

### Библиографические ссылки

1. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов / Б.М. Тареев. – М., 1982. – 320 с.
2. Духин С.С. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах / С.С. Духин, В.Н. Шилев. – Киев, 1973. – 203 с.
3. Елисеєв В.И. Массообмен в электрохимической ячейке, находящейся в поле переменного напряжения // В.И. Елисеєв, В.В. Давидсон // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 135–145.
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Часть третья / К.М. Поливанов. – М., 1969. – 352 с.
5. Перепелкин К.Е. Газовые эмульсии / К.Е. Перепелкин, В.С. Матвеев – Л., 1979. – 200 с.
6. Давидсон В.В. Автоматическое регулирование величины водности водомазутных эмульсий / В.В. Давидсон, А.П. Толстопят, Л.А. Флеер // Пробл. высокотемп. техники. – 2002, ДНУ. – С. 49–50.
7. Корягин В.А. Сжигание водотопливных эмульсий и снижение вредных выбросов / В.А. Корягин. – СПб, 1995. – 304 с.
8. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов / М.И. Кулак – Мн., 2002. – 304 с.
9. Дульнев Г.Н. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга / Г.Н. Дульнев, Ю.П. Заричняк. – Л., 1974. – 264 с.

Надійшла до редколегії 08.11.10

УДК 539.3:620.198

В. А. Шевчук

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины имени  
Я.С. Подстригача*

### РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛАХ С ТОНКИМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Розвинуто підхід для наближеного розв'язування задач термопружності для тіл з багат шаровими тонкими покриттями, який ґрунтується на застосуванні математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного сопряження тіла з середовищем через покриття. Ці умови дають можливість істотно спростити розрахунок термонапруженого стану системи «тіло-покриття». Ефективність використовуваного підходу показано порівнянням результатів, отриманих на його основі, з точним розв'язком тестової задачі про термонапружений стан циліндра з *n*-шаровим покриттям.

*Ключові слова:* багат шарові покриття, термопружні напруження, узагальнені умови термопружного сопряження.

Разработан подход для приближенного решения задач термоупругости для тел с многослойными тонкими покрытиями, основанный на применении математической модели с обобщенными граничными условиями термомеханического сопряжения тела со средой через покрытие. Эти условия дают возможность существенно упростить расчет термонапряженного состояния системы «тело-покрытие». Эффективность использованного подхода показана сравнением результатов, полученных при его использовании, с точным решением тестовой задачи о термонапряженном состоянии цилиндра с *n*-слойным покрытием.

*Ключевые слова:* многослойные покрытия, термоупругие напряжения, обобщенные условия термоупругого сопряжения.

An approximate approach to the solution of thermoelasticity problems for the bodies having thin multilayered coverings is worked out. It is based on the application of mathematical model with

generalized boundary conditions determined by termomechanical matching of the body with external environment through the coverings. These conditions open the possibility to simplify sufficiently the calculation of thermostresses in the system «body-covering». The efficiency of the used approach is demonstrated by comparison of results, obtained with its application to the results, obtained from exact solution of test problem about thermostress conditions of cylinder with n-layered coverings.

*Key words:* multilayered coverings, thermal stresses, generalized condition of thermoelastic mat-ching.

**Введение.** Для защиты элементов конструкций от влияния агрессивной среды используются специальные покрытия, обычно имеющие неоднородные свойства, что связано с условиями их изготовления или функциональными требованиями. Такие покрытия могут иметь кусочно-однородные свойства, то есть являться многослойными.

Обычно расчет термомеханического состояния тел со слоистыми покрытиями связан с формулированием и решением соответствующих задач математической физики для многослойных систем [7; 10; 11; 13; 14].

Точные решения таких задач громоздки и неэффективны для практических целей и обычно используются как эталонные. Поэтому важно разрабатывать приближенные методики, достаточно точные для практических потребностей.

Предложены различные подходы [10; 12; 13], учитывающие специфическую особенность таких систем – малость толщины покрытия в сравнении с толщиной подложки – при расчете температурных напряжений в телах с покрытиями. Один из таких эффективных подходов состоит в моделировании влияния тонкостенных элементов конструкций специальными граничными условиями [4; 5; 8; 9]. Он существенно упрощает решение задач определения термонапряженного состояния конструкций с тонкими покрытиями.

