

2. Рузова Т. А. Компьютерная обработка кинограмм процесса взаимодействия газовых струй с жидкостью / Т. А. Рузова, А.П. Толстопят, А.Ф. Шевченко, С.А. Шевченко // *Наук. вісник Нац. гірнич. ун-ту.* – 2007. – № 12. – С. 91–96
3. Рузова Т.А. Компьютерная обработка видеоизображений газовых пузырей в жидкости / Т.А. Рузова, В.И. Елисеев, А.П.Толстопят, Л.А. Флер. // *Оптические методы исследования потоков : Труды IX междунар. научно-технич. конф.* – М., 2007. – С.48–49.
4. *Numerical Recipes In C : The Art Of Scientific Computing* / W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. – Cambridge University Press, 1993. – 967 p.
5. Явойский В.И. Теория продувки сталеплавильной ванны / В.И. Явойский, Г.А. Дорофеев, И.А. Повх. – М., 1974. – 495 с.
6. Охотский В.Б. Физико-химическая механика сталеплавильных процессов / В.Б. Охотский. – М., 1993. – 151 с.
7. Рэлей Дж. В. Теория звука. Т. II. / Дж. В. Рэлей. – М.-Л., 1944. – 476 с.
8. Левич В.Г. Физико-химическая гидромеханика / В.Г. Левич. – М., 1959. – 670 с.
9. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л., 1985. – 248 с.
10. Рудзит Я.А. Основы метрологии, точность и надежность в приборостроении / Я.А. Рудзит, В.Н. Плуталов. – М., 1991. – 304 с.
11. Бойченко Б.М. Конвертерное производство стали: теория, технология, качество стали, конструкция аппаратов, рециркуляция металлов и экология / Б.М. Бойченко, В.Б. Охотский, П.С. Харлашин. – Дніпропетровськ, 2006. – 454 с.
12. Елисеев В.И. О возможных причинах попадания расплава металла внутрь дутьевого канала фурмы / В.И. Елисеев, А.П. Толстопят, Л.А. Флер // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка.* – 2006, № 2/1. – С. 106–112.

Надійшла до редколегії 08.11.10

УДК 532.516

В.И. Елисеев, В.В. Давидсон

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ИОНООБМЕН В ДИСПЕРСИОННЫХ СРЕДАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННОГО НАПРЯЖЕНИЯ**

У рамках теорії іонообміну розглянуто завдання про розповсюдження електричного струму в гетерогенних середовищах, що складаються з твердих пористих тіл і рідких електролітів. На основі виконаних експериментів і теоретичних рішень отримані залежності амплітуд реактивних і активних струмів від частоти і величини напруги, що подається.

*Ключові слова: дисперсні середовища, іонообмін, змінний струм в гетерогенних середовищах, залежність струму від частоти і амплітуди напружень.*

В рамках теории ионообмена рассмотрена задача о распространении электрического тока в гетерогенных средах, состоящих из твердых пористых тел и жидких электролитов. На основе выполненных экспериментов и теоретических решений получены зависимости амплитуд реактивных и активных токов от частоты и величины подаваемого напряжения.

*Ключевые слова: дисперсные среды, ионообмен, переменный ток в гетерогенных средах, зависимость тока от частоты и амплитуд напряжений.*

The problem of electric alternating current propagation in heterogeneous mediums consisting of solid porous bodies and liquid electrolytes is considered in terms of ion interchange theory. On the basis of experiments and theoretical solutions dependences of active and reactive current amplitudes from frequencies and supplied voltage have been received.

