

(11) величину $C_p(V)$ определяем из зависимости $C_p(\lambda)$, поскольку λ при известном ω и R зависит только от V .

В качестве примера рассчитано значение V_H , соответствующее $\bar{E} = \bar{E}_{max}$ для фиксированного пункта установки ветродвигателя. В данном случае были рассмотрены метеоусловия в г. Дебальцево [3]. Для этих условий среднегодовая скорость равна $V_c = 5,1$ м/с, а номинальная скорость, обеспечивающая \bar{E}_{max} , равна $V_H = 10$ м/с. Поскольку зависимости $C_p(\lambda)$ для всех рассмотренных вариантов лопастей отличаются незначительно, то можно считать, что номинальные скорости для них также будут близки по значению к $V_H = 10$ м/с.

Итак, можно утверждать, что замена сплошной лопасти на ступенчатую фактически не снижает ее энергетических характеристик и в то же время существенно может упростить технологию ее изготовления.

Библиографические ссылки

1. Абрамовский Е. Р. Аэродинамика ветродвигателей : учеб. пособие / Е. Р. Абрамовский, С. В. Горюшко, Н. В. Свиридов. – Д., 1987. – 220 с.
2. Abramovsky Yev. R. Aerodynamic theory of wind turbines : study guide / Yev. R. Abramovsky. – Dnipropetrovsk, 2008. – 242 p.
3. Справочник по климату СССР // Украинская ССР, Гидрометеорология. Вып. 10, ч. 3. – С. 235–300.

Надійшла до редколегії 11.03.11

УДК 539.386:622.647.2

Р.В. Кирия

Институт геотехнической механики имени Н.С. Полякова НАН Украины

ИСТЕЧЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ИЗ БУНКЕРА С РАЗЛИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВЫПУСКНОГО ОТВЕРСТИЯ

На підставі аналізу структурно-механічного стану сипкого середовища одержано математичні моделі його витікання з бункера з різним розташуванням і формою випускного отвору. Встановлено залежність витрати сипкого середовища від параметрів випускного отвору і властивостей сипкого середовища.

Ключові слова: сипке середовище, витікання, бункер, випускний отвір, динамічне склепіння, структурно-механічний стан.

На основании анализа структурно-механического состояния сыпучей среды получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. Установлены зависимости расхода сыпучей среды от параметров выпускного отверстия и свойств сыпучей среды.

Ключевые слова: сыпучая среда, истечение, бункер, выпускное отверстие, динамический свод, структурно-механическое состояние.

In the work on the basis of analysis of the structural-mechanical state of friable environment the mathematical models of his expiration from a bunker with a different location and form of tape-

hole are got. Dependences of expense of friable environment on the parameters of tape-hole and properties of friable environment are set.

Key words: friable environment, expiration, bunker, tape-hole, dynamic vault, structural-mechanical state.

Введение. Вопросом истечения сыпучих сред из бункеров занимались многие исследователи [1–7]. Однако эта проблема в настоящее время остается все еще не решенной. Это связано с недостаточной изученностью физических процессов истечения сыпучей среды из бункера на микроуровне, то есть на уровне взаимодействия частиц.

Изучение этих процессов, происходящих на микроуровне, позволяет установить структурно-механическое состояние, в котором находится дисперсная среда, и, следовательно, установить связь между процессами, происходящими на микроуровне, с процессами, происходящими на макроуровне. Другими словами, разработать математическую модель движения дисперсной (в частности, сыпучей) среды как модель механики сплошной среды [8–10].

В литературе такие модели механики сплошной среды называются реологическими моделями дисперсных сред (структурно-механические модели) [10].

Исследования показали, что при определенных условиях сыпучая среда при движении может находиться в трех структурно-механических состояниях: твердого тела, пластичного и свободнодисперсного [11; 12].

При этом, если сыпучая среда находится в твердом состоянии, то ее частицы связаны между собой, их взаимное перемещение отсутствует и для внутренних напряжений справедлив закон Гука; если сыпучая среда находится в пластичном состоянии (медленное движение), то для внутренних напряжений справедлив закон Кулона; при свободнодисперсном состоянии (быстрое движение) частицы сыпучей среды не связаны между собой, находятся в непрерывном хаотическом движении и взаимодействуют между собой в результате столкновений (ударов). В последнем случае, согласно [11; 12], внутренние касательные и нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\tau = \frac{1}{3} \rho_c k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2; \quad p = \frac{1}{3} \rho_c k' k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2, \quad (1)$$

где ρ_c – плотность сыпучей среды; k – кинетический коэффициент, характеризующий потерю механической энергии потока сыпучей среды в результате столкновения частиц ($k = 10 \div 13$); k' – безразмерный коэффициент характеризующий потерю механической энергии частиц сыпучей среды в результате ударов частиц между собой ($k' = 0,3 \div 0,4$); d – средний диаметр частицы сыпучей среды; v_c – средняя скорость потока сыпучей среды в данной точке.

Следовательно, сыпучая среда, с точки зрения реологии дисперсных сред, представляет собой пластическое (твердообразное) дилатантное тело [10].