В данной статье обобщение граничных условий для многослойных покрытий [9] получено для случая термоупругости. Вместе с обобщенными граничными условиями для теплопереноса [8] они позволяют формулировать и решать задачи определения температурных напряжений при нестационарных тепловых процессах. Вывод обобщенных граничных условий механического сопряжения тела со средой через тонкое многослойное покрытие проведен на основе применения уравнений теории термоупругости тонких многослойных оболочек [1; 3], использующей априорное предположение о линейной зависимости перемещений по всей толщине покрытия.

Эффективность подхода проиллюстрирована на примере решения тестовой задачи.

**Постановка задачи термоупругости.** Исследуемый объект – тело с многослойным покрытием толщины  $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ , слои которого изготовлены из различных

изотропных материалов. При этом  $n$ -слойное покрытие рассматриваем как тонкую оболочку, отнесенную к триортогональной смешанной системе координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ , которые являются соответственно линиями главных кривизн поверхности раздела тело-покрытие и нормалью к ней (рис. 1).

Принимаем, что на границе покрытие-среда задан вектор напряжений

$$\sigma_3^n = \sigma_3^c \quad \text{при } \gamma = \gamma_n = \sum_{i=1}^n \delta_i = \delta, \quad (1)$$

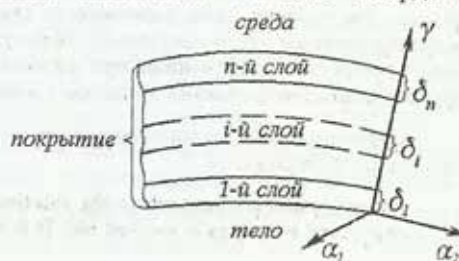


Рис. 1. Схема к постановке задачи

а на поверхностях контакту слоев покрытия и покрытия с телом выполняются условия идеального механического контакта

$$U_i = U_{i-1} \text{ при } \gamma = \gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i = \overline{2, n}, \quad U_1 = U_T \text{ при } \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_3^i = \sigma_3^{i-1} \text{ при } \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad \sigma_3^1 = \sigma_3^T \text{ при } \gamma = \gamma_0 = 0. \quad (3)$$

Тут и далее индексы  $i, T$  и  $C$  относятся к  $i$ -му слою покрытия, телу и среде соответственно;  $\sigma_3$  – вектор напряжений, действующий на поверхности  $\gamma = const$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3$ ;  $e_1, e_2, e_3$  – орты координатного триэдра на базисной поверхности  $S_0$  оболочки;  $\delta_i, U_i$  – толщина и вектор перемещений точек  $i$ -го слоя ( $i = \overline{1, n}$ );  $U_T = u_T e_1 + v_T e_2 + w_T e_3$  – значение вектора перемещений точек тела (подложки) на поверхности контакта с покрытием.

Распределение изменения температуры  $t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$  в  $n$ -слойном покрытии считается заданным. Оно может быть определено по методике, изложенной в [8].

Уравнения равновесия слоистой оболочки при отсутствии массовых сил при учете контактных условий (3) и условия (1) записываются в виде [3]:

$$C\xi = B, \quad (4)$$

$$\xi = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}]^T, \quad B = [q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, 0]^T,$$

$$q_j = \sigma_{j3}^C(1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2) - \sigma_{j3}^T \quad j=1,2,3, \quad m_j = \delta \sigma_{j3}^C(1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2) \quad j=1,2,$$

где  $C$  – матрица дифференциальных операторов:

$$C = \frac{1}{A_1 A_2} \begin{pmatrix} -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_{1,2} & k_1 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\cdot)) & k_2 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 \\ -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\cdot)) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\partial_2(A_1(\cdot)) & -A_{2,1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k_1 A_1 A_2 & 0 & -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_1 A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 A_1 A_2 & -\partial_2(A_1(\cdot)) & 0 & A_1 A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1(A_2(\cdot)) & A_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\cdot)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\cdot)) & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_2(A_1(\cdot)) & -A_{2,1} & -k_2 \end{pmatrix}^T;$$

$\xi$  – вектор-столбец усилий и моментов, возникающих в покрытии;  $A_1, A_2$  – параметры Ламе,  $k_1, k_2$  – кривизны координатных линий базисной поверхности  $S_0$ ;  $A_{j,l} = \partial A_j / \partial \alpha_l$ ,  $\partial_j = \partial / \partial \alpha_j$ ,  $j, l = 1, 2$ ; скобки  $(\cdot)$  обозначают расположение операнда в соответствующих выражениях; символ  $T$  – знак транспонирования.

