$$f_1^d(t) = te^{-\alpha t}\ ,\ при\ t \geq 0;\ f_2^d(t) = te^{-\alpha t}\ H(t - t_d)\ при\ t \geq t_d, \qquad (22)$$

где $H(t)$ функция Хевисайда.

Исследовалось отклонение свободной поверхности для различных удалений от эпицентра $r = 0$. Было установлено, что в случае включения второго возмущения амплитуды отклонения свободной поверхности возрастает примерно на 30 % для r=1 и 20 % для r=2.

Библиографические ссылки

1. **Диткин В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М., 1965. – 468 с.
2. **Крылов В.И**. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. – М., 1974. – 224 с.
3. **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский. – Нижний Новгород, 1996. – 276 с.
4. **Селезов И.Т.** Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом / И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2009. – 52, № 3. – С. 140–145.
5. **Селезов И.Т.** Численное обращение преобразования Лапласа на основе разложений Фурье-Бесселя / И.Т. Селезов, С.В. Корсунский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 11. – С. 25–28.
6. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М., 1971. – 288 с.
7. **Geist E.L.** Tsunami: Wave of change / E.L. Geist, V.V. Titov, C.E. Synolakis // Scientific American. – 2005.
8. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М., 1981. – 524 с.
9. **Мурти Т.С.** Сейсмические морские волны цунами / Т.С. Мурти. – Л., 1981. – 448 с.
10. **Papoulis A.** A new method of inversion of the Laplace transform / A. Papoulis // Quart. Appl. Math. – 1957, №14. – C. 405–414.
11. **Selezov I.T.** Modeling of tsunami wave generation and propagation / I.T. Selezov // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – 33, №1. – C. 44–54.
12. **Вейль П.** Популярная океанография / П. Вейль. – Л., 1977. – 504 с.

Надійшла до редколегії 10.12.10

УДК 532.593

О.Г. Гоман*, Е.А. Тихая**

**Днепропетровский национальный університет шимени Олеся Гончара*

***Запорожский гуманитарный колледж ЗНТУ*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Розглядається задача про визначення форми вільної поверхні шару рідини певної глибини у процесі збурень, викликаних деформацією донної поверхні. Задача розглядається в рамках класичної постановки теорії малих хвиль Коші-Пуассона для ідеальної рідини. Запропонований

підхід зводить задачу до розв'язання деякого інтегрального (чи інтегро-диференціального) рівняння для певної гідродинамічної функції на вільній поверхні.

Ключові слова: хвилі в шарі рідини, задача Коші-Пуассона, метод граничних інтегральних рівнянь.

Рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости конечной глубины в процессе возмущений, вызванных изменением поверхности дна. Задача рассматривается в рамках классической постановки теории малых волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предположенный метод сводится к решению некоторого интегрального или интегро-дифференциального уравнения для некоторой гидродинамической функции на свободной поверхности.

Ключевые слова: волны в слое жидкости, задача Коши-Пуассона, метод граничных интегральных уравнений.

It deals with the task of examining the form of a free surface of a final depth liquid layer in the process of perturbation caused by a surface change . The research is based on classical statement of Cauchy-Poisson's small waves theory for an ideal liquid. The proposed method makes it possible to solve the integral or integro-differential equation for hydrodynamic function when studying a free surface.

Key words: waves in a liquid layer, Cauchy-Poisson's problem, boundary integral equation method.

Введение. Задачи о движении жидкости в слоях конечной глубины со свободной поверхностью представляют большой интерес в различных областях человеческой деятельности: это, во-первых, течения в каналах, используемых в различных современных технологиях; во-вторых, течения в руслах рек, естественных или искусственных каналах различного целевого назначения и, в-третьих, это течения в океанологии, вызванные землетрясениями и вулканической деятельностью. В то время как в первых двух указанных случаях отраслях достигнут определенный прогресс в их описании, проблема описания волновых движений в океанологии в настоящее время усиленно исследуется в основном с целью предсказания возникновения цунами, последствий и поиска путей смягчения их воздействия на берега. Не вдаваясь в подробную библиографию по вопросам генерации океанических волн, которая насчитывает сотни и тысячи наименований, укажем на монографию [1], содержащую систематические данные наблюдений за цунами и другими явлениями распространения волн в мировом океане, а также на [2; 3], близкие по тематике к данной работе авторов.

Постановка задачи. Рассматривается классическая задача Коши-Пуассона (в плоской постановке) о волновом движении весомой жидкости в бесконечном слое постоянной глубины h при возмущении поверхности дна. Задача рассматривается в рамках линейной теории волн для идеальной несжимаемой жидкости.