Твердое состояние сыпучей среды описывается уравнениями теории упругости, пластичное состояние – уравнениями движения сыпучей среды, находящейся в предельном состоянии. Свободнодисперсное состояние сыпучей среды описывается уравнением Навье-Стокса для вязкой жидкости. При этом вместо коэффициента молекулярной вязкости вводится коэффициент макровязкости, который характеризует перенос количества движения в результате случайного столкновения частиц сыпучей среды [1].

Постановка задачи. В представленной работе на основании анализа структурно-механического состояния сыпучей среды получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. При этом рассматривались бункеры с горизонтальными днищем и со щелевым и круг-

лым выпускным отверстием, расположенном на дне бункера, а также бункеры с боковым щелевым выпускным отверстием, расположенным на стенке бункера (рис. 1, а, б).

Бункер с горизонтальным выпускным отверстием. Рассмотрим истечение несвязной сыпучей среды из прямоугольного бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием шириной a и длиной b ($b > a$) (рис. 1, а). Согласно экспериментальным исследованиям [1; 2; 6; 7], при истечении сыпучей среды из бункера можно выделить 5 зон (рис. 1, а).

В зоне А (см. рис. 1, а) частицы сыпучей среды связаны между собой и движутся с малой скоростью параллельно стенкам бункера. В зоне В (рис. 1, а) частицы сыпучей среды скользят относительно друг друга, а их траектории искривляются в направлении к оси бункера. В этой зоне скорости частиц также малы и изменяются незначительно. В зоне динамического свода С (рис. 1, а) частицы сыпучей среды образуют подвижные своды, движущиеся вниз, скользя по стенкам канала, ширина которого приблизительно равна ширине выпускного отверстия. При этом скорости частиц сыпучей среды существенно увеличиваются, а их траектории приближаются к вертикальным линиям. В зоне обрушения (перемешивания) D связи между частицами сыпучей среды разрушаются, при этом они находятся в непрерывном хаотическом движении, сталкиваясь между собой. Траектории движения частиц в этой зоне совпадают с прямыми линиями, а их скорость увеличивается за счет силы тяжести. В зоне Е частицы сыпучей среды находятся в неподвижном состоянии.

Кроме того, нормальные напряжения p сыпучей среды в бункере в зоне А увеличиваются с глубиной бункера линейно. В зоне В нормальное напряжение достигает максимального значения σ_n и не изменяется с глубиной бункера, а в зоне С нормальное напряжение уменьшается с глубиной бункера линейно и при приближении к выпускному отверстию уменьшается до нуля (рис. 1, а).

Опишем движение сыпучей среды в каждой зоне.

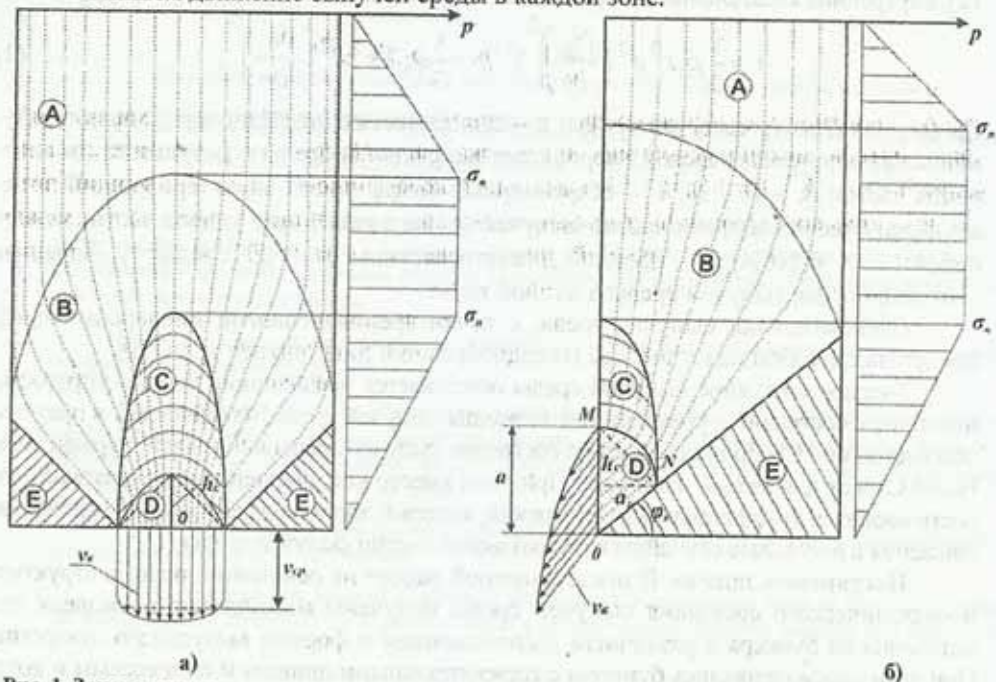


Рис. 1. Зоны структурно-механического состояния сыпучей среды при его истечении из бункера: а) горизонтальное щелевое выпускное отверстие; б) боковое щелевое выпускное отверстие

Зона А. Сыпучая среда движется как твердое тело с неизменной малой скоростью. При этом нормальное напряжение p увеличивается от нуля до максимального значения σ_n (рис. 1, а).