**Обобщенные граничные условия механического сопряжения.** Исключая в уравнениях (4) перерезывающие силы и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости (с учетом  $k_1 \delta, k_2 \delta \ll 1$ ), представим их в трансформированном виде

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^T - F_j [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H] = \sigma_{j3}^C & j=1,2, \\ \sigma_{33}^T - F_3 [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H] = \sigma_{33}^C + \frac{\delta}{A_1 A_2} (\partial_1 (A_2 \sigma_{13}^C) + \partial_2 (A_1 \sigma_{23}^C)), \end{cases} \quad (5)$$

где  $S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$ ,  $H = (M_{12} + M_{21}) / 2$ ,  $F_j$  – некоторые дифференциальные операторы [9].

Принимая кинематическую гипотезу недеформируемых нормалей для всего пакета  $n$ -слойной оболочки [1] (что обеспечивает, в частности, автоматическое выполнение условий контакта для перемещений (2)), запишем соотношения термоупругости с учетом нормальных поперечных напряжений в виде

$$\theta = K\varepsilon - \theta_t + \theta_q, \quad (6)$$

$$\theta = [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H]^T, \quad \theta_t = [N_t, N_t, 0, M_t, M_t, 0]^T,$$

$$\theta_q = [N_q, N_q, 0, M_q, M_q, 0]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^T,$$

$$N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i, \quad M_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*, \quad T_i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i d\gamma, \quad T_i^* = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i \gamma d\gamma,$$

$$N_q = C_1 \sigma_{33}^C + C_2 \sigma_{33}^T, \quad M_q = D_1 \sigma_{33}^C + D_2 \sigma_{33}^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & G_{21} & G_{22} & 0 \\ G_{12} & G_{11} & 0 & G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} & 0 & 0 & 2G_{23} \\ G_{21} & G_{22} & 0 & G_{31} & G_{32} & 0 \\ G_{22} & G_{21} & 0 & G_{32} & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 & 2G_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G_{j1} \\ G_{j2} \\ G_{j3} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \nu_i \\ \frac{1 - \nu_i}{2} \end{bmatrix} (\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j).$$

Тут  $K$  – матрица упругих констант;  $\varepsilon$  – вектор-столбец компонент деформаций базисной поверхности;  $\theta$  – вектор-столбец усилий и моментов в покрытии;  $\theta_q$  – вектор-столбец величин (усилий и моментов), учитывающих нормальные поперечные напряжения в оболочке покрытия (выражения для констант  $C_1, C_2, D_1, D_2$  приведены в [9]);  $\theta_t$  – вектор-столбец величин, учитывающих тепловые деформации в покрытии;  $E_i, \nu_i, \beta_i$  – модуль Юнга, коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения  $i$ -го слоя покрытия ( $i = \overline{1, n}$ ), соответственно.

Подставляя выражения (6) и геометрические соотношения между компонентами деформации отсчетной поверхности подложка-покрытие и перемещениями этой поверхности

$$\varepsilon = \Pi [u_1, v_1, w_1]^T \quad \text{при } \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (7)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} & k_1 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} & k_2 \\ \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \left( \frac{\cdot}{A_1} \right) & \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \left( \frac{\cdot}{A_2} \right) & 0 \\ \frac{k_1}{A_1} \partial_1(\cdot) & \frac{k_2 A_{1,2}}{A_1 A_2} & -\frac{1}{A_1} \partial_1 \left( \frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} \right) - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2^2} \partial_2(\cdot) \\ \frac{k_1 A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{k_2}{A_2} \partial_2(\cdot) & -\frac{1}{A_2} \partial_2 \left( \frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} \right) - \frac{A_{2,1}}{A_1^2 A_2} \partial_1(\cdot) \\ k_1 \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \left( \frac{\cdot}{A_1} \right) & k_2 \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \left( \frac{\cdot}{A_2} \right) & -\frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_1 \partial_2(\cdot) - \frac{A_{1,2}}{A_1} \partial_1(\cdot) - \frac{A_{2,1}}{A_2} \partial_2(\cdot) \right) \end{bmatrix}$$

в уравнения равновесия (5) и учитывая непрерывность перемещений на поверхности тело-покрытие (2), получим соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^T - \frac{C_2}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^T + L_{j1} u_T + L_{j2} v_T + L_{j3} w_T = \sigma_{j3}^C + \frac{C_1}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^C - \frac{1}{A_j} \partial_j N_l, \quad j=1,2, \\ (1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^T + L_{31} u_T + L_{32} v_T + L_{33} w_T = (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C, \\ -\frac{\delta}{A_1 A_2} \left[ (A_{2,1} + A_2 \partial_1) \sigma_{13}^C + (A_{1,2} + A_1 \partial_2) \sigma_{23}^C \right] - \Delta M_l + (k_1 + k_2) N_l, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_1 \left( \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \right) + \partial_2 \left( \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \right) \right)$ ,  $L_{jl}$  — некоторые дифференциальные операторы [9].