*Key words: disperse medium, ion exchange, alternatively current in heterogeneous medium, variation of current with respect to frequency and amplitude of voltage.*

**Введение.** Электрические методы измерения широко используются для проведения качественного и количественного анализа различных дисперсных сред [1]. Их отличает повышенная точность, быстродействие, возможность регистрации и обработки результатов в режиме реального времени, а также, в случае необходимости, пространственное разнесение датчиков и измерительной аппаратуры при исследовании опасных и агрессивных сред. Вместе с тем для косвенных измерений, каковыми в данном случае являются электрические измерения, существует проблема интерпретации экспериментальных результатов, то есть выявление связей между непосредственно наблюдаемыми величинами, такими как токи, напряжения, сопротивления и емкости, с физико-химическими характеристиками вещества. Несмотря на огромное число работ, посвященных данному вопросу [2], проблема интерпретации, ввиду сложности и многообразия одновременно происходящих процессов, далека от полного разрешения. Необходимо также отметить, что основная часть работ посвящена изучению электрохимических процессов на постоянном токе, в то время как значительно более сложные по механизму и интересные в прикладном плане процессы на переменном токе изучены недостаточно. Данная работа является попыткой в какой-то мере восполнить этот пробел. В [3] в рамках теории массообмена в электрохимических средах рассмотрена задача о распространении электрического тока в электрохимической ячейке под действием гармонического напряжения. В данной работе на основе феноменологической теории полученные ранее результаты обобщаются на гетерогенные дисперсные среды.

**Постановка задачи.** В рамках феноменологической модели, считая плотность раствора постоянной, выпишем одномерные нестационарные уравнения бинарного ионообмена в поровом пространстве

$$\frac{\partial \alpha_G N}{\partial t} = D_{eff}^{H_2O} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) + r + s_{GT} q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^+}{\partial t} = D_{eff}^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + r^+ + s_{GT} q^+, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^-}{\partial t} = D_{eff}^- \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N^-}{\partial x} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial x} \right) + r^- + s_{GT} q^-, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G \phi_G)}{\partial x^2} - s_{GT} \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G E_{GT} = \alpha_G F (N^- - N^+), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 (\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T \phi_T)}{\partial x^2} - s_{GT} \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T E_{GT} = 0, \quad (5)$$

где  $t$  – время;  $x$  – продольная координата;  $N, N^+, N^-$  – мольные концентрации, соответственно, воды, положительных ионов и отрицательных ионов;  $\alpha_G$  – объемная доля жидкости;  $s_{GT}$  – удельная внутренняя поверхность;  $\gamma$  – отношение эффективной подвижности иона и его эффективного коэффициента диффузии;  $\phi_G, \phi_T$  – электрические потенциалы, соответственно, в жидкости и в твердом теле;



$r, r^+, r^-$  – величини, описывающие объемные реакции;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума;  $\epsilon_{eff}^G, \epsilon_{eff}^T$  – эффективные коэффициенты диэлектрических постоянных соответственно, жидкости и твердого тела;  $E_{GT}$  – напряженность на внутренней границе жидкой фазы.

Вводя безразмерные величины:  $\tau = t/T, \zeta = x/h$  ( $T$  – масштаб времени;  $h$  – линейный масштаб, полуширина рабочей ячейки), перепишем уравнения (1) – (5) в следующем виде

$$\frac{\partial \alpha_G N}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) + Tr + Ts_{GT}q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^+}{\partial \tau} = d^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + Tr^+ + Ts_{GT}q^+, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^-}{\partial \tau} = d^- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + Tr^- + Ts_{GT}q^-, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_G}{\partial \zeta^2} - s_{GT} E_{GT} = \Phi (N^- - N^+), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_T}{\partial \zeta^2} - s_{GT} E_{TG} = 0, \quad (10)$$

где  $d^+ = \frac{D_{eff}^+}{D_{H2O}^{eff}}, d^- = \frac{D_{eff}^-}{D_{H2O}^{eff}}, T = \frac{h^2}{D_{eff}^{H2O}}, \Phi = \frac{\alpha_G F h^2}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G}$ .