Зона В. Сыпучая среда движется также с малой скоростью, находясь в пластичном состоянии, и для внутренних напряжений справедлив закон Кулона [4; 13].

При этом, если высота сыпучей среды в бункере намного больше его ширины, то, согласно [4], внутренние напряжения в зоне В принимают максимальные значения и не изменяются с глубиной сыпучей среды (рис. 1, а). Это связано с тем, что с увеличением глубины сыпучей среды за счет его веса нормальные напряжения увеличиваются и из-за бокового распора увеличиваются касательные напряжения, которые на определенной глубине бункера уравниваются силами веса сыпучей среды. Поэтому, нормальные и касательные напряжения, действующие на сыпучую среду, принимают максимальные значения и с увеличением глубины не изменяются.

Определим максимальные напряжения в этой зоне. Выделим малый прямоугольный элемент сыпучей среды с шириной Δx и высотой Δy (рис. 2, а).

Так как в зоне В скорости частиц сыпучей среды малы, то условия равновесия выделенного элемента сыпучей среды имеют вид

$$\Delta G + F_c = 0, \quad (2)$$

где ΔG – вес элемента сыпучей среды; F_c – касательная сила, действующая на элемент сыпучей среды.

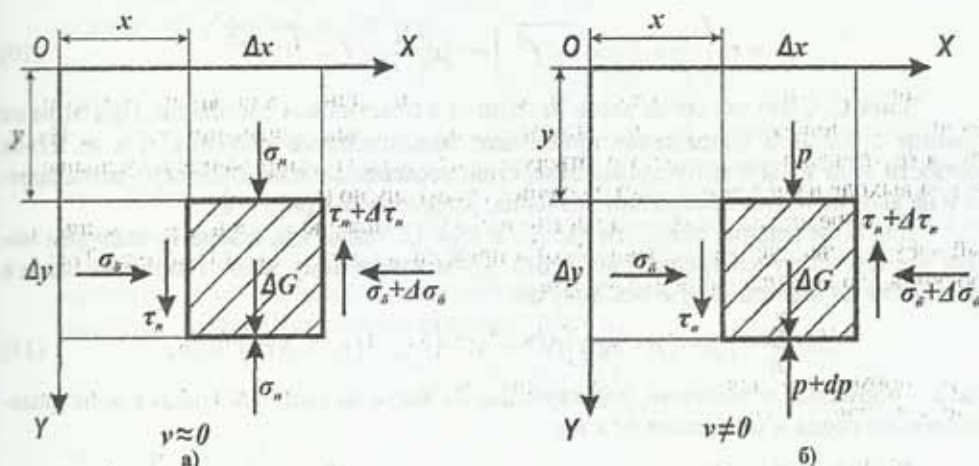


Рис. 2. Расчетная схема определения напряжений и скоростей:
а) в зоне В; б) в зоне С

Вес элемента сыпучей среды равен

$$\gamma \eta(x) = -c \ln(a^2 - x^2), \quad (3)$$

где Δm – масса выделенного элемента, равная $\sigma_z(x, h) = -c \ln(a^2 - x^2) f(x)$; γ – удельный вес сыпучей среды.

Касательные силы, действующие на элемент сыпучей среды, определяются через касательные напряжения по формуле

$$|x| < a, \quad (4)$$

где τ_n – максимальные касательные напряжения.

Учитывая, что максимальные касательные напряжения от y не зависят, подставляя (3) и (4) в (2), после преобразования, устремив Δx к нулю ($\Delta x \rightarrow 0$), получим

$$\eta = \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Решим уравнение (5) при условии: при $x = 0$ $\tau_n = 0$, получим

$$\tau_n = \gamma |x|. \quad (6)$$

Из круга Мора [4] с учетом (6) имеем

$$\eta = 1; \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\tau_n}{f} = \frac{\gamma}{f} |x|; \quad (8)$$

где f – коэффициент внутреннего трения сыпучей среды;

Следовательно, максимальные касательные τ_n и нормальные напряжения σ_n , σ_θ являются линейными функциями от координаты x .

Главные нормальные напряжения в этой зоне, согласно [4], определяются по формулам:

$$\kappa = \frac{2 \mu b}{\pi (2 - \omega)}; \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \tau_n \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma |x| \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right). \quad (10)$$

Зона С. Сыпучая среда здесь находится в пластичном состоянии. При этом на границе с зоной В напряжения принимают максимальные значения τ_n и σ_n . Из-за близости этой зоны к выпускному отверстию нормальные напряжения p уменьшаются и на выходе из нее принимают значения, равные нулю (рис. 1, а).

Для определения скорости частиц в зоне С, также как в зоне В, выделим малый элемент сыпучей среды (рис. 2, б) и применим к нему закон Ньютона. Тогда в проекциях на вертикальную ось получим

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = [p - (p + \Delta p)] \Delta x b + \Delta G + [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (11)$$

где p – нормальное давление, действующее на частицы сыпучей среды в зоне динамического свода и зависящее от x и y .

