

Выводы. Таким образом, в результате выполненных исследований разработан алгоритм и выполнено моделирование нагрева металла при постоянной производительности печи и различной толщине заготовки. Изменение толщины заготовки приводит к изменению времени нагрева, что, в соответствии с полученными результатами, может достигаться изменением времени пребывания металла в зонах печи. Это, в свою очередь, приводит к изменению скорости продвижения металла в печи. Изменение температурного режима приводит к изменению экономических показателей работы печи.

В дальнейшем планируется выполнить исследование на реальной методической печи не только при постоянной производительности, но и при переменной.

Библиографические ссылки

1. Ткаченко В.Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В.Н. Ткаченко. – К., 2008. – 244 с.
2. Розенгарт Ю.И. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / Ю.И. Розенгарт, Б.Б. Потапов, В.М. Ольшанский, А.В. Бородулин. – Киев: Донецк, 1986. – 296 с.
3. Казанцев Е.И. Промышленные печи / Е.И. Казанцев – М., 1975. – 368 с.
4. Найзабеков А.Б. Моделирование нагрева слябов в методических печах различной конструкции / А.Б. Найзабеков, В.А. Талмазан, Н.В. Ахметгалина // Сталь. – 2010. – №6. – С. 66–69.
5. Пульпинский В.Б. Разработка и внедрение энергосберегающего режима нагрева металла в проходных печах методического типа / В.Б. Пульпинский // Электронный журнал энергосервисной компании «Экологические системы». 2005. – №5. – С. 31–38.
6. Гинкул С.И. Моделирование нагрева металла при переменной массе заготовок в методической печи / С.И. Гинкул, А.Н. Лебедев, Ю.В. Подобед // Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу : матер. міжнар. наук. конф. – Д., 2010. – С. 115–118.
7. Мастрюков Б.С. Теория, конструкции и расчеты металлургических печей, т.2 / Б.С. Мастрюков – М., 1986. – 376 с.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М., – 1971. – 552 с.
9. Гинкул С.И. Тепломассообмен / С.И. Гинкул, В.И. Шелудченко, В.В. Кравцов, С.В. Палкина. – Донецк, 2006. – 298 с.

Надійшла до редколегії 27.12.10

УДК 519.6

Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

На базі аналізу математичної моделі тепломасопереносу в процесі метаболізму біологічного об'єкта розвинуто нову асимптотичну модель процесу росту біологічних структур. Запропоноване наближення проілюстроване декількома прикладами чисельного розв'язку.

Ключові слова: процес метаболізму в біологічному об'єкті, нова математична модель зросту біологічних структур.

На основе анализа математической модели тепломассопереноса в течение процесса метаболизма биологического объекта развивается новая асимптотическая математическая модель процессов роста биологических структур. Предложенная модель иллюстрируется несколькими примерами численного решения.

Ключевые слова: процесс метаболизма биологического объекта, новая математическая модель роста биологических структур.

On the base of analysis of mathematical models of heat and mass transfer during metabolism processes of biological object, a new asymptotic mathematical model of growth processes of biological structures is developed in the present paper. The proposed approach is illustrated by the several examples of numerical calculations.

Key words: metabolism process of biological object, a new mathematical model of growth of biological structures.

Общая постановка задачи и её актуальность. На современном этапе развития биотехнологий, медицины, сельского хозяйства и других областей человеческой деятельности, которые связаны с биологическими процессами, характерно значительное расширение спектра применяемых математических моделей. Математические модели в биологии применяются для моделирования биологических структур в целом, а также отдельных функций и процессов на разных уровнях организации живого: молекулярном, субклеточном, клеточном, органно-системном, организменном и популяционно-биоценотическом. Широкие возможности открывает использование математических моделей для описания физико-химических процессов, которые происходят в живых организмах во время их жизнедеятельности, то есть, для количественного описания процессов метаболизма.

Математические модели процессов метаболизма относятся к наиболее сложным объектам современного математического и численного моделирования. В настоящее время, несмотря на интенсивное развитие биологии, еще не построены полные математические модели, учитывающие индивидуальность живых организмов и позволяющие при сопоставлении результатов моделирования и результатов лабораторного биологического эксперимента добиться количественного соответствия.

