ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка», 2011. № 5. Вип. 15, том 1

УДК 532.593

Е.В.Козлова, О.В.Козлова
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Розглядаються різні підходи до використання методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання задачі про рух рідини в шарі, як у плоскій так і просторовій постановці. Аналізуються деякі позитивні та негативні риси підходів, що розглядаються.

Ключові слова: течії ідеальної рідини в шарі, теорія потенціалу, граничні інтегральні рівняння.

Рассматриваются различные подходы к использованию метода граничных интегральных уравнений для решения задачи о движении жидкости в слое в плоской и пространственной постановке. Анализируются некоторые положительные и отрицательные стороны различных подходов.

Ключевые слова: течение идеальной жидкости в слое, теория потенциала, граничные интегральные уравнения.

Different approaches for the use of boundary integral equations method applied to solution of the problem of liquid motion within the layer in the plane and the spatial dimensions are considered. Some positive and negative aspects of different approaches are analyzed.

Key words: frictionless flow of fluid layer, potential theory, boundary integral equations.

Введение. Задачи о движении жидкости в слое (канале) со свободной поверхностью относятся к наиболее сложным задачам гидромеханики, даже в постановке идеальной среды из-за нелинейных граничных условий на свободной поверхности. В настоящее время, ни один из развитых численных методов (конечных разностей, конечных элементов и граничных элементов) для таких задач не может рассматриваться как достаточно эффективный из-за трудности алгоритмизации определения положения свободной границы в текущий момент времени. Для стационарных нелинейных плоских задач в рамках модели теорий струй идеальной невесомой жидкости существует целый арсенал аналитических средств, которые основаны на применении аппарата теории аналитических функций и которые можно объединить под общим названием как метод Жуковского-Чаплыгина – МЖЧ.

Известно, что метод МЖЧ ориентирован на применение к таким задачам теории струй, у которых твердая граница представляет собой полигон (многоугольник), на сторонах которого известен угол наклона вектора скорости. Именно это свойство твердых участков границ, а также тот факт, что на свободных участках границ сохраняется модуль скорости (для невесомой жидкости), обеспечивают то важное свойство, что на комплексной плоскости Жуковского

$$\omega = \ln\frac{v_0}{v} + i\theta \qquad (1)$$

область изменения переменной ω имеет форму обобщенного многоугольника, для отображения которого на каноническую область – верхнюю полуплоскость – используется интеграл Шварца-Кристоффеля.

Успех применения интеграла Шварца-Кристоффеля зависит от количества существующих в нем параметров-констант, для определения которых в общем случае приходится решать довольно сложную нелинейную систему трансцендентных

уравнений, содержащих некоторые интегралы с неизвестными заранее упомянутыми константами. Если число этих констант незначительно, то в простейших случаях их удается определить явно без решения указанных трансцендентных уравнений. При значительном же числе этих констант задача их определения из упомянутой системы уравнений может представлять существенные трудности, которые, хотя принципиально и преодолимы, однако значительно снижают практическую эффективность МЖЧ, в связи с чем, для таких задач может оказаться более целесообразным, непосредственное применение метода граничных интегральных уравнений.

Постановка вопроса. Рассмотрим некоторые варианты применения метода граничных интегральных уравнений к задачам гидромеханики. Пусть функция u удовлетворяет уравнению Лапласа в некоторой области D

$$\Delta u = 0 .$$

Тогда в пространственном случае эта функция может быть представима формулой Грина в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r_{MP}}dS - \frac{1}{4\pi}\int_S u\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r_{MP}})dS , \tag{2}$$

где S – поверхность, охватывающая область D, содержащую внутри себя интересующую нас точку наблюдения M; r_{MP} –расстояние между точкой M и произвольной точкой P на границе S; производная $\frac{\partial}{\partial n}$ вычисляется в точке границы S по внешней нормали по отношению к области D.