Подставив (3) в (11), после преобразования, устремив $\eta = \frac{1}{2}$ и $\eta = \frac{3}{2}$, получим

$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[\ln(a^2 - x^2) S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2) R_1(t - x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x) \quad (12)$$

Предположим, что в зоне динамического свода С, также как и в зоне В, силы тяжести сыпучей среды уравновешиваются касательными напряжениями, то есть выполняется равенство (5).

Следовательно, уравнение (12) с учетом (5) примет вид:

$$\eta = 1. \quad (13)$$

В силу стационарности движения истечения сыпучей среды из бункера имеем $v = v(x, y)$.

После дифференцирования по времени t предыдущего равенства имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Учитывая, что в зоне динамического свода C горизонтальная составляющая скорости частиц сыпучей среды мала, то есть $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = v$, последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим

$$\tilde{\mu} = \mu a / Q. \quad (15)$$

Проинтегрируем последнее уравнение при начальных условиях $v=0$, $p=\sigma_n$ и получим скорость в любой точке динамического свода, равную

$$\tilde{b} = bQ/a, \quad (16)$$

где $p=p(x, y)$.

Из (16) следует, что скорость частиц сыпучей среды в зоне динамического свода зависит только от распределения нормального давления p по высоте и сечению бункера.

Подставив в левую часть равенства (16) $p=0$, определим скорость на выходе из динамического свода, равную

$$v_0 = \sqrt{2g \frac{\sigma_n}{\gamma}}. \quad (17)$$

Из (17) и (8) следует, что скорость на выходе из динамического свода зависит только от максимального нормального давления и является функцией от координаты x .

Последняя формула совпадает с формулой Зенкова [4]. Однако, в отличие от формулы Зенкова, в формуле (17) v_0 есть скорость частиц сыпучей среды на выходе из зоны динамического свода C . В то же время в формуле Зенкова v_0 есть скорость частиц сыпучей среды на выходе из бункера. Кроме того, у Зенкова вместо σ_n стоит некоторое среднее нормальное давление, равное

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{2} \gamma a \chi, \quad (18)$$

где $\chi = \frac{1}{f} + 2f - \sqrt{1+f^2}$.

Подставив в (17) вместо σ_n среднее значение σ_{cp} из (18), получим скорость сыпучей среды на выходе из бункера, совпадающую с формулой Зенкова

$$v_0 = \sqrt{ga\chi}. \quad (19)$$

Согласно экспериментальным данным [6] в зоне динамического свода траектории частиц сыпучей среды приблизительно совпадают с прямолинейными лучами, идущими в некоторый центр, расположенный на оси бункера и находящийся ниже щелевого отверстия.

В этом случае, согласно [13], меньшее главное напряжение σ_2 в любой точке движущейся сыпучей среды совпадает с траекториями движения частиц. С другой стороны, так как траектории движения частиц сыпучей среды в зоне динамического

свода мало отличаются от вертикальных линий, то нормальная составляющая приближенно совпадает с главным напряжением $\sigma_n \approx \sigma_2$.

Подставив в формулу (17) вместо σ_n главное нормальное напряжение σ_2 , получим скорость движения частиц сыпучей среды на выходе из зоны динамического свода

$$v_d = \sqrt{2g \frac{\sigma_2}{\gamma}}. \quad (20)$$

Зона D. Как отмечалось выше, в зоне обрушения D частицы сыпучей среды находятся в непрерывном хаотическом движении в результате столкновений между собой. Следовательно, сыпучая среда в этой зоне находится в свобододисперсном состоянии и, согласно [11; 12], его движение описывается уравнениями Навье-Стокса для сыпучих сред.

С помощью круга Мора можно показать, что для несвязной сыпучей среды граница между динамическим сводом C и зоной обрушения D представляет собой перевернутую параболу [4]

$$y = h_c \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (21)$$

где h_c – высота параболы, определяемая по формуле

$$h_c = \frac{a}{4} \frac{(1 + \sin \phi)}{\cos \phi} = \frac{a}{4} (f + \sqrt{1 + f^2}). \quad (22)$$

Заменим границу между зоной динамического свода и зоной обрушения прямолинейными отрезками, совпадающими с боковыми сторонами равнобедренного треугольника, основание которого совпадает со щелевым отверстием бункера, а высота совпадает с высотой параболы h_c (рис. 3,а). Уравнение этой границы можно записать в виде

