

УДК 539.3

Д.В. Терещенко, В.В. Лобода

Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ МАТЕРИАЛОВ

Розглянуто задачу визначення наявності та місця розташування тріщини на границі поділу двох ізотропних однорідних матеріалів. Розроблено підхід, заснований на збудженні конструкції за допомогою динамічно прикладеної зосередженої сили і співставленні інтегральних характеристик поперевжних деформацій для еталонного і досліджуваного зразків. Вказано можливий варіант знаходження розміру тріщини.

*Ключові слова:* тріщина, поперевжні деформації, ідентифікація, еталонний і досліджувані зразки.

Рассмотрена задача определения наличия и местоположения трещины на границе раздела двух изотропных однородных материалов. Выработан подход, основанный на возмущении конструкции с помощью динамически приложенной сосредоточенной силы и сопоставлении интегральных характеристик продольных деформаций для эталонного и исследуемого образцов. Указан возможный вариант нахождения размера трещины.

*Ключевые слова:* трещина, продольные деформации, идентификация, эталонный и исследуемый образцы.

The problem of definition of presence and crack site on the interface of two isotropic homogeneous materials is considered. The approach is based on indignation of a construction by means of dynamically applied concentrated force and comparison of integral characteristics of the longitudinal strains for reference and investigated samples. The possible variant of definition of the size of a crack is considered as well.

*Key words:* crack, longitudinal strains, identification, reference and investigated samples.

**Введение.** Разработка эффективных, надежных и достаточно дешевых методов диагностики технического состояния сложных механических систем – одна из важных проблем современного машиностроения. Особое место среди таких методов занимают методы неразрушающего контроля. Они основываются на наблюдении, регистрации и анализе результатов взаимодействия физических полей или веществ с объектом контроля, причем характер этого взаимодействия зависит от самого объекта [1]. Универсального метода неразрушающего контроля не существует, то есть, каждый отдельно взятый метод решает ограниченный круг задач технического контроля.

Часто дефекты возникают на границе соединения различных материалов, поэтому задача дифракции упругих волн на конечной трещине, образованной на плоской границе раздела двух упругих материалов – является важной для изучения физико-механических эффектов, по которым можно идентифицировать трещину.

Эту задачу детально исследовали, используя различные численные и аналитические методы, большинство из которых основывались на методе интегральных уравнений. Чаще всего рассматривались случаи, когда трещина располагалась в однородной среде при различных длинах зондирующих волн [2 – 4]. Проанализированы [5 – 7] решения задач дифракции сдвиговой SH-волны на трещине, расположенной на плоской границе раздела двух изотропных однородных материалов. В [8] получено распределение дифрагированного поля перемещений в зоне излучения для широкого частотного диапазона SH-волны, рассеянной конечной трещиной на границе раздела материалов, при разных углах зондирования, предложен способ

нахождения размеров трещины, который базируется на изучении минимумов модуля поля перемещений в окрестности критических углов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим двумерную задачу для шарнирно-опертой балки длиной  $L$  (рис. 1). Балка состоит из двух однородных изотропных прямоугольников с константами Ляме  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  и толщинами слоев  $d_1, d_2$ , соответственно. Слои соединены вдоль общего прямолинейного отрезка  $\Gamma$ . На границе соединения имеется трещина, длиной  $2c$ , положение и длина которой неизвестны. Требуется определить наличие, местоположение и размеры указанной трещины.

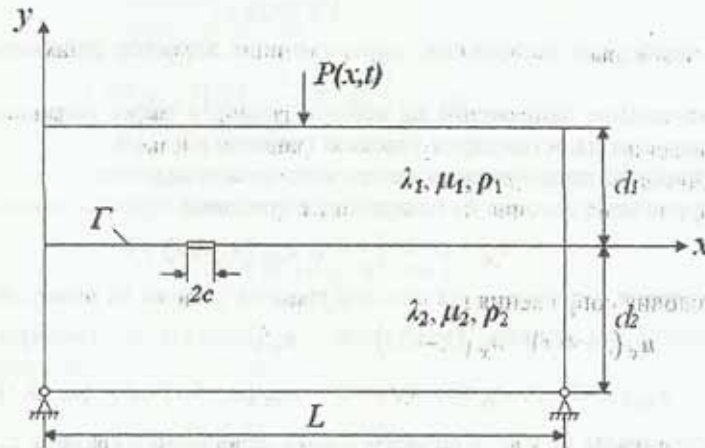


Рис.1. Схема к постановке задачи

Для определения этих характеристик к верхней грани балки приложим поперечную ударную сосредоточенную нагрузку  $P(x,t)$ . Эта нагрузка вызывает в теле упругие продольные и поперечные волны. На отрезке  $\Gamma$  полагается полное сцепление материалов, то есть, имеет место непрерывность перемещений и напряжений. Считается, что берега трещины деформируются без взаимного контакта.

Будем находить волновое возмущение на нижней грани балки. Сопоставляя далее полученные результаты с аналогичными результатами для эталонного тела (этой же биматериальной балки, но без трещины), можно сделать вывод о местонахождении трещины и ее размере.

В математическом плане решение данной задачи для каждой подобласти сводится к решению волновых уравнений [9]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(x, y, t)$ ,  $\psi(x, y, t)$  – динамические потенциалы, которые связаны с вектором перемещений  $U$  следующим образом

$$U = \text{grad } \Phi + \text{rot } \psi,$$

$c_1, c_2$  – скорость распространения продольной и поперечной волны, соответственно, которые определяются как

$$c_1 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2},$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме;  $\rho$  – плотность материала.