В плоском случае имеет место аналогичная формула

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}ds - \frac{1}{2\pi}\int_C u\frac{\partial}{\partial n}\ln(\frac{1}{r_{MP}})ds , \tag{3}$$

где интегрирование производится вдоль замкнутой контура C, охватывающего плоскую область D и точка M находится внутри D.

Первый интеграл справа в формулах (2) и (3) представляет собой потенциал простого слоя, (расположенного соответственно на поверхности S или на кривой C), а второй интеграл – потенциал двойного слоя, сосредоточенный на той же поверхности или кривой.

Отметим, что формула (2) справедлива при наличии в пространстве любой совокупности замкнутых или незамкнутых поверхностей S_i и в равной мере может использоваться как для внутренней, так и для внешней задачи. Точно также формула (3) для плоской задачи может использоваться при некоторых дополнительных предположениях как для внутренней, так и для внешней области, и также в случае наличия в области нескольких замкнутых контуров C_i.

Сами по себе формулы (2) и (3) краевых задач теории потенциала не разрешают, поскольку они содержат на границе в качестве используемых функций одновременно u_s и $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$, что в физически корректно поставленных задачах не случается. Известно, что для уравнения Лапласа корректно поставленная задача допускает задание в каждой точке границы или u_s, или $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$; одновременно эти величины произвольным образом заданы быть не могут. Таким образом, в конкретных фи-

зических, и, в частности, гидродинамических задачах, мы встречаемся с тремя возможными случаями задания граничных условий:

а) на всей границе задана функция u_s (задача Дирихле);

б) на всей границе задана нормальная производная $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ (задача Неймана);

в) на отдельных частях границы задана u_s, а на других $-\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ (смешанная задача, или задача Келдыша-Седова).

Формулы (2) и (3) могут дать эффективное решение краевой задачи для уравнения Лапласа лишь в том случае, когда на границе известны одновременно и u_s, и $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$. Поэтому для использования формул (2) и (3) необходимо сначала найти средство для доопределения неизвестных функций на границе, а именно, на тех участках, на которых известна функция u, нужно рассчитать $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$, а на тех участках, где известна $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$, первоначально нужно суметь вычислить саму функцию u.

Такую возможность как раз и предоставляют формулы Грина (2) и (3).

Именно, если в формуле (2) совершить предельный переход точки M из области D на границу S, то благодаря разрывному поведению потенциала двойного слоя, получим такое тождество (уравнение)

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{r_{MP}}dS - \frac{1}{2\pi}\int_S u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dS. \tag{4}$$

Аналогично, для плоского случая будем иметь:

$$u(M) = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}ds - \frac{1}{\pi}\int_C u\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)ds. \tag{5}$$

Выражения (4) и (5) представляют собой граничные интегральные уравнения. В принципе эти уравнения позволяют восстановить неизвестные заранее функции на участках поверхности S (или кривой C): на тех участках S (C), где известна u, из интегрального уравнения восстанавливается неизвестная $\frac{\partial u}{\partial n}$, а на тех участках, где известна $\frac{\partial u}{\partial n}$ восстанавливается u. После этого формулы Грина (2) и (3) представляют собой явные формулы для вычисления функции u в любом месте области (D). Формулы (2) и (3) являются выражением того факта, что значение функции u в любой точке M области является итогом суммирования возмущений приходящих в эту точку от всех точек граничной поверхности.

Обычно считается, что граничное интегральное уравнение типа (4) (или (5)) достаточно для того, чтобы довосстановить на участках границы неизвестную там заранее функцию u, или $\frac{\partial u}{\partial n}$, если там известна $\frac{\partial u}{\partial n}$, или u.

Однако, как оказывается, в конкретных гидродинамических задачах это сделать не всегда удаётся. Приведём некоторые примеры того, когда тождества Грина приводят к неэффективным граничным интегральным уравнениям.

Течение жидкости в канале переменного сечения. Для простоты рассмотрим плоскую задачу о безотрывном течении жидкости в канале бесконечной протяженности.