$$y = h_c \left(1 - \frac{2|x|}{a} \right), \quad (23)$$

где $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

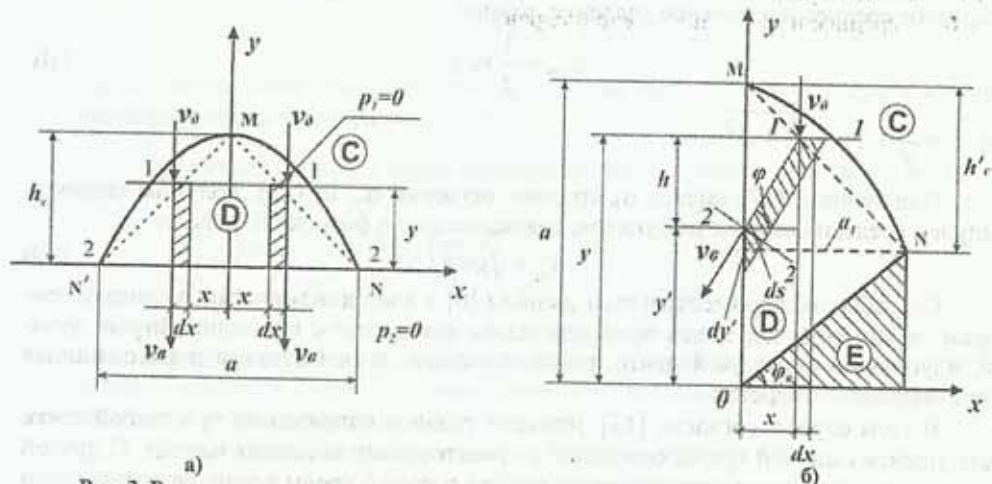


Рис. 3. Расчетные схемы определения скорости истечения сыпучей среды в зоне D: а) прямое выпускное щелевое отверстие; б) боковое выпускное щелевое отверстие

Применив уравнение Бернулли для сыпучих сред к сечениям 1-1 и 2-2 выделенных трубок в зоне перемешивания D (рис. 3, а), получим

$$y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}), \quad (24)$$

где y_1, y_2 – уровни сечений 1-1 и 2-2 относительно оси ox ; p_1, p_2 – нормальные напряжения сыпучей среды в точках пересечения сечения 1-1 с боковыми сторонами треугольника и соответствующих точках сечения на выходе из бункера; v_1, v_2 – скорости частиц сыпучей среды в тех же точках сечений 1-1 и 2-2; ζ – коэффициент местных потерь Дарси-Вейсбаха при движении сыпучей среды в зоне обрушения, характеризующий потери механической энергии потока сыпучей среды при столкновении частиц между собой [14;15].

Подставим в (24) соответствующие значения $y_1=y$; $y_2=0$; $p_1=0$; $p_2=0$; $v_1=v_0$; $v_2=v_*$. После преобразований получим значение скорости частиц сыпучей среды на выходе из бункера

$$v_* = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gy + v_0^2} \bar{b}. \quad (25)$$

Последнее равенство с учетом (20) примет вид

$$v_* = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} \bar{\sigma}_z(\bar{x}, \bar{h}). \quad (26)$$

Объемный расход через щелевое отверстие определим по формуле

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_* b dx \bar{w}(\bar{x}, \bar{h}). \quad (27)$$

Подставив в последнее выражение (25), получим

$$Q = \frac{b}{\sqrt{1+\zeta}} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} dx. \quad (28)$$

Подставив (10) и (23) в (28), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} b a^{1.5} \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \frac{K_1^{1.5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1.5} \right], \quad (29)$$

где $K_1 = \frac{1}{2} \left(f + \sqrt{1+f^2} \right)$, $\chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1+f^2}$.

Определим коэффициент местных потерь ζ при движении сыпучего материала в зоне обрушения.

Согласно [15], коэффициент ζ при движении сыпучей среды по прямолинейному каналу определяется по формуле

$$\zeta = K_2 \frac{k^2 d^2 l}{h^3}, \quad (30)$$

где K_2 – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от условий истечения сыпучей среды из бункера (прямое или боковое истечение сыпучей среды из бункера) и определяемый из эксперимента; l – длина канала, h – высота канала.

Подставив в выражение (30) $l=h_c$ и $h=a$, получим

$$\zeta = K_2 k^2 d^2 \frac{h_c}{a^3}. \quad (31)$$

Согласно (22), максимальную высоту границы динамического свода h_c можно записать в виде

$$h_c = K_1 \frac{a}{2}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31), получим

$$\zeta = K_1 K_2 \frac{k^2 d^2}{a^2}. \quad (33)$$

Коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера согласно [1] определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q}{ba^{1.5} \sqrt{g}}. \quad (34)$$

Подставляя (29) в (34) с учетом (33), после преобразований получим

$$\eta = \frac{\delta \eta_0}{\sqrt{\delta^2 + k^2 K_1 K_2}}, \quad (35)$$

$$\text{где } \eta_0 = \frac{2}{3} \frac{K_1^{1.5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1.5} \right]; \quad \delta = \frac{a}{d}.$$

В этом случае, согласно экспериментальным данным, $K_2 = 1$.

Из формулы (35) следует, что если $\delta \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \eta_0$.

Расчеты показали, что при $f = 0,58 \div 0,7$ $\eta_0 \approx 1$. Это означает, что для мелких сыпучих сред ($\delta > 100$) коэффициент расхода η мало зависит от коэффициента внутреннего трения, ширины щели и диаметра частиц. В этом случае, согласно (34), критерий Фруда приблизительно равен 1, то есть

$$Fr = \frac{v_{cp}^2}{ag} \approx 1.$$

Для сравнения определим коэффициент расхода η на основе теории Зенкова [4].

Подставив (19) в (27), имеем

$$Q = ba^{1.5} \sqrt{g \chi}. \quad (36)$$

Затем, подставив (36) в (34), получим

$$\eta = \sqrt{\chi}. \quad (37)$$

Расчеты показали, что при $f = 0,7 \div 0,58$ $\eta = 1,27 \div 1,31$.