Выберем начало координат декартовой системы xoy на невозмущенной поверхности днища, оси x направив вдоль свободной поверхности днища, а ось y – вертикально вверх. Тогда, как известно [4], задача Коши-Пуассона имеет следующую постановку: в полосе $0<y<h$ имеет место уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 . \tag{1}$$

для потенциала скоростей возникающего движения жидкости; на свободной поверхности $y = h$ выполняется условие

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right|_{y=h} = 0 . \tag{2}$$

На нижнем основании слоя $z = 0$ выполняется условие непроницаемости в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = f(x,t), \tag{3}$$

ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка», 2011. № 5. Вип. 15, том 1

где $y=f(x,t)$ – уравнение «подвижки» донной поверхности слоя, которое будем считать заданным. Уравнение свободной поверхности в любой момент времени через потенциал скоростей выражается формулой

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=h} \quad \zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\bigg|_{y=h}, \tag{4}$$

а давление в толще жидкости – при помощи линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа

$$\frac{p - p_a}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \tag{5}$$

где p_a – атмосферное давление над слоем жидкости, которое предполагается постоянным.

Схема области представлена на рис.1.

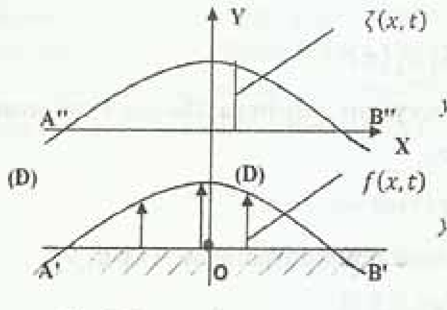

Рис. 1. Схема области течения

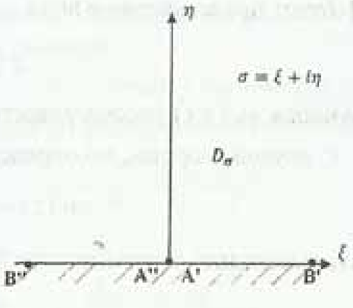

Рис. 2. Отображение области течения на верхнюю полуплоскость

Для полной постановки нестационарной задачи необходимо задать начальное значение потенциала в слое $(\varphi)_{t=0}$ и его производную $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$, которые, для определенности, будем считать нулевыми.

Идея метода решения задачи. Введем в рассмотрение, как обычно, комплексный потенциал рассматриваемого течения $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, который будем рассматривать как функцию комплексного переменного $z = x+iy$, изменяющегося в полосе (D):

$$-\infty < x < \infty, 0 < y < h. \tag{6}$$

В качестве основной искомой функции выберем функцию

$$\chi(z) = i\frac{dw}{dz} = i(v_x - iv_y) = v_y + iv_x. \tag{7}$$

Тогда задача сводится к определению аналитической функции $\chi(z)$ в полосе (D) (7) по заданной ее действительной части v_y на границе $y = 0$:

$$\left(v_y\right)_{y=-h} = f(x,t) \equiv \psi_0(x,t) \tag{8}$$

и заданной связи (2) между действительной частью функции χ на верхней границе

$$v_y\big|_{y=h} \equiv \psi_1(x,t) \tag{9}$$

и производной $\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{y=h}$:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=h} = \psi_1(x,y) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{y=h} . \tag{10}$$

Идея предлагаемого подхода решения поставленной задачи состоит в следующем: будем временно предполагать, что функция $\psi_1(x,t)$ (то есть значение v_y на свободной поверхности) задана; тогда исходная задача сводится к задаче Дирихле для аналитической функции χ в полосе с заданными значениями ее действительной части на границах полосы. Решение этой задачи (при некоторых предположениях) может быть записано явно (интеграл Шварца для полосы, [2]), т.е. $\chi(z)$ будет представлено в виде

$$\chi(z) = S\left[\psi_1(x,t)\right], \tag{11}$$

где функция $\psi_1(x,t)$ рассматривается как аргумент оператора Шварца S для полосы.

С другой стороны, по определению

$$w(z) = -i\int \chi(z)\,dz = \varphi + i\psi , \tag{12}$$

так что потенциал φ оказывается также некоторым оператором A от ψ_1:

$$\varphi = A\left[\psi_1, x, y, t\right]. \tag{13}$$

Вычисляя отсюда производную $\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{y=h}$, из условия (10) получим некоторое интегро-дифференциальное уравнение для определения заранее неизвестной функции $\psi_1(x,t)$.

Целью данной работы является получение указанного интегро-дифференциального уравнения.