Пусть нижняя и верхняя границы канала ограничены кривыми $y = f_н(x)$ и $y = f_в(x)$, имеющими в бесконечности горизонтальные асимптоты. Схема области показана на рис. 1.

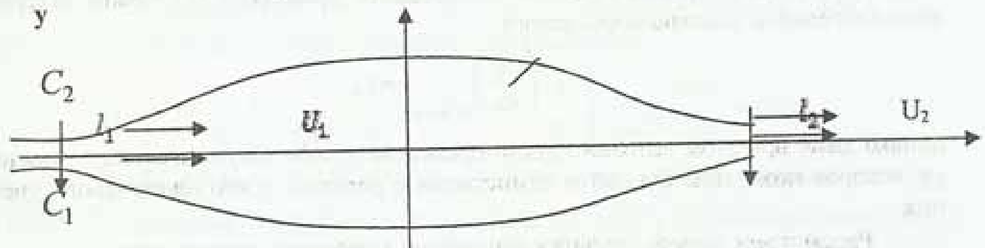

Рис. 1. Схема области течения

Ширину канала на входе $x \to -\infty$ обозначим через h_1, на выходе $x \to +\infty$ через h_2. По условию несжимаемости имеем

$$U_1 h_1 = U_2 h_2 . \tag{6}$$

Для применения формулы Грина (3) и формулы для интегрального уравнения (5) в качестве замкнутого контура C выберем контур, состоящий из нижней границы C_1 и верхней C_2, дополненной двумя вертикальными участками l_1 и l_2, расположенными как угодно далеко от начала координат $x = R$ и $x = -R$, ($R \to \infty$), где границы $y_н(x)$ и $y_в(x)$ выходят на свои горизонтальные асимптоты.

В качестве исходной искомой функции выберем потенциал течения $\varphi(x, y)$. Тогда, поскольку по условиям непроницаемости на верхней и нижней границах $V_n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, а интегралы

$$\int_{l_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \ln\frac{1}{r_{MP}} ds \quad \text{и} \quad \int_{l_2} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \ln\frac{1}{r_{MP}} ds$$

в силу (6) взаимно уничтожаются, из (3) получим следующую формулу Грина для представления $\varphi(x, y)$ в области течения:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r_{MP}}) ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_2} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r_{MP}}) ds , \tag{7}$$

а из (5) – следующее граничное интегральное уравнение для граничных значений φ

$$\varphi(M) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r_{MP}}) ds - \frac{1}{\pi}\int_{C_2} \varphi \frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r_{MP}}) ds . \tag{8}$$

Уравнение (8) является однородным, поскольку из физической постановки гидродинамической задачи значение φ заранее неизвестно, и максимум что может быть задано дополнительно – это скорость U_1 на входе в канал (то есть $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x\to-\infty}=U_1$) или расход $Q=U_1h_1$. Из уравнения (8) видно, что если φ_0 является его решением, то и $\varphi=A\varphi_0$, где A – произвольная константа, тоже является решением, что соответствует тому факту, что в канале возможно гидродинамическое течение с любой скоростью на входе.

Таким образом, для решения однородного уравнения (8) можно выставить дополнительное условие нормировки

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x\to-\infty}=1, \tag{9}$$

однако даже при этом условии трудно представить себе такую численную процедуру, которая позволила бы найти единственное решение этого однородного уравнения.

Рассмотрим теперь попытку получения граничных интегральных уравнений исходя из формулы Коши. Именно, если в области (D) с границей C задана аналитическая функция f(z), то её значение в области может быть выражено через граничные значения в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{10}$$

где точка ζ принадлежит границе C и $f(\zeta)$ – значение функции на границе.