Поскольку соотношения (8) связывают компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на границе тела с компонентами заданной поверхностной нагрузки, то их можно трактовать как обобщенные граничные условия для механических переменных тела, которые учитывают влияние тепловых деформаций в многослойном покрытии и, таким образом, обобщают граничные условия, полученные в [9].

**Случай отсутствия изгибных деформаций и кручения поверхности раздела «тело-покрытие».** Для частного случая напряженно-деформированного состояния, при котором отсутствуют изгибные деформации и кручение поверхности раздела тело-покрытие ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$ ), можно получить упрощенный вариант обобщенных граничных условий, содержащих только компоненты тензора напряжений.

В этом случае, в силу непрерывности тангенциальных деформаций вдоль поверхности раздела тело-покрытие ( $\varepsilon_1 = e_{11}^T$ ,  $\varepsilon_2 = e_{22}^T$ ,  $\varepsilon_{12} = 2e_{12}^T$ ), усилия и моменты в покрытии можно выразить только через граничные значения тензора деформации тела

$$\theta = K [e_{11}^T, e_{22}^T, 2e_{12}^T, 0, 0, 0]^T - \theta_t + \theta_q. \quad (9)$$

Подстановка соотношений (9) в уравнения равновесия (5) с учетом соотношений Дюгамеля-Неймана для тела

$$e_{jl} = \frac{1 + \nu_T}{E_T} \sigma_{jl} - \frac{\nu_T}{E_T} \sigma_{ll} \delta_{jl} + \beta_T t \delta_{jl} \quad (10)$$

(где  $\delta_{jl}$  – символ Кронекера,  $E_T$ ,  $\nu_T$ ,  $\beta_T$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного температурного расширения тела) приводит к условиям:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma_{j3}^T + p_{j1} \sigma_{11}^T + p_{j2} \sigma_{22}^T + p_{j3} \sigma_{33}^T + p_{j4} \sigma_{12}^T - \frac{G_{11} + G_{12}}{A_j} \beta_T \partial_j t_T = \\ & = \sigma_{j3}^C + \frac{C_1}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^C - \frac{1}{A_j} \partial_j N_t \quad j=1,2, \\ & (1 + p_{33}) \sigma_{33}^T + p_{31} \sigma_{11}^T + p_{32} \sigma_{22}^T + p_{34} \sigma_{12}^T - \\ & \quad - (G_{21} + G_{22}) \beta_T \Delta t_T + (G_{11} + G_{12}) \beta_T (k_1 + k_2) t_T = \\ & (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C - \frac{\delta}{A_1 A_2} \left[ (A_{2,1} + A_2 \partial_1) \sigma_{13}^C + (A_{1,2} + A_1 \partial_2) \sigma_{23}^C \right] + (k_1 + k_2) N_t, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где  $p_{jl}$  – некоторые дифференциальные операторы [9],  $t_T$  – граничное значение температуры на поверхности раздела «тело-покрытие».

**Определение термонапряженного состояния в покрытии.** После нахождения напряженно-деформированного состояния тела на основе уравнений трехмерной теории упругости и использования одного из вариантов обобщенных граничных условий (8) или (11), интегральные усилия и моменты по всему покрытию могут быть определены соотношениями (6) (при учете (7) и (2)). Таким же образом могут быть вычислены усилия и моменты в каждом из слоев покрытия по формулам:

$$\theta^i = K_i \varepsilon - \theta_t^i + \theta_q^i \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\theta^1 = [N_1^i, N_2^i, S^i, M_1^i, M_2^i, H^i]^T, \quad \theta_t^1 = [N_t^i, N_t^i, 0, M_t^i, M_t^i, 0]^T,$$

$$\theta_q^i = [N_q^i, N_q^i, 0, M_q^i, M_q^i, 0]^T, \quad N_t^i = \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i, \quad M_t^i = \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*$$

$$N_q^i = C_1^i \sigma_{33}^C + C_2^i \sigma_{33}^T, \quad M_q^i = D_1^i \sigma_{33}^C + D_2^i \sigma_{33}^T.$$

Выражения для коэффициентов матрицы  $K_i$  и констант  $C_1^i$ ,  $C_2^i$ ,  $D_1^i$ ,  $D_2^i$  приведены в [9].