Из формулы (35) следует, что коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера зависит от его коэффициента внутреннего трения f и отношения ширины щели бункера к диаметру частиц. В то же время, по теории Зенкова (37) этот коэффициент зависит только от коэффициента f внутреннего трения и не зави-

сит от ширины выпускного отверстия a бункера и диаметра частиц сыпучей среды d .

Бункер с круглым выпускным отверстием. Рассмотрим истечение сыпучей среды из бункера с круглым выпускным отверстием, расположенным в дне бункера.

В этом случае зоны структурно-механического состояния сыпучей среды в бункере совпадают с такими же зонами в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием (рис. 1, а).

При этом касательные и нормальные напряжения в зоне В определяются по формулам:

$$\tau_n = \gamma \frac{r}{2}, \quad \sigma_n = \tau_n (1 + 2f^2) = \frac{\gamma}{2} r (1 + 2f^2), \quad (38)$$

а главные нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_n \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right) = \frac{\gamma}{2} r \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right), \\ \sigma_2 &= \tau_n \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right) = \frac{\gamma}{2} r \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где r – радиальная координата, цилиндрической системы координат, в которой ось ou совпадает с осью бункера, а ось or совпадает с радиусом бункера.

Кроме того, для бункера с круглым выпускным отверстием имеет место формула Зенкова (17), а границей между зоной динамического свода В и зоной обрушения Д является параболоид вращения с высотой, определяемой по формуле (22), в которой a является диаметром выпускного отверстия.

Проведя выкладки, такие же, как и для бункера со щелевым выпускным отверстием, получим коэффициент расхода сыпучей среды из бункера с круглым выпускным отверстием, определяемый по формуле (35), в которой η_0 определяется из равенства

$$\eta_0 = \frac{\pi}{6} K_1^{0.5} \left[\left(1 + \frac{\chi''}{K_1} \right)^{1.5} - \left(\frac{\chi''}{K_1} \right)^{1.5} \right], \quad (40)$$

где $\delta = \frac{a}{d}$; $\chi'' = \frac{1}{4} \left(f + \frac{1}{f} - \sqrt{1 + f^2} \right)$.

В этом случае согласно экспериментальным данным $K_2 = 3$.

Из уравнений (35) и (40) следует, что если $\delta \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \eta_0$. Расчеты показали, что при $f = 0,58 \div 0,7$ коэффициент $\eta_0 = 0,64 \div 0,66$.

Бункер с боковым щелевым отверстием. Рассмотрим истечение сыпучей среды из прямоугольного бункера с боковым щелевым выпускным отверстием шириной a и длиной b ($b > a$) (рис. 1, б).

На основе визуальных исследований процесса истечения сыпучей среды из бункера с боковым щелевым отверстием, так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, можно выделить такие же 5 зон: А, В, С, Д, Е, отличающихся друг от друга структурно-механическим состоянием (рис. 1, б).

Сыпучая среда в зонах А, В, С, Е движется так же, как и в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием. Поэтому все уравнения, описывающие состояние сыпучей среды в этих зонах для бункера с горизонтальным щелевым вы-

пускним отверстием, совпадают с аналогичными величинами для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

В зоне обрушения (перемешивания) **D**, в отличие от истечения сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым отверстием, траектории движения частиц совпадают с прямыми наклонными линиями, составляющими угол наклона к горизонту φ . При этом угол φ изменяется с изменением координаты y в пределах $\varphi_0 < \varphi < 90^\circ$. Угол φ_0 равен углу наклона границы, разделяющей область подвижного и область неподвижного состояния **E** сыпучей среды в бункере (рис. 1, б).

Кроме того, в этом случае – нормальные напряжения p сыпучей среды в бункере изменяются по высоте бункера так же, как и в случае истечения сыпучей среды из бункера с прямым щелевым выпускным отверстием (рис. 1, б).

Так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, применим уравнение Бернулли для сыпучих сред [14] к сечениям 1 – 1 и 2 – 2 элементарной трубки (заштрихованы на рис. 3, б), вдоль которой движутся частицы сыпучей среды в зоне **D**. В результате согласно (24) и (20), получим

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(h + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)}. \quad (41)$$

Так же, как и в случае истечения сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, граница между зоной динамического свода **C** и зоной обрушения **D** совпадает с параболой **MN** уравнение которой имеет вид (рис. 3, б)

$$y = h'_c \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right] + a_1 \operatorname{tg} \phi_0, \quad (42)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{a}{K_1 + \operatorname{tg} \phi_0}; \quad h'_c = \frac{aK_1}{K_1 + \operatorname{tg} \phi_0}; \quad K_1 = \frac{1}{2} \left(f + \sqrt{1+f^2} \right).$$

Заменяя параболу **MN** приближенно на прямую (рис. 3, б), получим

$$y \approx h'_c \left(1 - \frac{x}{a_1} \right) + a_1 \operatorname{tg} \phi_0. \quad (43)$$

Объемный расход сыпучей среды через боковое щелевое выпускное отверстие бункера определим по формуле

$$Q = \int v_s ds, \quad (44)$$

где ds – площадь нормального сечения элементарной трубки (см. рис. 3, б).