Используя тот же самый прием, что и в однородной жидкости [3], получим следующие выражения для потоков ионов и для потенциала:

$$d^+ \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{d \overline{\alpha_G N^+}}{d \tau} - T r^+ - T s_{GT} \overline{q^+} \right) \zeta + C^+, \quad (11)$$

$$d^- \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{d \overline{\alpha_G N^-}}{d \tau} - T r^- - T s_{GT} \overline{q^-} \right) \zeta + C^-, \quad (12)$$

$$\phi_G = \frac{1}{2} \left[ \Phi (\overline{N^-} - \overline{N^+}) + s_{GT} \overline{E_{GT}} \right] \zeta^2 + C_G \zeta + D_G. \quad (13)$$

Как и ранее, из граничных условий при  $\zeta = -1$  (точка А) и  $\zeta = 1$  (точка В) будем иметь, что:

$$C_G = -a \sin(2\pi \overline{f} \tau) + \frac{1}{2} (j R_W + j_G^A R_{GE}^A + j_G^B R_{GE}^B),$$

$$C^+ = \frac{1}{2} (g_A^+ + g_B^+), \quad C^- = \frac{1}{2} (g_A^- + g_B^-); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\alpha}_G N^+}{d\tau} - T\overline{r}^+ - Ts_{GT}\overline{q}^+ &= \frac{1}{2}(g_B^+ - g_A^+), \\ \frac{d\overline{\alpha}_G N^-}{d\tau} - T\overline{r}^- - Ts_{GT}\overline{q}^- &= \frac{1}{2}(g_B^- - g_A^-), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $R_W$  – сопротивление внешней цепи;  $R_{GE}^A, R_{GE}^B$  – контактные сопротивления (сопротивления двойных слоев) в точках А и В;  $j_G^A, j_G^B$  – токи в жидкости на поверхностях электродов, соответственно в точках А и В;  $j$  – общий ток в цепи;  $g_A^-, g_B^-, g_A^+, g_B^+$  – потоки отрицательных и положительных ионов в точках А и В, соответственно;  $\overline{f} = fT$ ;  $f$  – частота, Гц. Для дисперсного тела вместо (13) будем иметь

$$\phi_T = \frac{1}{2} s_{GT} E_{GT} \zeta^2 + C_T \zeta + D_T, \quad (16)$$

при этом

$$C_T = -a \sin(2\pi \overline{f} \tau) + \frac{1}{2} (j R_W + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B), \quad (17)$$

где  $R_{TE}^A, R_{TE}^B$  – контактные сопротивления в точках А и В;  $j_T^A, j_T^B$  – токи в твердом теле в этих же точках. Составим теперь выражение для тока проводимости ( $S$  – площадь электрода):

$$\begin{aligned} j_{pr} &= -SF \frac{D^{H2O}}{h} \left[ \frac{d\overline{\alpha}_G N^+}{d\tau} - \frac{d\overline{\alpha}_G N^-}{d\tau} - T(\overline{r}^+ - \overline{r}^-) - Ts_{GT}(\overline{q}^+ - \overline{q}^-) \right] \zeta - \\ &+ SF \frac{D^{H2O}}{h} (C^+ - C^-) - S \frac{\sigma_{eff}^T}{h} (s_{GT} E_{GT} \zeta + C_T). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку на внутренних поверхностях токи равны, то есть  $\sigma_{eff}^T s_{GT} E_{GT} = FD_{eff}^{H2O} Ts_{GT} (\overline{q}^- - \overline{q}^+)$  и, принимая во внимание, что при  $\zeta = \pm 1$  токи должны быть одинаковы, то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\alpha}_G N^+}{d\tau} - \frac{d\overline{\alpha}_G N^-}{d\tau} - T(\overline{r}^+ - \overline{r}^-) &= 0, \\ Ts_{GT}(\overline{q}^- - \overline{q}^+) &= \frac{1}{2} [(g_B^+ - g_A^+) - (g_B^- - g_A^-)] \end{aligned} \quad (19)$$

и тогда

$$\begin{aligned} j_{pr} &= -SF \frac{D^{H2O}}{2h} [(g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-)] + \\ &+ S \frac{\sigma_{eff}^T}{h} \left[ a \sin(2\pi \overline{f} \tau) - \frac{1}{2} (j R_W + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Выпишем выражение для тока смещения

$$\begin{aligned}
 j_{sm} &= -S \frac{D^{H2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0}{h} \left[ \varepsilon_{eff}^G \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_G}{\partial \tau} \right) + \varepsilon_{eff}^T \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_T}{\partial \tau} \right) \right] = \\
 &= -S \frac{D^{H2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G}{h} \left\{ \Phi \left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) \zeta + \right. \\
 &+ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( R_W \frac{dj}{d\tau} + R_{TE}^A \frac{dj_G^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_G^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] \right\} - \\
 &- S \frac{D^{H2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( R_W \frac{dj}{d\tau} + R_{TE}^A \frac{dj_T^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_T^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] + \\
 &+ \varepsilon_0 S \frac{D^{H2O}}{h^2} \frac{s_{GT}}{h} \frac{d}{d\tau} \left( \varepsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \varepsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}} \right) \zeta
 \end{aligned} \tag{21}$$