Таким образом, математическое моделирование в биологии пока что ориентировано преимущественно на качественное объяснение процессов.

Среди математических моделей биологических процессов [1 – 9] следует особенно выделить математические модели тепломассообмена, поскольку биологические процессы по своей природе являются физико-химическими процессами, то есть, их характер и режим протекания определяются концентрациями соответствующих химических веществ и физическими условиями, в которых они протекают. Несмотря на некоторые ограничения подобного подхода, который не принимает во внимание биологические особенности объекта, он представляется наиболее предпочтительным путем построения соответствующих математических моделей, поскольку позволяет применять достаточно развитый математический аппарат теории тепломассообмена.

Проблема роста живых организмов является одной из фундаментальных проблем развития биологии. Помимо описания определенного этапа развития каждого живого организма, эта проблема связана с такими областями теоретической биологии, как старение организмов, регенерация органов и тканей, злокачественный рост, рост популяций и т. д. Знание закономерностей процессов роста чрезвычайно важно для практики, например, сельского хозяйства и медицины. Рост биоло-

гических структур представляет собой сложный процесс, который, как правило, обусловлен химическими, физическими и биологическими факторами.

Истоки исследования авторов. В [10] построены математические модели диффузионного типа для процессов тепломассообмена в биологических структурах, а также путем численного эксперимента показано, что нелинейность, присущая построенным моделям, может привести к гистерезисным явлениям и процессам самоорганизации в биологических структурах. Рассмотренная математическая модель является наиболее общей из математических моделей, использующихся в теоретической биологии и биофизике [2 – 7].

В [7; 8] проблема биологического роста трактуется как задача с подвижной границей, но в этих работах данную проблему рассматривали как задачу Стефана [12], но в [10] показано, что данная задача не является классической задачей Стефана, хотя между ними и существует определенная аналогия. В предшествующих работах также не учитывалось то, что процесс роста является достаточно медленным.

И только в [11] этот факт учтен и предложена асимптотическая по времени математическая модель процесса роста, а также построены аналитические решения для нулевого и первого приближений одномерной по пространству задачи. Благодаря полученному решению удалось исследовать зависимость скорости роста биологической структуры от концентрации питательных веществ. Существенным недостатком [11] являются существенные упрощения, например, рассмотрение ограничено одномерным по пространству случаем, что не представляет интереса с практической точки зрения.

Цель работы. Основной целью данной работы является развитие асимптотической математической модели процесса роста биологической структуры и разработка эффективных методов численного расчета процессов роста на основе вычислительной теории потенциала.

Актуальность данной работы обусловлена важностью задач определения темпов роста животных и растений для широкого круга биологических наук.

В основу работы положен асимптотический анализ [13; 14] процессов роста, основанный на идее быстрых (характерное время метаболизма) и медленных (характерное время роста) темпоральных переменных.

Полученные в данной работе результаты имеют принципиальное теоретическое значение для биологии и сельскохозяйственных наук.

Постановка задачи. Постановку задачи тепломассообмена в биологической структуре приведем согласно [10]. Рассмотрим область D_1 , заполненную некоторой биологической структурой, в простейшем случае однородной (недифференцированной) клеточной массой. Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем однородных клеточных структур. Клеточная масса в области D_1 , представляет собой пористую среду, в которой роль каркаса играют сами клетки, а роль пор – межклеточное пространство. Полагаем, что межклеточное пространство заполнено жидкостью, которая представляет собой сложный раствор питательных веществ и экскрементов клеток. Область D_1 полностью или частично окружена областью D_2 , заполненной аналогичным раствором, но не содержащей клеток. Особенностью процессов в описанной структуре является интенсивный тепломассообмен между каркасом и содержимым пор. Тогда математическая модель процессов тепломассообмена в описанной системе запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \Delta T_1 + q_{T_1}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_{i1}}{\partial \tau} = d_{i1} \Delta C_{i1} + q_{i1}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \Delta T_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_{i2}}{\partial \tau} = d_{i2} \Delta C_{i2}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где T_1 – температура в области D_1 (здесь и далее используется одностепенная модель, когда температуры внутри клеток и в межклеточном пространстве предполагаются одинаковыми); a_1 – коэффициент температуропроводности пористой среды; q_{T_1} – источник тепла, связанный с метаболизмом клеток; C_{i1} – концентрация i -ой компоненты в порах; d_{i1} – коэффициент диффузии i -ой компоненты в пористой среде; q_{i1} – источник (сток) i -ой компоненты в пористой среде, связанный с метаболизмом клеток; T_2 – температура в области D_2 ; a_2 – коэффициент температуропроводности раствора; C_{i2} – концентрация i -ой компоненты в области D_2 ; d_{i2} – коэффициент диффузии i -ой компоненты в области D_2 ; N – количество компонент, принимающих участие в процессе тепломассообмена; τ – время; Δ – оператор Лапласа.