Для рассматриваемой выше задачи о течении жидкости в канале с твёрдыми стенками выберем в качестве аналитической функции $f(z)$ производную комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz}=v_x-iv_y.$$

Для неё будем иметь формулу Коши (10):

$$v_x-iv_y=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(v_x-iv_y)_C\,d\xi}{\xi-z}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что и здесь соответствующие интегралы по l_1 и l_2 в силу (6) взаимно уничтожаются и формула (11) сводится к виду

$$v_x-iv_y=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1+C_2}\frac{(v_x-iv_y)_C\,d\xi}{\xi-z}. \tag{12}$$

Интересно, что для твёрдых участков границы, которые мы здесь только и рассматриваем, по условию непроницаемости имеем

$$(v_x-iv_y)d\xi=ve^{-i\theta}dse^{i\theta}=vds=v_\tau ds, \tag{13}$$

где v_τ – касательная компонента скорости на элементах границ вдоль направления обхода. Таким образом,

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_2}\frac{v_\tau ds}{\xi - z}\,, \tag{14}$$

и, соответственно, имеем граничное интегральное уравнение

$$V_x - iV_y = \frac{1}{\pi i}\iint_{C_1+C_2}\frac{V_\tau dS}{\xi - z}\,, \tag{15}$$

где точка наблюдения М имеет координату z и расположена или на C_1, или C_2. Поскольку касательная компонента скорости v_τ заранее на границах нигде не известна, то интегральные члены в (15) заранее не могут быть определены. Умножим левую и правую часть выражения на $e^{i\theta_M}$, где θ_M – угол наклона касательной в точке М. В силу условия непроницаемости получим тождество

$$v_\tau(M) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{C_1+C_2}\frac{v_\tau ds}{\xi - z}\right)\cos\theta_M - \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{C_1+C_2}\frac{v_\tau ds}{\xi - z}\right)\sin\theta_M\,, \tag{16}$$

где $v_\tau(M) = v_x(M)\cos\theta_M + v_y(M)\sin\theta_M$, которое, хотя и обязано выполняться для граничных значений аналитической функции, но в силу его однородности непригодно для численного определения касательной компоненты скорости v_τ на границах области.

С другой стороны, в качестве исходной функции рассмотрим функцию тока $\psi(x,y)$. Пользуясь очевидной асимптотикой

$$\psi(x,y)_{x\to-\infty} = U_1 y, \cdots \psi(x,y)_{x\to+\infty} = U_2 y\,,$$

где U_1 и U_2 связаны условием (6), нетрудно доказать, что интегралы по упомянутым отрезкам l_1 и l_2 взаимно компенсируют друг друга при $R\to\infty$, так что формула Грина для функции ψ будет

$$\psi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1+C_2}\left\{\ln\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right\}ds\,, \tag{17}$$

а граничное интегральное уравнение –

$$\psi(M) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1}\left\{\ln\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right\}ds + \\ +\frac{1}{\pi}\int_{C_2}\left\{\ln\frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_{MP}}\right\}ds, \tag{18}$$

где точка М принадлежит или границе C_1, или границе C_2.

Выражение (18) может быть с успехом использовано в качестве конструктивного интегрального уравнения. В самом деле, на границах C_1 и C_2 функция ψ известна, причём на C_1 можно положить $(\psi)_{C_1} = 0$, а на C_2: $(\psi)_{C_2} = Q$, где Q расход через рассматриваемый канал. Величина $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$, входящая в (18), на нижней гра-

нице имеет смысл $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{C_1} = -v_s$, а на верхней границе $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{C_2} = v_s$. Далее, на C_2:

$$\frac{\partial}{\partial n}(\ln\frac{1}{r_{MP}}) = -\frac{1}{r}\cos(\theta_{MP} - \beta_{MP}),$$

где θ_{MP} - угол вектора $\overline{MP}$ с выбранной осью абсцисс, β_P угол внешней нормали $\vec{n}_P$ к контуру C_2 в точке Р по отношению к оси x.

Применив формулу (18) к точке М, принадлежащей C_1 или C_2, получим следующее интегральное уравнение для определения касательной скорости v_s на нижней и верхней сторонах контура

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_1} v_s(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}ds - \frac{1}{\pi}\int_{C_2} v_s(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}ds = F(M), \tag{19}$$

где интегрирование совершается вдоль кривых C_1 и C_2 от левого конца к правому.