Из граничных условий следует, что если нет поверхностных зарядов, то последнее выражение в круглых скобках равно нулю то есть

$$\varepsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \varepsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}} = 0, \tag{22}$$

тогда и

$$\left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) = 0, \tag{23}$$

после чего будем иметь

$$\begin{aligned}
 j_{sm} &= -S \frac{D^{H2O}}{h^3} \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T \right) R_W \frac{dj}{d\tau} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{eff}^G \left( R_{GE}^b \frac{dj_G^b}{d\tau} + R_{GE}^c \frac{dj_G^c}{d\tau} \right) + \varepsilon_{eff}^T \left( R_{TE}^b \frac{dj_T^b}{d\tau} + R_{TE}^c \frac{dj_T^c}{d\tau} \right) \right] - \\
 &\left. - \left( \varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T \right) 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right\}
 \end{aligned} \tag{24}$$

**Определение зависимости амплитуд токов от частоты и величины напряжения.** Для дальнейшего связывания токов с потенциалом необходимо ввести кинетические уравнения на границах рабочей области, описывающие электродные реакции. Как и в [3], введем в рассмотрение модельные кинетические соотношения, когда на одной границе в течении полупериода ионы  $N^-$  переходят в ионы  $N^+$ , на другой, наоборот. В этом случае можно положить, что

$$g_B^+ = -g_B^- = k_B (N_B^- - N_B^+), \quad g_A^+ = -g_A^- = k_A (N_A^- - N_A^+). \tag{25}$$

Из интегрирования (11) и (12) по всему отрезку  $(-1, +1)$  после несложных преобразований, с учетом (25) и граничного условия (19), можно получить



$$\begin{aligned} \left[ (g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-) \right] &= 8\gamma N_0 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} (\phi_B - \phi_A) + \\ + 2 \left\{ 2 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} \left[ \frac{d^- d^+ + (d^- + d^+) k_B}{d^- d^+ k_B} \right] - 1 \right\} & Ts_{GT} (\bar{q}^- - \bar{q}^+) \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношение (26) устанавливает связь между потоками зарядонесущих компонентов через поверхности электродов, внутренние поверхности гетерогенных сред внутри рабочего объема и разностью потенциалов на границах. Для полного определения этих потоков необходимо знать кинетические параметры на внутренних поверхностях, то есть  $\bar{q}^-$ ,  $\bar{q}^+$ . Здесь можно отметить, что для модельного кинетического процесса типа (25)  $\bar{q}^- - \bar{q}^+ = 0$ , в силу условия (23). Если положить в выражении (26)  $k_B = -k_A = k$ , то будем иметь, как и в [3]

$$g_A^+ + g_B^+ = 2\gamma N_0 \frac{[d^- d^+ + (d^- + d^+) k]}{d^- d^+ k} (\phi_B - \phi_A), \quad (27)$$

при этом второе слагаемое становится равным нулю. Как следует из (26) величины  $k_A$  и  $k_B$  могут лимитировать электроперенос в жидкости. При малых величинах этих коэффициентов первый член в (26) будет иметь порядок этих значений, второй, если  $\bar{q}^- - \bar{q}^+ \neq 0$ , может иметь различную величину. При больших значениях коэффициентов  $k_A$  и  $k_B$  с их ростом выражение в фигурных скобках стремится к нулю, поэтому величина второго слагаемого (26) зависит от кинетических параметров на поверхности гетерогенной структуры и от величины самой внутренней поверхности. Если реакционные процессы на внутренней поверхности значительно менее активны, чем на электродах, то процесс электропереноса определяется внутренней проводимостью этой жидкости, то есть

$$\left[ (g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-) \right] = 4\gamma \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} N_0 (\phi_B - \phi_A), \quad (28)$$