Обозначим общую границу областей D_1 и D_2 через Γ , а другие части границы – через Γ_1 и Γ_2 , соответственно. На границах Γ_1 и Γ_2 поставим традиционные граничные условия первого рода:

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_{1e}, \quad C_{i1}|_{\Gamma_1} = C_{i1e}, \quad T_2|_{\Gamma_2} = T_{2e}, \quad C_{i2}|_{\Gamma_2} = C_{i2e}, \quad (5)$$

второго рода:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= g_{1e}, & d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= g_{i1e}, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= g_{2e}, & d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= g_{i2e}, \end{aligned} \quad (6)$$

или третьего рода:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \alpha_1 (T_1|_{\Gamma_1} - T_{1e}) &= 0, & d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \alpha_{i1} (C_{i1}|_{\Gamma_1} - C_{i1e}) &= 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} + \alpha_2 (T_2|_{\Gamma_2} - T_{2e}) &= 0, & d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} + \alpha_{i2} (C_{i2}|_{\Gamma_2} - C_{i2e}) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где T_{1e} , C_{i1e} , T_{2e} , C_{i2e} , g_{1e} , g_{i1e} , g_{2e} , g_{i2e} – суть известные функции; другие коэффициенты в граничных условиях (5) – (7) понимаются в обычном смысле.

Начальные условия будут иметь вид:

$$T_1(0) = T_{10}, \quad T_2(0) = T_{20}, \quad C_{i1}(0) = C_{i10}, \quad C_{i2}(0) = C_{i20}. \quad (8)$$

Функция, которая описывает интенсивность метаболизма – количественная оценка метаболизма – есть понятие абстрактное и, как правило, определяется по частоте делений клетки или по росту клеточной массы. Однако, процесс деления

клетки – это процесс дискретный с большим временем запаздывания, а в сложных клеточных структурах важную роль играет предыстория процесса (для случая быстрых изменений условий). То есть, интенсивность метаболизма трудно ввести как однозначную характеристику биологического процесса на основании проведенных измерений. Для количественного описания процесса метаболизма предположим существование функции интенсивности метаболизма $\omega(T_1, C_{i1})$, тогда соответствующие источниковые члены имеют величину:

$$q_{i1} = \sigma_i \omega, \quad q_{T_1} = \sigma_T \omega. \quad (9)$$

Функция ω определяется экспериментально. Возможные зависимости функции ω от температуры и концентраций химических веществ приведены и подробно проанализированы в [10].

Рассмотрим граничные условия на границе Γ . Очевидны условия:

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma}, \quad (10)$$

$$C_{i1}|_{\Gamma} = C_{i2}|_{\Gamma}, \quad (11)$$

которые могут быть дополнены, например, условиями четвертого рода;

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (12)$$

$$d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (13)$$

Условия (12), (13) отвечают случаю деления клеток во всей области D_1 . Однако, возможна и ситуация, когда деление клеток происходит только на границе Γ , тогда условие (12) сохраняется, а условие (13) следует заменить на следующее условие [10]:

$$d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad (14)$$

где $\frac{\partial n}{\partial \tau}$ – скорость продвижения границы (скорость роста биологической структуры); χ_i – коэффициент «расхода» i -ой компоненты в процессе роста биологической структуры. Отметим, что, несмотря на аналогичную форму, условие (14) не является условием Стефана, так как правая часть условия (14) определяется условиями деления, то есть, температурами и концентрациями и, возможно, их предысториями, таким образом, правая часть условия (14) задана. Это означает, что данная задача аналогична задаче о фазовом переходе с заданной скоростью движения границы фазового перехода, которая определена в рассматриваемой математической модели как функция от интенсивности метаболизма.