Из рис. 3, б имеем

$$ds = \cos \phi dy'.$$

Подставив последнее равенство в (44), получим

$$Q = \int_0^a v_s \cos \phi dy'. \quad (45)$$

Из рис. 3, б имеем также

$$h = x \operatorname{tg} \phi; \quad y' = y - x \operatorname{tg} \phi. \quad (46)$$

Положим в (45) и (46) $\phi = \phi_c = \text{const}$, где ϕ_c – некоторое среднее значение ϕ . Тогда, подставив (41) в (45), с учетом (43) и (46), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} b a^{1.5} \sqrt{2g} \frac{\cos \phi_c}{\sqrt{1+\zeta}} (K_1 + \operatorname{tg} \phi_c) \sqrt{\chi' + \operatorname{tg} \phi_c} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi_0}{1 + K_1 \operatorname{tg} \phi_0} \right)^{3/2}. \quad (47)$$

Коефіцієнт місцевих потерь ζ при русі сыпучей среды в зоні обриву [1] визначається також по формулі (33).

Для визначення коефіцієнта расхода підставимо (47) в (34), з урахуванням (33) після перетворення приходимо до формули (35), в якій η_0 визначається з вираження

$$\eta_0 = \frac{2}{3} \cos \phi_c (K_1 + \operatorname{tg} \phi_c) \sqrt{2(\chi' + \operatorname{tg} \phi_c)} \left(\frac{\operatorname{tg} \phi_0}{1 + K_1 \operatorname{tg} \phi_0} \right)^{3/2}. \quad (48)$$

В цьому випадку, згідно експериментальним даним, $K_2 = 0,5$.

З формул (35) і (48) випливає, що при $\delta \rightarrow \infty \eta \rightarrow \eta_0$.

Розрахунки показали, що при $f = 0,58 \div 0,7$ коефіцієнт $\eta_0 = 0,3 \div 0,38$.

З формул (35) і (48) випливає, що коефіцієнт расхода сыпучей среды з бункера з боковим щелевим випускним отвором залежить від δ , тобто від відношення ширини отвору a до діаметру частини сыпучей среды d , його коефіцієнта внутрішнього тертя f і кутів ϕ_c , ϕ_0 . Як показали експериментальні дослідження, кути ϕ_c і ϕ_0 не залежать від кута внутрішнього тертя і в залежності від діаметра частинок змінюються в межах $\phi_c = 67 \div 72^\circ$, $\phi_0 = 35 \div 45^\circ$. При цьому з збільшенням діаметра частинок d кути ϕ_c і ϕ_0 збільшуються.

На рис. 4 показані графіки залежності коефіцієнта расхода η сыпучей среды з бункера з горизонтальним щелевим, круглим і боковим щелевим випускними отворами від безрозмірної величини δ (криві 2, 3, 4 відповідно).

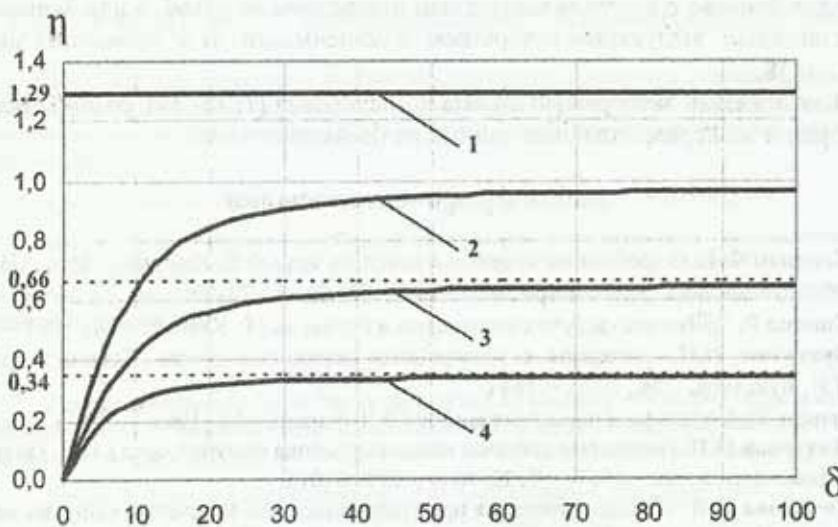


Рис. 4. Графіки залежності коефіцієнта расхода при истечении сыпучей среды из бункера

Крива 1 на рис. 4 побудована згідно формули (37) і відповідає теорії Зенкова; крива 2 відповідає формулі (35); крива 3 відповідає формулам (35) і (40); крива 4 відповідає формулам (35) і (48). При цьому параметри бун-

кера и сыпучей среды принимали значения $b=0,09$ м; $f=0,64$; $k=12$; $5 \leq a \leq 50$ мм и $0,35 \leq d \leq 7$ мм, $\varphi_c = 72^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$.

Из рисунка 4 видно, что для небольших δ ($0 < \delta < 100$) коэффициенты расхода (кривые 2,3,4) с увеличением δ увеличиваются. При больших δ ($\delta > 100$) коэффициенты расхода практически не изменяются, принимая постоянные значения $\eta \approx 1$ (кривая 2), $\eta \approx 0,66$ (кривая 3) и $\eta \approx 0,34$ (кривая 4). В то же время прямая 1 принимает постоянное значение $\eta = 1,29$ при любых δ .