что соответствует (27) при  $k \rightarrow \infty$ . Объединяя активный и реактивный токи, будем иметь

$$\begin{aligned} j &= j_{pr} + j_{sm} = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^G \left[ a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{1}{2} (R_W j + j_G^A R_{GE}^A + j_G^B R_{GE}^B) \right] + \\ &+ \frac{S}{h} \sigma_{eff}^T \left[ a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{1}{2} (R_W j + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B) \right] - \\ &- \frac{S}{h} \frac{D_{eff}}{h^2} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G \left[ \frac{1}{2} R_W \frac{dj}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( R_{TE}^A \frac{dj_T^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_T^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] + \right. \\ &+ \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T \left[ \frac{1}{2} R_W \frac{dj}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( R_{GE}^A \frac{dj_G^A}{d\tau} + R_{GE}^B \frac{dj_G^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{S}{h} \frac{D_{eff}^{H_2O}}{h} FR_{GT} Ts_{GT} (\bar{q}^- - \bar{q}^+) \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\sigma_{eff}^G = 4D_{eff}^{H2O} F \gamma N_0 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1}$ ;  $j_G^A + j_T^A = j$ ,  $j_G^B + j_T^B = j$ ;

$$R_{GT} = \left\{ 2 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} \frac{[d^- d^+ + (d^- + d^+) k_B]}{d^- d^+ k_B} - 1 \right\}.$$

Для идеальной системы (отбрасывая входные и внешние сопротивления, пренебрегая процессами на внутренней поверхности) получим классическую форму, формально справедливую для диэлектриков

$$j = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^{\Sigma} a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{S}{h} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^{\Sigma} 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau), \quad (30)$$

из которой следует, что амплитуды для активного и реактивного токов равны соответственно

$$I_A = \sigma_{eff}^{\Sigma} \frac{S}{h} a, \quad I_R = \epsilon_0 \epsilon_{eff}^{\Sigma} 2\pi \bar{f} \frac{S}{h} a, \quad (31)$$

при этом

$$\sigma_{eff}^{\Sigma} = \sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T, \quad \epsilon_{eff}^{\Sigma} = \epsilon_{eff}^G + \epsilon_{eff}^T. \quad (32)$$

Интересным является вопрос о поверхностных зарядах. Если они присутствуют, то тогда

$$(\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \epsilon_0 \epsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}}) = \overline{q_S}, \quad (33)$$

при этом в силу равенства токов на границах вместо (22) будет иметь место равенство

$$\left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) = \frac{\alpha_T s_{GT}}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{dq_S}{d\tau}, \quad (34)$$

но тогда необходимо принять, что между токами при гетерогенных реакциях при наличии свободных зарядов возможен скачок

$$TFD_{eff} s_{GT} (\overline{q^+} - \overline{q^-}) = \sigma_{Teff} s_{GT} \overline{E_{GT}} + \frac{s_{GT}}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{dq_S}{d\tau}, \quad (35)$$

то есть появление поверхностных зарядов и их изменение связано с какой-то несогласованностью в передаче зарядов при прохождении гетерогенных реакций, такая возможность отмечается в [1; 4]. В [2] существование поверхностной проводимости связывается с наличием двойных электрических слоев. Интересно отметить, что это неравенство в токах проявляется в нестационарном случае. Теперь уравнение (29) без учета контактных сопротивлений на электродах можно записать как

$$j_{\Sigma} = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^{\Sigma} a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{S}{h} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^{\Sigma} 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) - s_{GT} \frac{S}{h} D_{eff}^{H2O} FR_{GT} \left[ T(\overline{q^-} - \overline{q^+}) + \frac{\alpha_G}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{dq_S}{d\tau} \right]. \quad (36)$$



Из выражения (36) видно, что, при нахождении амплитуд реактивного и активного токов необходимо учитывать величину в квадратных скобках, которая может быть представленной как  $B_S \sin(2\pi \bar{f} \tau) + 2\pi \bar{f} B_C \cos(2\pi \bar{f} \tau)$ . Это значит, что процессы, проходящие на гетерогенных поверхностях могут значительно изменять соотношения активных и реактивных токов и, соответственно, тангенс потерь и тангенс фазового сдвига. Как показано выше, для модельной реакции на электродах с увеличением ее скорости  $R_{GT} \rightarrow 0$ , что указывает на возможность изменения влияния этого члена на общую картину при подборе электродов.