Совершим конформное преобразование полосы на верхнюю полуплоскость переменной $\zeta = \xi + i\eta$ так, чтобы бесконечно-удаленная точка A плоскости z перешла в начало координат плоскости ζ, а бесконечно удаленная точка B плоскости z перешла в бесконечно удаленную точку плоскости ζ (рис. 2). Это отображение осуществляется функцией

$$z = \frac{h}{\pi} ln \zeta , \tag{14}$$

причем основание дна слоя y = 0 переходит в положительную полуось $\xi > 0$ с соответствием точек:

$$\xi = e^{\frac{\pi x}{h}}, \quad x = \frac{h}{\pi} ln|\xi|, \ -\infty < x < \infty, 0 < \xi < \infty, \tag{15}$$

а уровень y = h переходит в отрицательную полуось $\xi < 0$ с соответствием

$$\xi = -e^{\frac{\pi x}{h}}, \quad x = \frac{h}{\pi} ln|\xi|, \; -\infty < x < \infty, -\infty < \xi < 0, \tag{16}$$

Соответственно функции $\psi_0(x,t)$ и $\psi_1(x,t)$ перейдут в

$$\psi_0(\frac{h}{\pi}\ln\xi,t) = \overline{\psi}_0(\xi,t), \; 0 < \xi < \infty,$$

$$\psi_1(\frac{h}{\pi}\ln|\xi,t) = \overline{\psi}_1(\xi,t)|, \; -\infty < \xi < 0$$

и мы приходим к задаче Дирихле для полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta > 0$ для функции $\chi(\zeta,t)$, решение которой задается в виде [5]

$$\chi(\zeta,t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{\psi}_1(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \zeta} + \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{\overline{\psi}_0(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \zeta} + iC, \tag{17}$$

причем второй интеграл в последнем выражении представляет собой известную функцию от ζ, если функцию ψ_0 считается известной.

Вычислим функцию χ на участке $-\infty < \xi < 0$, который в физической плоскости соответствует свободной поверхности $y = h$. Согласно формуле Сохоцкого получим

$$\chi_{-\infty<\xi<0} = \overline{\psi}_1(\xi,t) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{\psi}_1(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \xi} - \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \frac{\overline{\psi}_0(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \xi} + iC.$$

Из определения (7) функции χ получим

$$v_{x\text{в}}(\xi,t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{\psi}_1(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \xi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\overline{\psi}_0(\xi',t)d\xi'}{\xi' - \xi} + C, \tag{18}$$

где $v_{x\text{в}}(\xi,t)$ – означает горизонтальную компоненту скорости на свободной поверхности в физической плоскости, выраженную через переменную ξ на соответствующей границе вспомогательной плоскости ζ.

Отметим, что в силу того, что $-\infty < \xi < 0$, первый интеграл в выражении (18) является особым в смысле Коши.

Возвратившись в физическую плоскость, вместо (18) получим выражение

$$v_{x\text{в}}(x,t) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(x',t)e^{\pi x'/h}dx'}{e^{\pi x'/h} - e^{\pi x/h}} - \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_0(x',t)e^{\pi x'/h}dx'}{e^{\pi x'/h} + e^{\pi x/h}} + C, \tag{19}$$

которое связывает касательную компоненту скорости жидкости на свободной поверхности $v_{x\text{в}}(\xi,t)$ с нормальной компонентой на этой же поверхности $v_{y\text{в}}(x,t) = \psi_1(x,t)$ и нормальной компонентой на дне $v_{y\text{н}}(x,t) = \psi_0(x,t)$.

Если закон движения дна известен, то есть, если известна функция $\psi_0(x,t)$, то второй интеграл в (19) представляет собой известную функцию переменных x и t.

Чтобы воспользоваться граничным условием на свободной поверхности (10), сначала найдем значение потенциала при $x = -\infty$ Будем здесь для простоты предполагать, что скорость набегающего потока в слое на бесконечности отсутствует, что сводится к равенству C=0. Так как потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, будем считать, что $\varphi = 0$ при $x = -\infty$. Тогда из определения функции χ имеем

$$\frac{dw}{d\zeta} = -i\chi(\zeta)\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{ih}{\pi\zeta}\chi(\zeta),$$

откуда получим

$$w = -\frac{ih}{\pi}\int_{-\infty}^{\zeta}\frac{\chi(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

что с точностью до несуществующей постоянной дает выражение

$$w(\zeta,t) = -\frac{h}{\pi^2}\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{\overline{\psi}_1(\xi',t)}{\xi'}ln\frac{\xi}{\xi'-\xi}d\xi' + \int_{0}^{\infty}\frac{\overline{\psi}_0(\xi',t)}{\xi'}ln\frac{\xi}{\xi'-\xi'}d\xi'\right\} + \frac{h}{\pi}C\,ln\,\zeta\,. \quad (20)$$