Обезразмерим краевую задачу (1) – (5), (8), (10) – (12) и (14). Введем безразмерные температуры и концентрации, полагая наличие двух характерных температур (T^* и T^{**}), и концентраций (C_i^* и C_i^{**}):

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T^*}{T^{**} - T^*}, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T^*}{T^{**} - T^*}. \quad (15)$$

$$\bar{C}_{i1} = \frac{C_{i1} - C_i^*}{C_i^{**} - C_i^*}, \quad \bar{C}_{i2} = \frac{C_{i2} - C_i^*}{C_i^{**} - C_i^*}. \quad (16)$$

Концентрації C_i^* і C_i^{**} підбирались таким образом, чтобы охарактеризовать изменение данной компоненты биомассы при регулярном метаболизме.

Введем также характерный линейный размер L . Тогда дифференциальные уравнения (1) – (4) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_{St}} f_{a1} St = \Delta^* \theta_1 + q_{T1}^*, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial \tau_{St}} f_{d_{i1}} St = \Delta^* \bar{C}_{i1} + q_{i1}^*, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau_{St}} f_{a2} St = \Delta^* \theta_2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial \tau_{St}} f_{d_{i2}} St = \Delta^* \bar{C}_{i2}, \quad (20)$$

а условие (14) запишется в виде

$$d_{i1}^* \frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial n^*} \Big|_{\Gamma} - d_{i2}^* \frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial n^*} \Big|_{\Gamma} = \chi_i \frac{\partial n^*}{\partial \tau_{St}}, \quad (21)$$

где $n^* = \frac{n}{L}$, $d_{i1}^* = \frac{d_{i1}}{d}$, $d_{i2}^* = \frac{d_{i2}}{d}$.

Определяющий процесс диффузии, параметрами которого являются d, C_i^*, C_i^{**} , выбирался таким образом, чтобы обеспечить как малость числа Стефана, так и малость соответствующих коэффициентов при производных по времени в левых частях уравнений (17) – (20), τ_{St} – безразмерное стефановское время, которое имеет вид:

$$\tau_{St} = \frac{d(C_i^{**} - C_i^*) \cdot \tau}{\sigma L^2}, \quad (22)$$

$$q_{T1}^* = \frac{q_{T1} L^2}{a_1}, \quad q_{i1}^* = \frac{q_{i1} L^2}{d_{i1}}, \quad (23)$$

$$f_{a1} = \frac{d}{a_1}, \quad f_{a2} = \frac{d}{a_2}, \quad f_{d_{i1}} = \frac{d}{d_{i1}}, \quad f_{d_{i2}} = \frac{d}{d_{i2}}. \quad (24)$$

В качестве числа Стефана будем рассматривать

$$St = \frac{\tau_{St}}{Fo_d}, \quad (25)$$

где $Fo_d = \frac{\tau \cdot d}{L^2}$. Значком «*» в операторе Лапласа обозначено дифференцирование

по безразмерным координатам:

$$X^* = \frac{x}{L}, Y^* = \frac{y}{L}, Z^* = \frac{z}{L}. \quad (26)$$

Обезразмеренные аналоги граничных и начальных условий имеют вид:

$$\theta_1|_{\Gamma_1} = \theta_{1e}, \quad \theta_2|_{\Gamma_2} = \theta_{2e}, \quad (27)$$

$$\bar{C}_{i1}|_{\Gamma_1} = \bar{C}_{i1e}, \quad \bar{C}_{i2}|_{\Gamma_2} = \bar{C}_{i2e}, \quad (28)$$

$$\theta_1(0) = \theta_{10}, \quad \theta_2(0) = \theta_{20}. \quad (29)$$

$$\bar{C}_{i1}(0) = \bar{C}_{i10}, \quad \bar{C}_{i2}(0) = \bar{C}_{i20}. \quad (30)$$

В дальнейшем знаки, указывающие на обезразмеривание, будем опускать.