В случае отсутствия изгибных деформаций и кручения поверхности раздела тело-покрытие ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$ ) напряжения в покрытии определяются формулами

$$\sigma_{33}^i(\gamma) = \frac{\sigma_{33}^C + \sigma_{33}^T}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\delta} \right) \left( 3 - \left( 1 - \frac{2\gamma}{\delta} \right)^2 \right) \frac{\sigma_{33}^C - \sigma_{33}^T}{2}.$$

$$\sigma_{jj}^i(\gamma) = \frac{E_i}{E_T(1-\nu_i^2)} \left[ (1-\nu_i\nu_T)\sigma_{jj}^T + (\nu_i-\nu_T)\sigma_{ll}^T - \nu_T(1+\nu_i)\sigma_{33}^T \right] + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{33}^i(\gamma) + \frac{E_i}{1-\nu_i}(\beta_T t_T - \beta_i t_i(\gamma)), \quad (13)$$

$$\sigma_{12}^j = \frac{E_i(1+\nu_T)}{E_T(1+\nu_i)}\sigma_{12}^T, \quad j=1,2, \quad l=3-j, \quad 0 < \gamma < \delta,$$

которые следуют из представления касательных тангенциальных напряжений в покрытии через деформации, нормальных тангенциальных напряжений – через деформации и нормальные поперечные напряжения согласно [1], использования условий непрерывности тангенциальных деформаций на поверхности раздела тело-покрытие и соотношений Дюгамеля-Неймана.

**Методика решения.** Таким образом, методика определения термонапряженного состояния системы тело-многослойное покрытие состоит из двух этапов:

- 1) решение неклассической краевой задачи для тела с использованием одного из представленных вариантов обобщенных граничных условий;
- 2) определение температурных напряжений в покрытии формулами восстановления через граничные значения компонент тензора напряжений тела, заданную поверхностную нагрузку и с учетом температурной деформации.

**Тестовая задача термоупругости для цилиндра с многослойным покрытием.** Как тестовый пример, рассмотрим задачу определения остаточных напряжений в сплошном цилиндре радиуса  $R$  с  $n$ -слойным покрытием под действием равномерного теплового нагрева  $t_C$ . Считаем, что цилиндр закреплен по торцам от осевых перемещений и отсутствует внешнее нагружение. В этом случае третье обобщенное граничное условие (11) примет вид (первые два удовлетворяются тождественно) при  $r = R$

$$\left(1 - \frac{\nu_T(G_{11} + G_{12})}{RE_T}\right)\sigma_{rr}^T + \frac{G_{12} - \nu_T G_{11}}{RE_T}\sigma_{zz}^T + \frac{G_{11} - \nu_T G_{12}}{RE_T}\sigma_{\theta\theta}^T = \frac{G_\alpha - (G_{11} + G_{12})\beta_T}{R}t_T, \quad (14)$$

где  $t_T$  равно заданному значению изменения температуры  $t_C$ ,  $G_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i \delta_i}{1 - \nu_i}$ .

Используя представление для напряжений в виде [6]

$$\sigma_{rr}^T(r) = a + \frac{b}{r^2} - \frac{E_T \beta_T}{(1-\nu_T)r^2} \int_0^r t r dr, \quad \sigma_{\theta\theta}^T(r) = a - \frac{b}{r^2} + \frac{E_T \beta_T}{(1-\nu_T)r^2} \int_0^r t r dr - \frac{E_T \beta_T t}{(1-\nu_T)},$$

учитывая условия  $\sigma_{rr}^T|_{r=0} \neq \infty$  и  $\varepsilon_{zz} \equiv 0$ , соотношения Дюгамеля-Неймана (10) и обобщенное граничное условие (14), в итоге находим приближенное решение задачи в цилиндре

$$\sigma_{rr}^T = \sigma_{\theta\theta}^T = \frac{t_T [G_\alpha - (1+\nu_T)\beta_T G_{11}]}{Rh}, \quad \sigma_{zz}^T = 2\nu_T \sigma_{rr}^T - E_T \alpha_T t_T, \quad (15)$$

$$\text{где } h = 1 + \frac{G_{11}(1 - \nu_T - 2\nu_T^2)}{RE_T}.$$

Подставляя выражения (15) в (13), находим напряжения в покрытии ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$\sigma_{rr}^i = \frac{\sigma_{rr}^T}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{r-R}{\delta} \right) \left( 3 - \left( 1 - 2 \frac{r-R}{\delta} \right)^2 \right) \right], \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{E_i \beta_T t_T}{1 - \nu_i} \left[ \frac{(1 + \nu_T) \left( 1 + \frac{(1 - 2\nu_T) G_\alpha}{RE_T \alpha_T} \right)}{(1 + \nu_i) h} - \frac{\beta_i}{\beta_T} \right] + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{rr}^i, \quad (17)$$