Последнее слагаемое соответствует источнику в начале координат полуплоскости ζ и, значит, наличию общей скорости течения в слое; если эта скорость отсутствует, то C=0, что и будем предполагать в дальнейшем. Вычисляя последнее выражение при $-\infty < \xi < 0$, найдем значение потенциала на свободной поверхности

$$\phi(x,t) = -\frac{h}{\pi^2}\int_{-\infty}^{0}\frac{\overline{\psi}_1(\xi',t)}{\xi'}ln\frac{|\xi|}{|\xi'-\xi|}d\xi' - \frac{h}{\pi^2}\int_{0}^{\infty}\frac{\overline{\psi}_0(\xi',t)}{\xi'}ln\frac{|\xi|}{|\xi'-\xi|}d\xi', \quad (21)$$

или в физических переменных

$$\phi(x,t)_{y=h} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x',t)\,ln\frac{e^{\pi x/h}}{\left|e^{\pi x/h}-e^{\pi x'/h}\right|}dx' - F(x,t), \quad (22)$$

где через $F(x,t)$ обозначена известная функция

$$F(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x',t)\,ln\frac{e^{\pi x/h}}{\left|e^{\pi x'/h}+e^{\pi x/h}\right|}dx'$$

Из (22) получаем

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{y=h} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}(x,t)K(x,x')dx' - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t),$$

где через $K(x,x')$ обозначено ядро

$$K(x,x') = ln\frac{e^{\pi x/h}}{\left|e^{\pi x/h}-e^{\pi x'/h}\right|}.$$

Теперь, используя граничное условие (2), получим следующие интегро-дифференциальное уравнение для функции $\left(v_y\right)_{y=h} = \psi_1(x,t)$:

$$\psi_1(x,t) + \frac{1}{\pi g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi_1(x',t)}{\partial t^2}K(x,x')dx' = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (23)$$

где, в свою очередь,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi_0(x',t)}{\partial t^2}ln\frac{e^{\pi x/h}}{\left|e^{\pi x/h}+e^{\pi x'/h}\right|}dx'$$

Выражение (23) представляет собой основное уравнение предлагаемого метода. Для решения этого уравнения должны быть заданы начальные значения

$$\left(\psi_1\right)_{t=0} \text{ и } \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right)_{t=0},$$

которые в случае, если процесс начинается из состояния равновесия, могут быть приняты равными нулю.

В качестве более простого примера можно рассмотреть случай, когда нижнее основание совершает гармонические колебания по закону

$$f(x,t) = \Delta_н(x)e^{i\omega t}.$$

Тогда $\psi_0(x,t) = i\omega\Delta_н(x)e^{i\omega t}$, и вертикальную компоненту скорости на свободной границе удобно представить в виде

$$\left(v_{ув}\right)_{y=h} = \psi_1(x,t) = i\omega\Delta_н(x)e^{i\omega t}.$$

Теперь уравнение (23) превратится в интегральное уравнение Фредгольма относительно амплитуды вертикальной компоненты скорости на свободной поверхности.

$$\Delta_в(x) - \frac{\omega^2}{\pi g}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_в(x')K(x,x')dx' = F_0(x), \tag{24}$$

где

$$F_0(x) = -\frac{\omega^2}{\pi g}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_н(x')\ln\frac{e^{\pi x/h}}{\left|e^{\pi x'/h} + e^{\pi x/h}\right|}dx'.$$

Сведение исходной задачи к уравнению Фредгольма второго рода вносит в проблему вопрос об определении собственных чисел (то есть собственных частот), при некоторых возможно появление собственных колебаний слоя жидкости.

Вывод. Для задачи о колебании слоя жидкости под действием вертикального движения дна получено интегро-дифференциальное уравнение, определяющее зависимость вертикальной компоненты скорости на свободной поверхности от скорости вертикального перемещения дна. В случае гармонических колебаний поверхности дна задача сводится к уравнению Фредгольма второго рода и вовлекает в рассмотрение проблему определения собственных чисел колебания слоя.

Библиографические ссылки

1. **Мурти Т.С.** Сейсмические морские волны цунами / Т.С. Мурти ; пер. с англ. [под ред. проф. А.В. Некрасова]. – Л. 1981. – 448 с.
2. **Селезов И. Т.** Генерация поверхностно-гравитационных волн данным повторяющимся во времени импульсом / И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 140–145.
3. **Черников Д.О.** Генерация волн подвижками данной поверхности / Д.О. Черников // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2011. –Вип.15, т.1. – С. 89–93.
4. **Кочин Н.Е.** Теоретическая гидромеханика, Ч.1 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М., 1956. – 560 с.
5. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М., 1965. – 716 с.

Надійшла до редколегії 20.12.10