9. **Кайзер Джон.** Статистическая термодинамика неравновесных систем / Джон Кайзер. – М., 1990. – 608 с.
10. **Овчинников П.Ф.** Виброреология / П.Ф. Овчинников – Киев, 1983. – 272 с.
11. **Кирия Р.В.** Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред / Р.В. Кирия // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механика. – 1999. – Вип. 2. – С. 143 – 150.
12. **Механика гранулированных сред** / Теория быстрых движений, Сб. №36; под. ред. А.Ю. Ишлинского. – М., 1985. – 279 с.
13. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М., 1969. – Т.2. – 864 с.
14. **Штерлихт Д.В.** Гидравлика / Д.В. Штерлихт. – М., 1984. – 639 с.
15. **Кирия Р.В.** О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров / Р.В. Кирия // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2003. – Вып. № 41. – С. 159–167.
16. **Кирия Р.В.** К вопросу об истечении сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2008. – № 80. – С. 351–362.
17. **Кирия Р.В.** Истечение сыпучего груза из бункера с боковым щелевым отверстием / Р.В. Кирия, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой : сб. науч. тр. Нац. горн. ун-та. – Днепропетровск, 2009. – № 32. – С. 114–122.

Надійшла до редакції 24.02.11

УДК 532.593

Д.О. Черников

Институт гидромеханики НАН Украины

ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН ПОДВИЖКАМИ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Досліджується відхилення вільної поверхні шару рідини при повторюваних збудженнях донної поверхні. Завдання вирішується за допомогою перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним зверненням. Проводиться аналіз отриманих результатів для двох локальних підйомів дна.

Ключові слова: шар рідини, хвилі на вільній поверхні, порухи донної поверхні.

Исследуется отклонение свободной поверхности слоя жидкости изменяющихся возмущениях донной поверхности. Задача решается при помощи преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ полученных результатов для двух случаев подвижки дна.

Ключевые слова: слой жидкости, волны на свободной поверхности, подвижки дна.

The perturbation of a liquid free surface, exited by changing of a bottom shape is considered. The problem is solved by means of Laplas transformation with respect to time and subsequent numerical retransformation. The analysis of the obtained results for two local elevation of a bottom is presented.

Key words: layer of a liquid, waves on a free surface, changes of a bottom shap.

Введение. Исследование распространения неустановившихся волновых движений в жидкости конечной глубины представляет большой интерес в океанологии. Известные методы решения задач генерации волн подвижками донной поверхности, позволяют получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В более общем случае решение может быть получено с по-

мощью теории интегральных преобразований. Рассматриваемая задача представляет особый интерес для проблемы цунами [11]. Из наблюдений цунами в Тихом океане 28 марта 1964 г следует, что длина волны может превышать глубину в пять раз [12] и, следовательно, явление может описываться теорией волн мелкой воды. Однако в случае генерации волн возмущениями донной поверхности необходимо рассматривать задачу в жидкости конечной глубины. Проблема цунами рассматривалась также в [3; 4; 7; 9].

Постановка задачи. Рассматривается область, заполненная жидкостью, которая ограничена сверху свободной поверхностью, снизу – твердой границей и не ограничена в направлении распространения волн. В начальный момент жидкость находится в покое, а глубина жидкости постоянна. Предполагается, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна при $t=0$, а при $t=t_d$ происходит повторное возмущение дна.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциалов скоростей $\varphi(r,\vartheta,z,t)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0\,; \qquad (1)$$

$$-H_0\le z\le 0,\ \ r>0,\ \ t>0\,;$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=0, \qquad \eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0}; \qquad (2)$$

на донной поверхности:

$$\frac{\partial\varphi(r,\vartheta,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=-H_0}=\frac{\partial\eta^b}{\partial t}; \qquad (3)$$

начальные условия:

$$\varphi(r,\vartheta,z,t)\big|_{t=0}=\frac{\partial\varphi(r,\vartheta,z,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\eta^b\big|_{t=0}=0; \qquad (4)$$