Согласно современным представлениям массообмена в поровом пространстве дисперсной среды  $D_{eff} = D \frac{\alpha_G}{\ell_G^2}$ , где  $D$  – молекулярный коэффициент диффузии;  $\ell_G$  – коэффициент извилистости, что приводит суммарный коэффициент эффективной проводимости  $\sigma_{eff}^{\Sigma} = \sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T$  при  $\sigma_{eff}^T = 0$  к виду

$$\sigma_{eff}^{\Sigma} = \overline{\alpha_G} \frac{\sigma_G}{\ell_G^2}. \quad (37)$$

В расчетах массообменных процессов величина извилистости играет важную роль, поэтому зависимость вида (37) имеет большое значение для определения этой величины. В [1; 5] даны формулы для расчета эффективной проводимости жидкости с непроводящими электрический ток включениями при различных объемных концентрациях этих включений. Приведенные там формулы (Рунге (III.7), Фрике (III.9), Машовца (III.10) в [5]) дают возможность определить извилистость  $\ell_G$ .

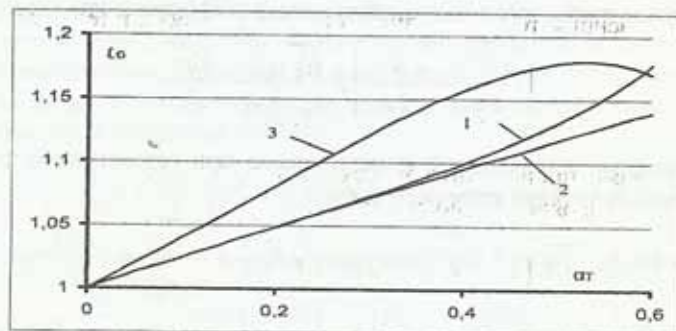


Рис. 1. Изменение извилистости  $\ell_G$  в зависимости от объемной доли дисперсной фазы  $\alpha_T$ : 1 – по формулам (III.7); 2 – (III.9); 3 – (III.10), взятым из [5]

На рис. 1 показаны кривые, получающиеся при расчете по этим формулам. Проведенные нами эксперименты по определению порозности и электропроводности воды с песком и стеклянными шариками с помощью переменного тока с частотой 1000 Гц показали, что для плотной нерегулярной укладки величина  $\ell_G = 1.158$  при  $\alpha_G = 0.446$  (стеклянные шарики) и  $\ell_G = 1.141$  при  $\alpha_G = 0.323$ ,  $\ell_G = 1.058$  при  $\alpha_G = 0.33$  (речной песок), то есть полученные значения извилистости лежат примерно по середине между величинами, получаемыми из приведенных в [5] формул.



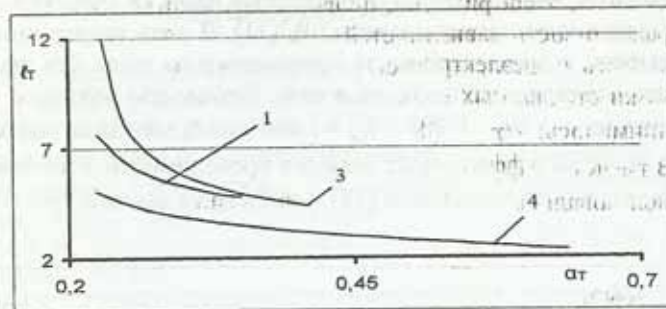


Рис. 2. Изменение извилистости  $\ell_T$  в зависимости от объемной доли дисперсной фазы  $\alpha_T$ : 1 – из экспериментов [6]; 2 – по данным [7] (рис. 5 кривая 1); 3 – [7] (рис. 5 кривая 2)