$$\sigma_{zz}^i = \frac{E_i \beta_T t_T}{1 - \nu_i} \left[ \frac{\nu_i (1 + \nu_T) \left( 1 + \frac{(1 - 2\nu_T) G_\alpha}{RE_T \beta_T} \right)}{(1 + \nu_i) h} - \frac{\beta_i}{\beta_T} \right] + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{rr}^i. \quad (18)$$

Точное аналитическое решение данной задачи, полученное аналогично подходу [2], имеет вид для  $0 \leq \rho \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\rho) &= \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1 - \nu_T)} [X_1(\rho)(P - \Phi_2(\rho)) + X_2(\rho)\Phi_1(\rho)], \\ \sigma_{\theta\theta}(\rho) &= \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1 - \nu_T)} [Y_1(\rho)(P + \Phi_2(\rho)) + Y_2(\rho)\Phi_1(\rho)] - \frac{E(\rho)\beta(\rho)\mu(\rho)}{1 - \nu(\rho)}, \\ \sigma_{zz}(\rho) &= \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1 - \nu_T)} [Z_1(\rho)(P - \Phi_2(\rho)) + Z_2(\rho)\Phi_1(\rho)] - \frac{E(\rho)\beta(\rho)\mu(\rho)}{1 - \nu(\rho)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$X_1(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 + (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] a_i \right\},$$

$$X_2(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ \frac{2\nu(\rho) - 1}{\rho^2} + \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 + (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] b_i \right\},$$

$$Y_1(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 - (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] a_i \right\},$$

$$Y_2(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ \frac{1 - 2\nu(\rho)}{\rho^2} + \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 - (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] b_i \right\},$$

$$Z_1(\rho) = 2\lambda(\rho) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) a_i \right\}, \quad Z_2(\rho) = 2\lambda(\rho) \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) b_i,$$



$$\Phi_1(\rho) = t_T \sum_{i=0}^n [S_+(\rho - \rho_{i-1}) - S_+(\rho - \rho_i)] \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{E_k \beta_k}{1 - 2\nu_k} (\rho_k^2 - \rho_{k-1}^2) \left( 1 - \sum_{j=1}^k a_j \right) + \frac{E_i \beta_i}{1 - 2\nu_i} (\rho^2 - \rho_{i-1}^2) \left( 1 - \sum_{j=1}^i a_j \right) \right\}$$

$$\Phi_2(\rho) = t_T \sum_{i=0}^n [S_+(\rho - \rho_{i-1}) - S_+(\rho - \rho_i)] \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{E_k \beta_k}{1 - 2\nu_k} (\rho_k^2 - \rho_{k-1}^2) \sum_{j=1}^k b_j + \frac{E_i \beta_i}{1 - 2\nu_i} (\rho^2 - \rho_{i-1}^2) \sum_{j=1}^i b_j \right\},$$

$$P = \Phi_2(1) - \Phi_1(1) \frac{X_2(1)}{X_1(1)}, \quad \lambda(\rho) = \frac{E(\rho)v(\rho)}{(1+v(\rho))(1-2\nu(\rho))}, \quad S_+(\rho - \rho_i) = \begin{cases} 0, & \rho \leq \rho_i, \\ 1, & \rho > \rho_i, \end{cases}$$

$$\rho = \frac{r}{R + \delta}, \quad r_i = R + \gamma_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad r_{-1} = 0, \quad E_0 = E_T, \quad \beta_0 = \beta_T, \quad \nu_0 = \nu_T,$$

$$a_i = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_i + d_i \rho_{j-1}^2), \quad b_i = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_j (c_i + d_i \rho_{j-1}^2),$$

$$c_i = \frac{1}{2(1-\nu_i)} \left( 1 - \frac{E_{i-1}(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{E_i(1+\nu_{i-1})(1-2\nu_{i-1})} \right), \quad d_i = \frac{1-2\nu_i}{2(1-\nu_i)\rho_{i-1}^2} \left( 1 - \frac{E_{i-1}(1+\nu_i)}{E_i(1+\nu_{i-1})} \right),$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Для количественного сравнения приближенного и точного решений в таблицах 1–3 приведены значения безразмерных межслойных окружных напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / (E_T \beta_T t_T)$ , рассчитанных по приближенным формулам (15) и (17) (в верхних строках) и по точным формулам (19) (в нижних строках) в зависимости от относительной толщины покрытия  $\delta / R$  (таблица 1), от относительной жесткости материала покрытия  $\psi = E_1 / E_T$  (таблица 2), от относительного коэффициента температурного расширения материала покрытия  $\omega = \beta_1 / \beta_T$  (таблица 3).