Выводы. Коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием больше на 34 %, чем коэффициент расхода из бункера с круглым щелевым выпускным отверстием и практически в три раза больше коэффициента расхода из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

Кроме того, коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием по теории Зенкова на 30 % больше коэффициента расхода, рассчитанного по нашей теории (кривые 1 и 2 на рис. 4).

Согласно формулам (35), (40) и (48), расход сыпучей среды из бункера зависит от диаметра отверстия и размера частиц сыпучей среды и для наиболее распространенных сыпучих сред практически не зависит от коэффициента внутреннего трения. При этом для сыпучих сред, для которых $\delta \geq 50$ (то есть в случае, когда размер частиц значительно меньше размеров выпускного отверстия) объемный расход Q и средняя скорость на выходе из бункера v_{cp} согласно (34), определяются по формулам:

$$Q \approx \eta_0 b a^{1,5} \sqrt{g}, \quad (49)$$

$$v_{cp} \approx \eta_0 \sqrt{ga}. \quad (50)$$

При этом для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием $\eta_0 = 1$, для бункера с круглым выпускным отверстием $\eta_0 = 0,66$, а для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием в зависимости от d принимает значения $\eta_0 = 0,3-0,38$.

Как показали экспериментальные исследования [1; 16; 17], разница результатов теории и экспериментальных данных не превышает 10 %.

Библиографические ссылки

1. Кенеман Ф.Е. О свободном истечении сыпучих тел / Ф.Е. Кенеман // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 70–77.
2. Квапил Р. Движение сыпучих материалов в бункерах / Р. Квапил. – М., 1961. – 80 с.
3. Лукьянов П.И. Аппараты с движущимся зернистым слоем. Теория и расчет / П.И. Лукьянов. – М., 1974. – 184 с.
4. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов / Р.Л. Зенков. – М., 1964. – 251 с.
5. Платонов Н.П. Некоторые вопросы механики потока сыпучих сред / Н.П. Платонов // Инжен.-физ. журн. – 1967. – Т. 12, № 6. – С. 806–812.
6. Кочанова И.И. О видах движения при гравитационном истечении сыпучих материалов / И.И. Кочанова // Инж.-физ. журн. – 1971. – Т. 10, №5. – С. 815–821.
7. Сэвидж С.Г. Гравитационное течение несвязных гранулированных материалов в лотках и каналах / С.Г. Сэвидж // Механика гранулированных сред; под. ред. А.Ю. Ишлинского. – М., 1985. – Вып. 36. – С. 86–146.
8. Базаров И.П. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика / И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев. – М., 1989. – 240 с.

9. Кайзер Джон. Статистическая термодинамика неравновесных систем / Джон Кайзер. – М., 1990. – 608 с.
10. Овчинников П.Ф. Виброреология / П.Ф. Овчинников – Киев, 1983. – 272 с.
11. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред / Р.В. Кирия // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 1999. – Вип. 2. – С. 143 – 150.
12. Механика гранулированных сред / Теория быстрых движений, Сб. №36; под. ред. А.Ю. Ишлинского. – М., 1985. – 279 с.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М., 1969. – Т.2. – 864 с.
14. Штернлихт Д.В. Гидравлика / Д.В. Штернлихт. – М., 1984. – 639 с.
15. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров / Р.В. Кирия // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2003. – Вып. № 41. – С. 159–167.
16. Кирия Р.В. К вопросу об истечении сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2008. – № 80. – С. 351–362.
17. Кирия Р.В. Истечение сыпучего груза из бункера с боковым щелевым отверстием / Р.В. Кирия, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой : сб. науч. тр. Нац. горн. ун-та. – Днепропетровск, 2009. – № 32. – С. 114–122.

Надійшла до редакції 24.02.11

УДК 532.593

Д.О. Черников

Институт гидромеханики НАН Украины

ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН ПОДВИЖКАМИ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Досліджується відхилення вільної поверхні шару рідини при повторюваних збудженнях донної поверхні. Завдання вирішується за допомогою перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним зверненням. Проводиться аналіз отриманих результатів для двох локальних підйомів дна.

Ключові слова: шар рідини, хвилі на вільній поверхні, порухи донної поверхні.

Исследуется отклонение свободной поверхности слоя жидкости изменяющихся возмущениях донной поверхности. Задача решается при помощи преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ полученных результатов для двух случаев подвижки дна.

Ключевые слова: слой жидкости, волны на свободной поверхности, подвижки дна.

The perturbation of a liquid free surface, excited by changing of a bottom shape is considered. The problem is solved by means of Laplas transformation with respect to time and subsequent numerical re-transformation. The analysis of the obtained results for two local elevation of a bottom is presented.

Key words: layer of a liquid, waves on a free surface, changes of a bottom shap.

Введение. Исследование распространения неустановившихся волновых движений в жидкости конечной глубины представляет большой интерес в океанологии. Известные методы решения задач генерации волн подвижками донной поверхности, позволяют получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В более общем случае решение может быть получено с по-