Применим метод малого параметра согласно [13; 14], тогда температуры θ_1 и θ_2 , и концентрации \bar{C}_{i1} и \bar{C}_{i2} будем искать в виде рядов:

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_1^k = \theta_1^0 + St^1 \theta_1^1 + St^2 \theta_1^2 + \dots + St^n \theta_1^n + \dots, \quad (31)$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_2^k = \theta_2^0 + St^1 \theta_2^1 + St^2 \theta_2^2 + \dots + St^n \theta_2^n + \dots,$$

$$\bar{C}_{i1} = \bar{C}_{i1}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \bar{C}_{i1}^k = \bar{C}_{i1}^0 + St^1 \bar{C}_{i1}^1 + St^2 \bar{C}_{i1}^2 + \dots + St^n \bar{C}_{i1}^n + \dots, \quad (32)$$

$$\bar{C}_{i2} = \bar{C}_{i2}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \bar{C}_{i2}^k = \bar{C}_{i2}^0 + St^1 \bar{C}_{i2}^1 + St^2 \bar{C}_{i2}^2 + \dots + St^n \bar{C}_{i2}^n + \dots$$

Подставив разложения (31) и (32) в уравнения (17) – (20) и приравнявая члены при одинаковых степенях St , получаем последовательность эллиптических краевых задач:

$$\Delta \theta_1^0 = -q_{T1}, \quad (33)$$

$$\Delta \bar{C}_{i1}^0 = -q_{i1}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (34)$$

$$\Delta \theta_2^0 = 0, \quad (35)$$

$$\Delta \bar{C}_{i2}^0 = 0, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (36)$$

при этом в первом приближении получим:

$$\Delta \theta_1^1 = f_{a1} \frac{\partial \theta_1^0}{\partial \tau}, \quad (37)$$

$$\Delta \bar{C}_{i1}^1 = f_{d_{i1}} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial \tau}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (38)$$

$$\Delta \theta_2^1 = f_{a2} \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \tau}, \quad (39)$$

$$\Delta \bar{C}_{i2}^1 = f_{d_{i2}} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^0}{\partial \tau}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (40)$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \theta_1|_{\Gamma_1} = \theta_{1e}, \quad \bar{C}_{i1}|_{\Gamma_1} = \bar{C}_{i1e}, \quad \theta_2|_{\Gamma_2} = \theta_{2e}, \quad \bar{C}_{i2}|_{\Gamma_2} = \bar{C}_{i2e}, \\ \theta_1^1|_{\Gamma_1} = 0, \quad \bar{C}_{i1}^1|_{\Gamma_1} = 0, \quad \theta_2^1|_{\Gamma_2} = 0, \quad \bar{C}_{i2}^1|_{\Gamma_2} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим отдельно условие продвижение границы роста и ее начальное положение

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V, \quad (42)$$

где $V = \frac{\partial n}{\partial \tau_{St}}$. Подставив (32) в выражение (42) и приравнявая члены при одинаковых степенях St , получим

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^0, \quad (43)$$

где $V^0 = \chi \omega (C_i^0)$,

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^1, \quad (44)$$

где $V^1 = \chi \omega (C_i^0 + St \cdot C_i^1) - \chi \omega (C_i^0)$,

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^i. \quad (45)$$

Зададим начальное положение границы в виде

$$\Gamma(\tau = 0) = \Gamma_0, \quad (46)$$

где Γ_0 – известная кривая.

Чтобы проиллюстрировать предложенный подход, рассмотрим нулевое приближение для плоского случая.

Осуществим в системе (33) – (36) переход к интегральному аналогу [15; 16], в результате получим:

$$\begin{aligned} W(X_0) \theta_1^0(X_0) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \theta_1^0}{\partial n} ds - \\ - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \theta_1^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds + \int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q_{T_1} dx dy, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} W(X_0) \bar{C}_{i1}^0(X_0) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial n} ds - \\ - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \bar{C}_{i1}^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds + \int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q_{i1} dx dy, \end{aligned} \quad (48)$$

$$W(X_0)\theta_2^0(X_0) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \theta_2^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \theta_2^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds, \quad (49)$$

$$W(X_0)\bar{C}_{i2}^0(X_0) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \bar{C}_{i2}^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \bar{C}_{i2}^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds. \quad (50)$$