При этом в первом столбце показаны значения напряжений в теле  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T = \lim_{r \rightarrow R-0} \sigma_{\theta\theta}^T / (E_T \beta_T t_T)$ , а в следующих – граничные значения  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^i = \lim_{r \rightarrow R+\delta_i-\delta_{i+0}} \sigma_{\theta\theta}^i / (E_T \beta_T t_T)$  в  $i$ -м слое покрытия. При вычислениях принимались следующие значения параметров:  $n=3$ ,  $E_1 : E_2 : E_3 = 4 : 15 : 2$ ,  $\nu_T = 0.3$ ,  $\nu_1 = 0.2$ ,  $\nu_2 = 0.35$ ,  $\nu_3 = 0.4$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5\delta_3 = 0.25\delta$ ,  $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 1 : 2 : 4$ .

На основе сравнения приближенного и точного решений этой задачи установлено, что погрешность вычислений определяется лишь отношением толщины покрытия  $\delta$  к радиусу цилиндра  $R$  (не превышая 2.5% при  $\delta / R \leq 0.03$ ) и не зависит от соотношения жесткостных и теплофизических свойств покрытия и подложки.

Таблиця 1

Зависимость контактных напряжений от относительной толщины покрытия при  $\psi = 0.4$ ,  $\omega = 0.2$

$\delta / R$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.001	$-0.45648 \cdot 10^{-3}$ $-0.45612 \cdot 10^{-3}$	0.44145 0.44145	1.29853 1.29799	0.042648 0.042638
0.010	$-0.45509 \cdot 10^{-2}$ $-0.45155 \cdot 10^{-2}$	0.43954 0.43956	1.29303 1.28762	0.040777 0.040686
0.020	$-0.90713 \cdot 10^{-2}$ $-0.89309 \cdot 10^{-2}$	0.43743 0.43750	1.28696 1.27623	0.038710 0.038558
0.030	$-0.13561 \cdot 10^{-1}$ $-0.13255 \cdot 10^{-1}$	0.43534 0.43548	1.28093 1.26496	0.036658 0.036472
0.050	$-0.22452 \cdot 10^{-1}$ $-0.21599 \cdot 10^{-1}$	0.43119 0.43158	1.26899 1.24825	0.032593 0.032421

Таблиця 2

Зависимость контактных напряжений от относительной жесткости материала покрытия при  $\delta / R = 0.01$ ,  $\omega = 0.2$

$\psi$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.01	$-0.11415 \cdot 10^{-2}$ $-0.11316 \cdot 10^{-2}$	$0.11012 \cdot 10^{-1}$ $0.11013 \cdot 10^{-1}$	$0.32424 \cdot 10^{-1}$ $0.32288 \cdot 10^{-1}$	$0.10330 \cdot 10^{-2}$ $0.10306 \cdot 10^{-2}$
0.1	$-0.11406 \cdot 10^{-2}$ $-0.11317 \cdot 10^{-2}$	0.11007 0.11007	0.32401 0.32260	$0.10299 \cdot 10^{-1}$ $0.10275 \cdot 10^{-1}$
1	$-0.11320 \cdot 10^{-1}$ $-0.11232 \cdot 10^{-1}$	$0.10952 \cdot 10^1$ $0.10953 \cdot 10^1$	$0.32176 \cdot 10^1$ $0.32042 \cdot 10^1$	$0.99866 \cdot 10^{-1}$ $0.99657 \cdot 10^{-1}$
10	-0.10526 -0.10449	$0.10445 \cdot 10^2$ $0.10450 \cdot 10^2$	$0.30092 \cdot 10^2$ $0.29980 \cdot 10^2$	0.71055 0.71087
100	-0.61850 -0.61568	$0.76760 \cdot 10^3$ $0.76913 \cdot 10^3$	$0.18706 \cdot 10^3$ $0.18675 \cdot 10^3$	$-0.86358 \cdot 10^1$ $-0.85518 \cdot 10^1$