где η^b – отклонение дна, η – отклонение свободной поверхности.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при $t=0$ включается одно возмущение, а при $t=t_d$ – другое, так что функции η_1^b и η_2^b задаются в виде:

$$\eta_1^b=\eta_0\psi(r)f(t);\ \ \eta_2^b=\eta_0^d\psi^d(r)f^d(t). \qquad (5)$$

Метод решения. Введем безразмерные переменные перемещения (далее звездочки опущены)

$$r^*=\frac{r}{r_0},\qquad z^*=\frac{z}{H_0},\qquad t^*=t\frac{\sqrt{gH_0}}{r_0},\qquad \eta^*=\frac{\eta}{H_0},\qquad \varphi^*=\frac{\varphi}{r_0\sqrt{gH_0}}. \qquad (6)$$

где H_0 – глубина жидкости, r_0 – радиус возмущения отклонения дна, t – время, g – ускорение силы тяжести.

Применим интегральное преобразование Лапласа по времени t [1]

$$f^L(r,\vartheta,z,s)=\int_0^\infty f(r,\vartheta,z,t)e^{-st}dt. \tag{7}$$

В принятых обозначениях (6) задача (1) – (5) приводится к следующей

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi^L}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi^L}{\partial r}\right)=0;\quad -1\le z\le 0, \tag{8}$$

$$\left(s^2\varphi^L+\beta^2\frac{\partial\varphi^L}{\partial r}\right)_{z=0}=0; \tag{9}$$

$$\beta^2\left.\frac{\partial\varphi^L}{\partial z}\right|_{z=-1}=s\eta_0\psi^d(r)f^{dL}(s); \tag{10}$$

где s – параметр преобразования Лапласа, $\beta=\dfrac{r_0}{H_0}$.

Зададим решение задачи (8) – (10) в виде произведения трех функций

$$\varphi^L=R(r)\Phi(\vartheta)Z(z); \tag{11}$$

каждая из которых зависит только от одной переменной. Тогда частными решениями уравнения (8) являются функции [2]

$$I_n(hr)e^{in\vartheta}e^{i\frac{h}{\beta}z} \tag{12}$$

$$K_n(hr)e^{in\vartheta}e^{i\frac{h}{\beta}z} \tag{13}$$

где $I_n(\zeta)$ и $K_n(\zeta)$ – функции Бесселя, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, h – волновое число.

Функции (12), (13) должны удовлетворять условию регулярности при $r=0$. Поэтому решение уравнения (8) для потенциалов скоростей записывается в виде:

$$\varphi^L=\left[A_n\cos\left(\frac{h}{\beta}z+n\vartheta\right)+B_n\sin\left(\frac{h}{\beta}z+n\vartheta\right)\right]I_n(hr). \tag{14}$$

Применим интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате r

$$f^H(\lambda)=\int_0^\infty f(r)rJ_0(\lambda r)\,dr, \tag{15}$$

где λ – параметр преобразования Ханкеля.

Задача (1) – (5) с учетом преобразований (7) – (15) приводится к определению произвольных постоянных в решении

$$\varphi^{LH}=\left[A_n\cos\left(\frac{h}{\beta}z+n\vartheta\right)+B_n\sin\left(\frac{h}{\beta}z+n\vartheta\right)\right]\omega(\lambda). \tag{16}$$

$$\left(s^2\varphi^{LH}+\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\right)_{z=0}=0, \tag{17}$$

$$\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\bigg|_{z=-1}=s\eta_0\psi^{dH}(\lambda)f^{dL}(s). \tag{18}$$

Подставляя решение (16) в условия (17) и (18), получим значения коэффициентов:

$$A_n=\frac{s\eta_0\psi^{dH}(\lambda)f^{dL}(s)\left[s^2\sin(n\vartheta)+h\beta\cos(n\vartheta)\right]}{h\beta\omega(\lambda)\left[h\beta\sin\left(2n\vartheta-\frac{h}{\beta}\right)-s^2\cos\left(2n\vartheta-\frac{h}{\beta}\right)\right]}, \tag{19}$$

$$B_n=-\frac{s\eta_0\psi^{dH}(\lambda)f^{dL}(s)\left[s^2\cos(n\vartheta)-h\beta\sin(n\vartheta)\right]}{h\beta\omega(\lambda)\left[h\beta\sin\left(2n\vartheta-\frac{h}{\beta}\right)-s^2\cos\left(2n\vartheta-\frac{h}{\beta}\right)\right]}. \tag{20}$$