где $W(X_0)$ – локальный коэффициент формы кривой

$$W(X_0) = \begin{cases} 1, X_0 \in D_1, \\ \frac{1}{2}, X_0 \in \Gamma, \\ 0, X_0 \notin D_1, X_0 \notin \Gamma, \end{cases} \quad (51)$$

ϕ_0 – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае

$$\phi(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}. \quad (52)$$

Система (47) – (50) сравнительно легко решается традиционным методом граничных элементов [15; 16]. Особенностью решения задачи в данном случае является граничное условие на границе Γ , то есть, границе роста. Если соответствующие потоки на Γ разрываются (поверхностный рост), то значение разрыва берется с предыдущего шага по времени, что соответствует запаздыванию в процессах роста. Что касается источников членов, которые входят в уравнения (47), (48), то во всех следующих расчетах будем считать метаболизм внутри ткани стационарным и постоянным в пространстве, то есть источники будем считать постоянными. Откуда

$$\int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q dx dy = q \int_{D_1} \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi_1 dx dy = q \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds, \quad (53)$$

где

$$\Delta \phi_1 = \phi_0, \quad (54)$$

то есть

$$\phi_1 = -\frac{r^2}{8\pi} (\ln r - 1). \quad (55)$$

Применим для численного решения полученных граничных интегральных уравнений метод граничных элементов, для чего поделим кривую, которая ограничивает область решения на части, таким образом, чтобы на каждой из них были заданы θ или $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ и C или $\frac{\partial C}{\partial n}$. Положим θ , $\frac{\partial \theta}{\partial n}$, C и $\frac{\partial C}{\partial n}$ на этих участках постоянными. Вынося их из-под знака интеграла, и записывая (47) – (50) для каждого участка кривой, получаем систему N уравнений, которая является дискретным аналогом (47) – (50) и решается любым методом решения систем линейных алгебраических уравнений.

Анализ полученных результатов. Скорость роста биологического объекта зависит не только от характера роста, но и от граничных условий. Если на внешней границе окружающей среды заданы концентрации питательного вещества, то по мере приближения границы растущей области к внешней границе окружающей среды возрастает концентрация питательного вещества на границе биологической

структуры, и скорость роста, соответственно, возрастает. С другой стороны, если на внешней границе задан поток питательного вещества, то по мере роста увеличивается потребление питательного вещества выросшей биологической структурой, и концентрация питательного вещества на границе уменьшается, то есть, соответственно уменьшается и скорость роста.

На рис. 1, 2 показаны численные решения задач роста в нулевом приближении для простых колоний одноклеточных организмов. Хорошо видно, что рост биологической структуры направлен в сторону наибольшей концентрации питательного вещества.

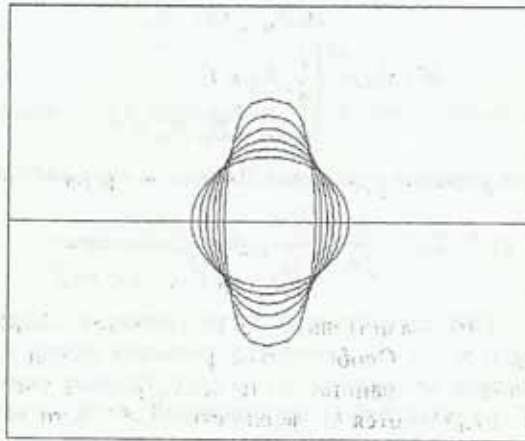


Рис. 1. Рост биологической структуры, изначально круглой, если питательные вещества подаются сверху и снизу

Таблица 1

Масса биологической структуры, рост которой показан на рис. 1.

| Моменты времени | Масса биологической структуры |
|-----------------|-------------------------------|
| 0 | 0,28378030 |
| 1 | 0,28792960 |
| 2 | 0,29541710 |
| 3 | 0,30700770 |
| 4 | 0,32328381 |
| 5 | 0,34431560 |
| 6 | 0,37013320 |
| 7 | 0,40161840 |