Таблиця 3

Зависимость контактных напряжений от относительного коэффициента теплового расширения материала покрытия при  $\delta / R = 0.01$ ,  $\psi = 0.4$

$\omega$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.01	$-0.82349 \cdot 10^{-2}$ $-0.81761 \cdot 10^{-2}$	0.53283 0.53285	$0.21650 \cdot 10^1$ $0.21582 \cdot 10^1$	0.29243 0.29210
0.1	$-0.64899 \cdot 10^{-2}$ $-0.64421 \cdot 10^{-2}$	0.48864 0.48866	$0.17520 \cdot 10^1$ $0.17458 \cdot 10^1$	0.17322 0.17301
1	$0.10961 \cdot 10^{-1}$ $0.10897 \cdot 10^{-1}$	$0.46781 \cdot 10^{-1}$ $0.46752 \cdot 10^{-1}$	$-0.23784 \cdot 10^1$ $-0.23780 \cdot 10^1$	$-0.10188 \cdot 10^1$ $-0.10179 \cdot 10^1$
10	0.18547 0.18429	$-0.43718 \cdot 10^1$ $-0.43723 \cdot 10^1$	$-0.43683 \cdot 10^2$ $-0.43617 \cdot 10^2$	$-0.12939 \cdot 10^2$ $-0.12927 \cdot 10^2$
100	$0.19305 \cdot 10^1$ $0.19183 \cdot 10^1$	$-0.48557 \cdot 10^2$ $-0.48563 \cdot 10^2$	$-0.45672 \cdot 10^3$ $-0.45600 \cdot 10^3$	$-0.13214 \cdot 10^3$ $-0.13202 \cdot 10^3$

**Выводы.** На основе полученных обобщенных граничных условий разработана методика расчета температурных напряжений в телах с многослойными тонкими покрытиями. Эта методика имеет такие преимущества:

- 1) существенное упрощение расчета и сокращение вычислительного времени;
- 2) возможность получения относительно простых аналитических решений практически важных задач, что позволяет давать качественную и количественную оценку механического состояния тел с покрытиями без громоздких вычислений. В то же время полученные обобщенные граничные условия могут использоваться как для аналитического решения (когда это возможно), так и для численного;
- 3) возрастание эффективности данного подхода при уменьшении толщины покрытия в сравнении с прямыми методами, применение которых без предварительных преобразований исходных задач в этом случае может быть осложнено.

### Библіографічні посилання

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М., 1972. – 446 с.
2. Вигак В. М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре / В. М. Вигак, А. М. Рингин // Матем. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 63-67.
3. Методы расчета оболочек, т.4. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Киев, 1981. – 544 с.
4. Пелех Б. Л. Приближенный метод решения задач теории упругости для тел с тонкими криволинейными покрытиями / Б. Л. Пелех, Ф. Н. Флейшман // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 5. – С. 36-41.
5. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук // Тепл. напряж. в элем. конструк. – 1967. – Вып. 7. – С. 227-233.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1975. – 576 с.
7. Третьяченко Г. Н. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий / Г. Н. Третьяченко, В. Г. Барило // Пробл. прочности. – 1993. – № 1. – С. 41-49.
8. Шевчук В. А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе тело-многослойное покрытие / В. А. Шевчук // Матер. 5-го Междунар. форума по тепломассообмену (24-28 мая 2004г.). – CD-ROM. Статья № 3-36, Минск, 10 с.
9. Шевчук В. А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями / В. А. Шевчук // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 136-150.
10. Elperin T. Photothermal reliability testing of a multilayer coating-substrate assembly: a theoretical approach / T. Elperin, G. Rudin // J. Electronic Packaging. – 1998. – Vol. 120. – P. 82-88.
11. Nusier S. Q. Transient residual stresses in thermal barrier coatings: analytical and numerical results / S. Q. Nusier, G. M. Newaz // ASME J. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 65. – P. 346-353.
12. Savula Ya. H. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures / Ya. H. Savula, I. I. Dyyak, V. V. Krevs // Computers and Mathematics with Applications. – 2001. – Vol. 42, iss. 8-9. – P. 1201-1216.
13. Suhir E. An approximate analysis of stresses in multilayered elastic thin films / E. Suhir // ASME J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 143-148.
14. Zhang X. C. Prediction of three-dimensional residual stresses in the multilayer coating-based systems with cylindrical geometry / X. C. Zhang, B. S. Xu, H. D. Wang, Y. Jiang, Y. X. Wu // Composites Science and Technology. – 2006. – Vol. 66. – P. 2249-2256.

Надійшла до редакції 27.12.10