Вид выражений (32), (37) диктует, что и в общем случае такие параметры как электропроводимость, коэффициент диэлектрической проницаемости и коэффициент теплопроводности для связанных гетерогенных сред без контактных сопротивлений могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{eff}^{\Sigma} = (\sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \sigma_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \sigma_T, \quad \varepsilon_{eff}^{\Sigma} = (\varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \varepsilon_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \varepsilon_T,$$

$$\lambda_{eff}^{\Sigma} = (\lambda_{eff}^G + \lambda_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \lambda_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \lambda_T. \quad (38)$$

Используя результаты экспериментов по эмульгированию мазута [6], а также данные из [7], можно найти из соотношений (38) величины  $\ell_T$  в зависимости от  $\alpha_T$ . Представляя извилистость для жидкости в виде линейной зависимости  $\ell_G = 1 + p\alpha_T$ , где коэффициент  $p$  в соответствии с рис. 1 примем равным 0.3 найдем извилистость для дисперсной фазы (кривые представлены на рис. 2).

В области примерно до некоторого значения зависимости (38) имеют формальный характер, так как система дисперсных включений может быть несвязной. Согласно фрактальной теории связности [8] для объемных систем она наступает при  $\alpha_T \approx 0,31$  (таблица 1.2, задача узлов). Расчеты по определению  $\ell_T$ , проведенные по таблице 3.2 работы [9] также показали, что разброс в значениях этой величины достаточно большой, хотя порядок такой же, как и на рис. 2: Отличие одних величин от других, возможно, возникает из-за наличия дополнительных контактных сопротивлений. В [9] приведены критические замечания по поводу линейности зависимостей вида (38), однако нам представляется, что для идеальных систем такие зависимости могут быть полезными.

**Выводы.** Полученные зависимости свидетельствуют о сложности рассматриваемых процессов, ввиду многообразия форм гетерогенных включений, в связи с этим попытки электрических измерений и установления электродинамических характеристик сред часто наталкиваются на неоднозначность получаемых параметров. Тем не менее, такие измерения получили широкое распространение, так как при тщательной подготовке могут давать нужные оценки необходимых величин.

В частности, эксперименты, проведенные нами со стеклянными шариками, показали справедливость зависимостей (30), (31). В этих экспериментах определялись проводимость и диэлектрическая проницаемость воды без шариков, а затем плотной засыпки стеклянных шариков в воде. Результаты показаны на рис. 3, 4. В расчетах принималось:  $\alpha_T = 0.387$ ,  $\ell_G = 1.096$ , которые также находились из эксперимента. В расчетах эффективных величин проводимости и диэлектрической постоянной использовались выражения (38) и найденные оценки  $\ell_T$ .

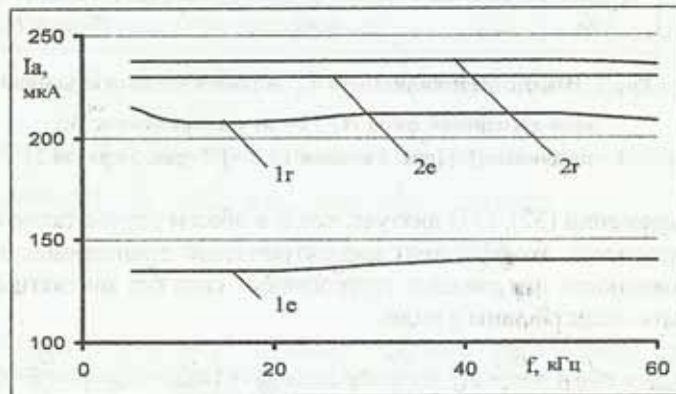


Рис. 3. Амплитуда активного тока в среде вода-стеклянные шарики: 1e, 2e – эксперимент; 1r, 2r – расчет