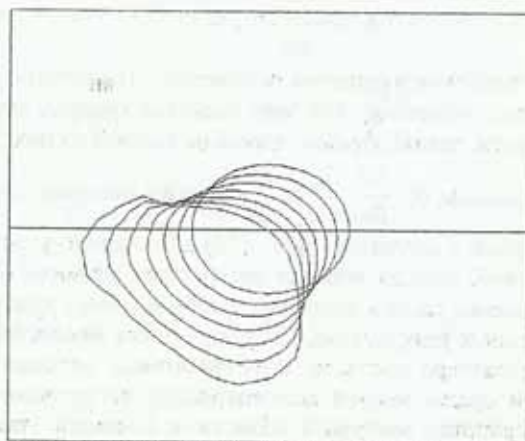


Рис. 2. Рост биологической структуры, изначально круглой, питательные вещества подаются слева и снизу

Таблиця 2

Масса биологической структуры, рост которой показан на рис. 2

| Моменты времени | Масса биологической структуры |
|-----------------|-------------------------------|
| 0 | 0,28751980 |
| 1 | 0,30294060 |
| 2 | 0,32969960 |
| 3 | 0,36981910 |
| 4 | 0,42709790 |
| 5 | 0,50863440 |
| 6 | 0,63095590 |

Неустойчивость границ биологических объектов достаточно часто наблюдается в биологии. Зачастую неустойчивость роста связана с негативными явлениями эволюции биологической структуры, например, возникновением и ростом опухолей. Рассмотрим вопрос о механизме неустойчивости роста биологической структуры в рамках модели поверхностного роста. Разумеется, здесь и далее под неустойчивостью процесса роста будем понимать не общеизвестную неустойчивость, связанную с возникновением катастроф, а просто явление увеличения скорости роста по мере процесса роста, не доводя рассмотрение до момента возникновения катастрофы, даже если таковая возможна, поскольку это нетипично для роста биологических структур.

В плоском случае подобная неустойчивость имеет место при задании на внешних границах окружающей среды постоянной концентрации питательного вещества.

В целом же, причиной неустойчивости роста с биологической точки зрения является увеличение скорости роста по мере приближения к источнику питательных веществ.

На рис.3, 4 показан неустойчивый рост биологической структуры ускоренного роста с деградацией ткани.

В заключение хотелось бы отметить, что для многокомпонентных систем характер роста может оказаться намного сложнее, и это может как усилить, так и ослабить неустойчивость, но эти вопросы выходят далеко за рамки интересов настоящей работы.

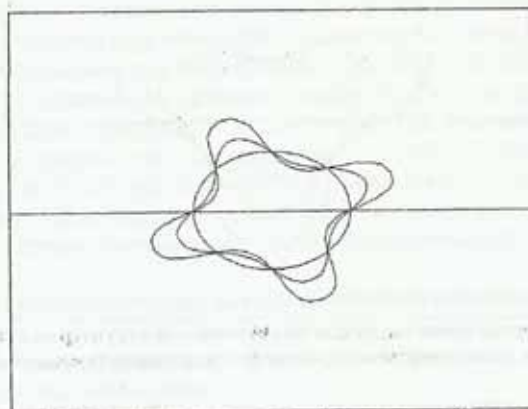


Рис. 3. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально была (четыре зоны ускоренного роста)

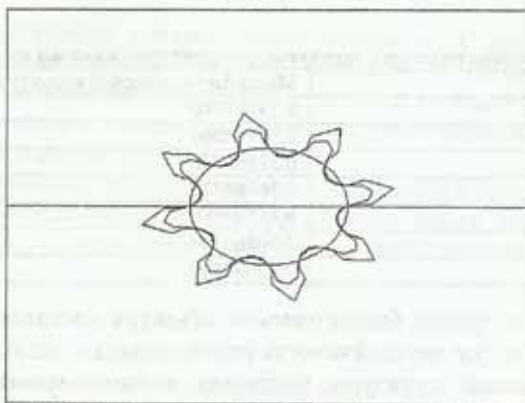


Рис. 4. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (восемь зон ускоренного роста)

