eta^2} \cdot K(k) -}{-E(k) \left[ r_s(P) + \frac{2x(P)}{\eta^2} \left( B(P, Q) + \frac{B(P, Q) - r(Q)x_s(P)}{1-k^2} \right) \right]} \right\} -$$

$$- \frac{2r^2(Q)x(P)x_s(P)}{\eta^5(1-k^2)k^2} \left\{ K(k) - \frac{E(k)}{1-k^2} \right\},$$

$$A(P, Q) = 2 \frac{r_s(P)(x(P) - x(Q)) + x_s(P)(r(Q) - r(P))}{(1-k^2)\eta^2},$$

$$B(P, Q) = x_s(P)(r(Q) + r(P)) - r_s(P)x(P),$$

$$k^2 = 4r_P r_Q \eta^{-2};$$

$$\eta^2 = x^2(Q) + (r(P) + r(Q))^2,$$

$K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы I-го и II-го рода. Здесь и дальше индекс  $s$  означает дифференцирование по длине контура смоченной поверхности тела вращения.

**Метод численного решения системы интегральных уравнений.** Система уравнений (10) решается методом коллокаций, в котором интегралы заменены конечными суммами. Отрезок интегрирования  $[0, s_\Sigma]$  узлами  $s_i, i = 1, 2, \dots, N+1$ , разбивается на  $N$  промежутков, при этом контуру тела соответствует отрезок  $[0, s_S]$ , свободной поверхности – отрезок  $[s_S, s_\Gamma]$ , контуру резервуара – отрезок  $[s_\Gamma, s_\Sigma]$ . На каждом промежутке искомая функция – одна из интенсивностей  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$  представлена как постоянная

$$\begin{cases} v \\ \mu \end{cases} (s) = \begin{cases} v \\ \mu \end{cases} (s_{i+1/2}) = \Phi_i \quad \text{при } s_i \leq s \leq s_{i+1},$$

где  $s_{i+1/2}$  – середина отрезка  $[s_i, s_{i+1}]$ . В качестве точек коллокации выбраны середины отрезков  $s_{i+1/2}$ . Система уравнений (10) сводится к системе алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных  $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ . Коэффициенты СЛАУ определяются по квадратурной формуле Гаусса 10-го порядка. В случае особых интегралов при вычислении диагональных коэффициентов применяется квадратурная формула 10-го порядка с весовой функцией  $\ln x$  [6]. Решение СЛАУ производится методом Гаусса.

Коэффициент присоединенной массы  $\mu$  определяется по формуле

$$\mu = -2\pi\rho \int_0^s \phi(s) r(s) r_s(s) ds. \quad (11)$$

По описанному алгоритму составлена программа для расчета вертикального удара плавающего тела вращения.

В качестве теста при отладке программы использовалось аналитическое решение задач о вертикальном ударе шара, полупогруженного в несжимаемую жид-



кость, диска, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости неограниченной глубины, и шара, плавающего в центре полусферического резервуара, наполненного несжимаемой жидкостью. В табл. 1 приведены данные расчета и теоретические значения для импульсного давления на поверхности шара, а в табл. 2 – для импульсного давления на поверхности полусферического резервуара, при разбиении контура шара единичного радиуса на 27 отрезков, контура свободной поверхности – на 45 отрезков, контура полусферического резервуара радиуса 2 – на 28 отрезков. При разбиении контура шара единичного радиуса на 27 отрезков, контура свободной поверхности – на 45 отрезков, контура полусферического резервуара радиуса 2 – на 28 отрезков. Наибольшее расхождение между теоретическими и численными данными наблюдается в окрестности точек стыка твердых поверхностей и свободной поверхности жидкости.