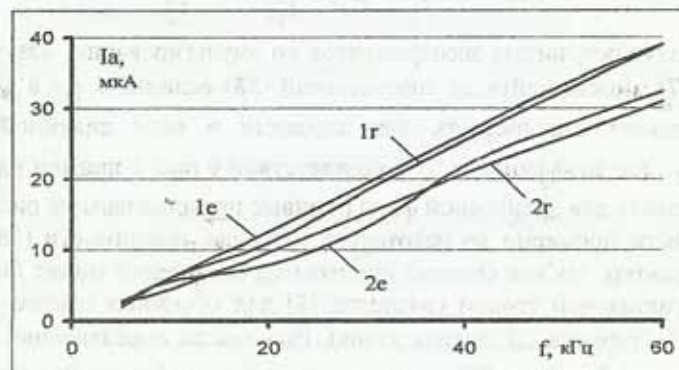


Рис. 4. Амплитуда реактивного тока в среде вода-стеклянные шарики: 1e, 2e – эксперимент; 1r, 2r – расчет

Из литературы известно, что при таких частотах, при которых проводились эксперименты (более килогерца), двойными слоями (одна из составляющих контактных сопротивлений) можно пренебречь, что дает возможность получить оценки величин активных и реактивных токов среды. Графики показывают, что активный ток в соответствии с (30) практически постояен, хотя в разных экспериментах и отличается один от другого. Реактивный же ток также в соответствии с формулой (30) практически линейно зависит от частоты. Полученные результаты известны в теории диэлектриков, однако с точки зрения теории массообмена в электрохимических ячейках они показывают справедливость математической модели в поровых пространствах дисперсных сред.



### Библиографические ссылки

1. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов / Б.М. Тареев. – М., 1982. – 320 с.
2. Духин С.С. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах / С.С. Духин, В.Н. Шилов. – Киев, 1973. – 203 с.
3. Елисеев В.И. Массообмен в электрохимической ячейке, находящейся в поле переменного напряжения // В.И. Елисеев, В.В. Давидсон // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 135–145.
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Часть третья / К.М. Поливанов. – М., 1969. – 352 с.
5. Перепелкин К.Е. Газовые эмульсии / К.Е. Перепелкин, В.С. Матвеев – Л., 1979. – 200 с.
6. Давидсон В.В. Автоматическое регулирование величины водности водомазутных эмульсий / В.В. Давидсон, А.П. Толстопят, Л.А. Флеер // Пробл. высокотемп. техники. – 2002, ДНУ. – С. 49–50.
7. Корягин В.А. Сжигание водотопливных эмульсий и снижение вредных выбросов / В.А. Корягин. – СПб, 1995. – 304 с.
8. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов / М.И. Кулак – Мн., 2002. – 304 с.
9. Дульнев Г.Н. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга / Г.Н. Дульнев, Ю.П. Заричняк. – Л., 1974. – 264 с.

Надійшла до редколегії 08.11.10

УДК 539.3:620.198

В. А. Шевчук

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины имени  
Я.С. Подстригача*

### РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛАХ С ТОНКИМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Розвинуто підхід для наближеного розв'язування задач термопружності для тіл з багатопшаровими тонкими покриттями, який ґрунтується на застосуванні математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного сопряження тіла з середовищем через покриття. Ці умови дають можливість істотно спростити розрахунок термонапруженого стану системи «тіло-покриття». Ефективність використаного підходу показано порівнянням результатів, отриманих на його основі, з точним розв'язком тестової задачі про термонапружений стан циліндра з  $n$ -шаровим покриттям.

*Ключові слова: багатопшарові покриття, термопружні напруження, узагальнені умови термопружного сопряження.*

Разработан подход для приближенного решения задач термоупругости для тел с многослойными тонкими покрытиями, основанный на применении математической модели с обобщенными граничными условиями термомеханического сопряжения тела со средой через покрытие. Эти условия дают возможность существенно упростить расчет термонапряженного состояния системы «тело-покрытие». Эффективность использованного подхода показана сравнением результатов, полученных при его использовании, с точным решением тестовой задачи о термонапряженном состоянии цилиндра с  $n$ -слойным покрытием.

*Ключевые слова: многослойные покрытия, термоупругие напряжения, обобщенные условия термоупругого сопряжения.*

An approximate approach to the solution of thermoelasticity problems for the bodies having thin multilayered coverings is worked out. It is based on the application of mathematical model with