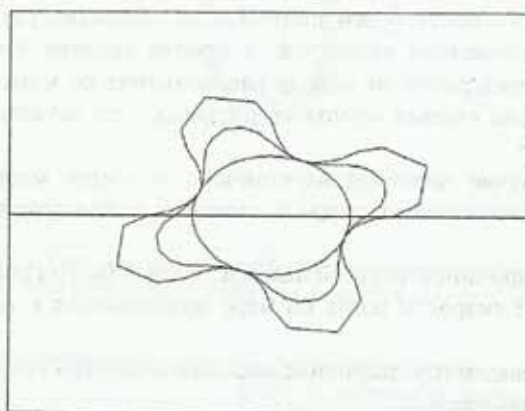


Рис. 5. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (четыре зоны ускоренного роста) без деградации биологической ткани

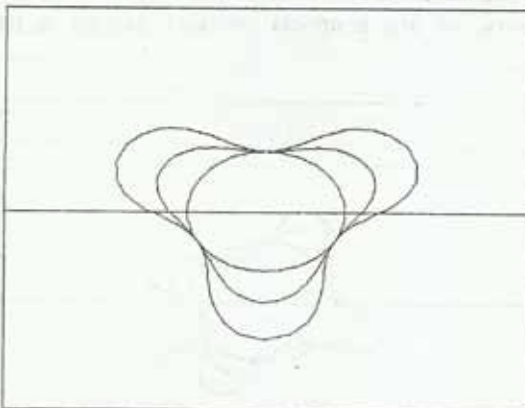


Рис. 6. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (три зоны ускоренного роста) без деградации биологической ткани

Выводы. Основным результатом работы следует считать разработку усовершенствованной асимптотической по времени математической модели процесса роста биологической структуры и разработанный алгоритм для численного расчета процессов роста.

Безусловным достоинством предложенной модели является возможность рассчитывать медленные по времени процессы роста биологической структуры. Достоинством предложенного алгоритма является использование метода граничных элементов в областях с подвижными границами, что обеспечивает высокую точность расчета. Оба указанных достоинства обусловили высокую эффективность данного подхода, который проиллюстрирован несколькими примерами численных расчетов.

Основным недостатком работы является то, при построении модели не учитывалась генетика, особенности и индивидуальные свойства структур биологических объектов.

Полученные результаты процесса роста биологических структур имеют большое значение в развитии теоретической биологии и биотехнологий.

Перспективы дальнейших исследований в данной области совершенно очевидны: с одной стороны, это совершенствование моделей роста биологических структур с учетом применения более сложных условий роста; с другой стороны, это применение полученных математических и численных моделей в биологических и сельскохозяйственных науках.

Библиографические ссылки

1. Биохимия злокачественного роста : Сборник. – М., 1965. – 350 с.
2. Теоретическая и математическая биология : Сб. науч. трудов. – М., 1968. – 448 с.
3. Бейли Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли. – М., 1970. – 326 с.
4. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Марри. – М., 1983. – 398 с.
5. Рубин А.Б. Биофизика : в 2 томах. Т.1. Теоретическая биофизика / А.Б. Рубин. – М., 2004. – 448 с.
6. Рубин А.Б. Биофизика. В 2 томах. Т.2. Биофизика клеточных процессов / А.Б. Рубин. – М., 2004. – 469 с.
7. Рубин А.Б. Кинетика биологических процессов / А.Б. Рубин, Н.Ф. Пытьева, Г.Ю. Ризниченко. – М., 1987. – 304 с.
8. Friedman A. Free boundary problems in science and technology / A. Friedman // Notices of Amer. Math. Society. – 2000. – V. 47, № 8. – P. 854 – 861.
9. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – М., 1973. – 420 с.
10. Евдокимов Д.В. Математические модели процессов тепломассообмена в ходе метаболизма биологических структур / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Т.Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2005. – С. 100–115.
11. Андросова М.О. Применение асимптотического анализа для расчета поверхностного роста биологической структуры / М.О. Андросова, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков и др. // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2007. – С. 50–58.
12. Рубинштейн Д.И. Проблема Стефана / Д.И. Рубинштейн. – Рига, 1967. – 412 с.
13. Митропольский Ю.А. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеев. – К., 1968. – 255 с.
14. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М., 1981. – 400 с.
15. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.
16. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.

Надійшла до редколегії 04.02.11