При этом, если точка $M \in C_1$, то

при $P \in C_1$: $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_н(x) - f_н(x_0))^2}$.

при $P \in C_2$: $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_в(x) - f_н(x_0))^2}$.

и $$F(M) = \frac{Q}{\pi}\int_{C_2}\frac{\cos(\theta_{MP} - \beta_P)ds}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f_в(x) - f_н(x_0))^2}}.$$

Если $M \in C_2$, то

при $P \in C_1$: $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_н(x) - f_в(x_0))^2}$.

при $P \in C_2$: $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_в(x) - f_в(x_0))^2}$.

и $$F(M) = -Q\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_{C_2}\frac{\cos(\theta_{MP} - \beta_P)ds}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f_в(x) - f_в(x_0))^2}}\right\}.$$

Уравнение (19), является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, и хотя его решение предоставляет известные трудности, оно, в принципе, позволяет найти распределение касательной скорости v_s на границах области, а затем, при помощи формулы Грина (17) распределение функции тока и компоненты скорости во всей области течения. В противоположность этому использование формулы (8) для потенциала течения не приводит к конструктивному интегральному уравнению.

Выводы. В работе показано, что использование формул Грина в качестве источника получения граничных интегральных уравнений для решения задач теории потенциала, в частности, задач гидромеханики, не всегда приводит к конструктивным уравнениям, позволяющим организовать вычислительный процесс. В некоторых случаях формулы Грина приводят только к тождествам, которые не могут быть использованы в качестве интегральных уравнений.

Библиографические ссылки

1. **Кочин Н.Е.** Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М., 1956. – 560 с.
2. **Лаврентьев М.А.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М., 1965. – 716 с.
3. **Гуревич М.И.** Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. – М., 1961. – 302 с.
4. **Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М., 1953. – 680 с.

Надійшла до редколегії 22.12.10

УДК 621.479

Л.И. Кныш, В.И. Давыдов
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ОБЛУЧЕННОСТИ ТРУБЧАТОГО ПРИЕМНИКА ТЕПЛА В СОСТАВЕ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАБОЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КОНЦЕНТРАТОРОМ

Розроблено методику визначення теплових потоків на поверхні лінійного та трубчатого приймача сонячного випромінювання, що знаходиться у фокусі параболоциліндричного концентратора. Проведено чисельні експерименти, що виявили основні закономірності процесу, пов'язані, головним чином, з вибором геометрії системи. Показано задовільний збіг результатів чисельного та експериментального досліджень.

Ключові слова: сонячна енергетична система, параболоциліндричний концентратор, теплоприймач.

Разработана методика по определению тепловых потоков на поверхности линейного и трубчатого приёмника солнечного излучения, который находится в фокусе параболоцилиндрического концентратора. Проведены численные эксперименты, выявившие основные закономерности процесса, связанные, главным образом, с выбором геометрии системы. Показано удовлетворительное совпадение результатов численного и экспериментального исследований.

Ключевые слова: солнечная энергетическая система, параболоцилиндрический концентратор, теплоприемник.

A method for determination of heat flows on the surface of linear and tube solar receiver, which located in the focus of cylindrical parabolic concentrator, is developed. The numerical experimentations have revealed fundamental regularities of the process. These regularities connected with selection of system geometry. Satisfactory fit of results numerical and experimental investigations are demonstrated.

Key words: solar power system, cylindrical parabolic concentrator, heat receiver.

Введение. В настоящие время на Украине существуют объективные причины, стимулирующие развитие различных энергосберегающих технологий, а также установок, использующих нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. Перспективным направлением крупномасштабного использования солнечной энергии можно считать интегрирование в энергетическую систему региона солнечных энергетических станций (СЭС) на базе параболоцилиндрических концентраторов (ПЦК). Именно в этом направлении развивается мировая солнечная энергетика.