Таблица 1

Распределение импульсного давления по контуру поверхности плавающего шара

N	$x/R$	$r/R$	$P_i$ (теория)	$P_i$ (расчет)
1	0,99958	0,02908	0,71398	0,71386
2	0,98944	0,14493	0,70674	0,70662
3	0,96593	0,25882	0,68995	0,68983
4	0,92935	0,36921	0,66382	0,66370
5	0,88020	0,47460	0,62872	0,62859
6	0,81915	0,57358	0,58511	0,58498
7	0,74703	0,68480	0,53359	0,53345
8	0,66480	0,74702	0,47485	0,47469
9	0,57358	0,81915	0,40970	0,40951
10	0,47460	0,88020	0,33900	0,33877
11	0,36921	0,92935	0,26372	0,26343
12	0,25882	0,96593	0,18487	0,18447
13	0,14493	0,98944	0,10352	0,10282
14	0,02909	0,99958	0,02078	0,02660

Таблица 2

Распределение импульсного давления по контуру поверхности сферического резервуара

N	$x/R$	$r/R$	$P_i$ (теория)	$P_i$ (расчет)
1	0,02856	1,9998	0,00612	0,00894
2	0,19959	1,9900	0,04277	0,04242
3	0,36915	1,9656	0,07910	0,07888
4	0,53600	1,9268	0,11486	0,11467
5	0,69893	1,8739	0,14977	0,14960
6	0,85672	1,8072	0,18358	0,18342
7	1,0082	1,7273	0,21605	0,21589
8	1,1523	1,6347	0,24693	0,24678
9	1,2880	1,5300	0,27600	0,27585
10	1,4142	1,4142	0,30305	0,30290
11	1,5300	1,2880	0,32787	0,32773
12	1,6347	1,1523	0,35028	0,35016
13	1,7273	1,0082	0,37013	0,37001
14	1,8072	0,85673	0,38726	0,38715
15	1,8739	0,69893	0,40155	0,40145
16	1,9268	0,53600	0,41289	0,41280
17	1,9656	0,36915	0,42127	0,42112
18	1,9900	0,19959	0,42643	0,42635
19	1,9998	0,02856	0,42853	0,42845

По данной программе проведены расчеты вертикального удара в зависимости от глубины погружения плавающего шара, эллипсоида, конуса, параболоида вращения как в безграничной жидкости, так и в соосном осесимметричном резервуаре.

Рис. 2 содержит график зависимости отношения коэффициента присоединенной массы конуса единичной высоты к массе вытесненной конусом жидкости, который плавает в полусфере двойного радиуса, от угла полураствора конуса. Штриховой линией показаны изменения коэффициента присоединенной массы конуса, плавающего на поверхности безграничной несжимаемой жидкости. Приведенные расчеты показывают, что при наличии резервуара, стесняющего движение жидкости, значение коэффициента присоединенной массы и максимальное импульсивное давление возрастают, что ранее было отмечено рядом авторов [2; 3].

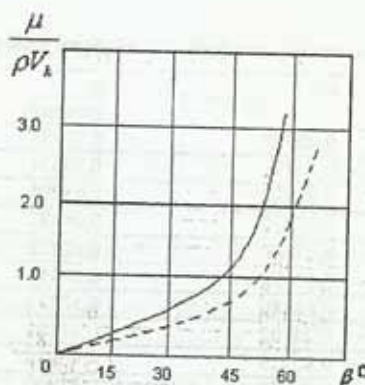


Рис. 2. Сравнение присоединенных масс конуса

**Выводы.** Описанный алгоритм расчета позволяет определить гидродинамические характеристики ударного взаимодействия жидкости и твердого тела вращения произвольной формы, плавающего на поверхности жидкости, занимающей соосный осесимметричный резервуар или слой конечной глубины или нижнее полупространство.

#### Библиографические ссылки

1. Гуревич М.И. Теория течений со свободными границами / М.И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика. – 1971. – Т. 5. – С. 32–114.
2. Григолюк Э.И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами / Г.В. Логвинович. – К., 1969. – 216 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный метод прикладной механики / Ф. Риццо // Метод граничных интегральных уравнений. – М., 1978. – С. 11–17.
6. Крылов В.И. Таблицы численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. / В.И. Крылов, А.А. Пальцев. – Минск, 1967. – 214 с.

Надійшла до редколегії 13.03.11