Численные расчеты и анализ результатов. Численное обращение преобразования Лапласа может проводиться различными методами [6; 8]. В [6] исследуется алгоритм обращения с применением рядов Фурье по синусам [10]. В [8] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лагерра. В данном случае задача восстановления оригинала $f(t)$ требует привлечения подходов, чувствительных даже к незначительным вариациям изображения $F(s)$ [2]. Численное обращение на основе разложений Фурье-Бесселя есть в [5], где представлены результаты тестовых расчетов и сопоставление с точными (табличными) обращениями и некоторыми точными решениями. Расчеты проводились с удержанием различного числа членов (5, 6, …, 10) и показано достаточное число членов для получения надлежащей точности.

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [10], согласно которому требуются только значения изображения $F(s)$ при равностоящих значениях $s=(2n+1)\sigma$, где σ – произвольное число, большее нуля, $\sigma>0$, а $n=0,1,\ldots$ Переменная t заменяется на θ и функция $\varphi(\theta)$ под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям $\sin(2\nu+1)\theta$. Параметр σ при малых t выбирается большим, а при больших t – меньшим.

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на воде в жидкости конечной глубины двумя донными возбуждениями, которые одно за другим, когда после первого основного толчка через некоторое время следует еще один, который может отличаться от первого как силой, так и временем задержки и быстротой нарастания и спада.

Предполагалось, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна

$$\psi^d(r)=\zeta(\zeta^2+r^2)^{-\frac{3}{2}},\ \zeta>0 \tag{21}$$

и последовательным включением двух возмущений $f_k^d\,(k=1,2)$:

$$f_1^d(t) = te^{-\alpha t}, \; при \; t \geq 0; \; f_2^d(t) = te^{-\alpha t} \; H(t - t_d) \; при \; t \geq t_d, \qquad (22)$$

где $H(t)$ функция Хевисайда.

Исследовалось отклонение свободной поверхности для различных удалений от эпицентра $r = 0$. Было установлено, что в случае включения второго возмущения амплитуды отклонения свободной поверхности возрастает примерно на 30 % для r=1 и 20 % для r=2.

Библиографические ссылки

1. **Диткин В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М., 1965. – 468 с.
2. **Крылов В.И**. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. – М., 1974. – 224 с.
3. **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский. – Нижний Новгород, 1996. – 276 с.
4. **Селезов И.Т.** Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом / И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 140–145.
5. **Селезов И.Т.** Численное обращение преобразования Лапласа на основе разложений Фурье-Бесселя / И.Т. Селезов, С.В. Корсунский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 11. – С. 25–28.
6. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М., 1971. – 288 с.
7. **Geist E.L.** Tsunami: Wave of change / E.L. Geist, V.V. Titov, C.E. Synolakis // Scientific American. – 2005.
8. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М., 1981. – 524 с.
9. **Мурти Т.С.** Сейсмические морские волны цунами / Т.С. Мурти. – Л., 1981. – 448 с.
10. **Papoulis A.** A new method of inversion of the Laplace transform / A. Papoulis // Quart. Appl. Math. – 1957, №14. – С. 405–414.
11. **Selezov I.T.** Modeling of tsunami wave generation and propagation / I.T. Selezov // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – 33, №1. – С. 44–54.
12. **Вейль П.** Популярная океанография / П. Вейль. – Л., 1977. – 504 с.

Надійшла до редколегії 10.12.10

УДК 532.593

О.Г. Гоман*, Е.А. Тихая**

**Днепропетровский национальный університет шимени Олеся Гончара*

***Запорожский гуманитарный колледж ЗНТУ*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Розглядається задача про визначення форми вільної поверхні шару рідини певної глибини у процесі збурень, викликаних деформацією донної поверхні. Задача розглядається в рамках класичної постановки теорії малих хвиль Коші-Пуассона для ідеальної рідини. Запропонований