Граничные условия имеют вид:

$$u_x(0, -d_2, t) = 0, \quad u_y(0, -d_2, t) = 0, \quad u_x(L, -d_2, t) = 0, \quad u_y(L, -d_2, t) = 0,$$

$$\sigma_{xx}(x, d_1, t) = -P(x, t) = -p(t) \cdot \delta(x - x^*),$$

$$\text{где } \delta - \text{ дельта функция Дирака; } p(t) = \begin{cases} p \cdot t / t_1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ p \cdot (-t / t_1 + t_2), & t_1 < t \leq t_2; \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

$p, t_1, t_2$  – некоторые постоянные, определяющие характер динамического нагружения.

Касательное напряжение на верхней грани, а также нормальные и касательные напряжения на оставшихся участках границы равны 0.

Условия на линии раздела материалов имеют вид:

– граничные условия на поверхности трещины:

$$\tau_{xy}(x, \pm 0, t) = 0, \quad \sigma_{xx}(x, \pm 0, t) = 0;$$

– условия сопряжения на плоской границе раздела на поверхности трещины:

$$u_x(x, +0, t) - u_x(x, -0, t) = 0, \quad u_y(x, +0, t) - u_y(x, -0, t) = 0,$$

$$\tau_{xy}(x, +0, t) - \tau_{xy}(x, -0, t) = 0, \quad \sigma_{xx}(x, +0, t) - \sigma_{xx}(x, -0, t) = 0.$$

Потенциалы  $\Phi$  и  $\psi$  в случае плоской деформации связаны с перемещениями и напряжениями следующими соотношениями:

$$u_x = \partial\Phi / \partial x + \partial\psi / \partial y, \quad u_y = \partial\Phi / \partial y - \partial\psi / \partial x,$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right) + \frac{\lambda}{c_1^2} \ddot{\Phi}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right).$$

**Метод решения.** Данная математическая модель была реализована в пакете конечно-элементного моделирования. Рассмотрим использование метода конечных элементов на примере первого из волновых уравнений (1)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0.$$

В некоторый фиксированный момент времени производные от функции  $\Phi$  по времени могут рассматриваться как заданные функции координат [10]. Для этого момента времени задача аналогична задаче статики.

После конечно-элементной дискретизации этого уравнения для пространственных переменных, при том, что функция  $\Phi$  определена для каждого элемента в обычной форме

$$\Phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}^e,$$

где  $N_i, N_j, \dots$  – функции формы,  $\Phi_i, \Phi_j, \dots$  – узловые параметры [11], получаем обычную форму определяющего уравнения

$$[H]\{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (2)$$

Вклад каждого элемента в приведенные выше матрицы жесткости  $[H]$  и сил  $\{F\}$  определяется соотношениями:

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e, \quad (3)$$

$$h_{ij}^e = \int_{S^e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dx dy, \quad (4)$$

$$\{F\} = \sum \{F\}^e,$$

$$\{F\}^e = \left( \int_{S^e} [N]^T \frac{1}{c^2} [N] dS \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\Phi\}^e.$$

Записывая (2) в окончательной форме определяющих уравнений, получаем следующее матричное дифференциальное уравнение

$$[H]\{\Phi\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\Phi\} = 0,$$

в котором все матрицы составляются по стандартному правилу для каждого элемента согласно соотношениям (3), (4) и

$$g_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{S^e} N_i N_j dS.$$

Граничные условия задаются в каждый момент времени. Аналогично применяется метод конечных элементов для второго волнового уравнения (1).

В ходе решения задачи выработан алгоритм нахождения местоположения трещины. Алгоритм имеет итерационный характер и заключается в следующем.

Длина балки  $[a_1; b_1]$  делится пополам точкой приложения сосредоточенной силы  $x^* = (a_1 + b_1) / 2$ . Затем вычисляются интегральные характеристики продольных деформаций слева ( $S_{1k}$ ) и справа ( $S_{2k}$ ) от приложенной сосредоточенной силы:

$$S_{1k} = \int_{a_k}^{x^*} \left| e_{xx}(x) - e_{xx}^*(x) \right| dx,$$

$$S_{2k} = \int_{x^*}^{b_k} \left| e_{xx}(x) - e_{xx}^*(x) \right| dx.$$

Здесь  $k$  – номер итерации;  $e_{xx}(x)$  – распределение продольных деформаций на нижней грани балки без трещины;  $e_{xx}^*(x)$  – это же распределение, но для балки с трещиной. Интегральная характеристика вычисляется в некоторый момент времени  $t^*$ , за которое упругая волна от верхней грани балки доходит до нижней

$$t^* \geq (d_1 + d_2) / c_1.$$

Для последующего анализа выбирается отрезок  $[a_2; b_2]$  – та половина  $[a_1; b_1]$ , для которой интегральная характеристика продольных деформаций оказалась больше.

Далее процесс продолжается, промежуток  $[a_2; b_2]$  делится пополам точкой приложения сосредоточенной силы –  $x^* = (a_2 + b_2) / 2$  и так далее.

Процесс нахождения местоположения трещины заканчивается, когда  $|b_k - a_k| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторая малая величина или когда  $S_{1k} = S_{2k}$ .

Таким образом, в конце процесса точка приложения силы окажется строго над серединой трещины. А значит, местоположение трещины будет установлено.

**Результаты численного анализа.** Приняв следующие значения параметров:  $L=1\text{м}$ ,  $d_1=0.1\text{м}$ ,  $d_2=0.15\text{м}$ ,  $2c=0.05\text{м}$ ,  $\lambda_1=7.4442 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_1=8.0645 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\lambda_2=3.1426 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_2=5.9859 \cdot 10^9$ ,  $\rho_1=7850 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2=11340 \text{ кг/м}^3$ ,  $p=500\text{Н}$ ,  $t_1=2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ,  $t_2=4 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ , рассмотрим пример нахождения местоположения трещины. Трещина находится на расстоянии  $0.2 \text{ м}$  от левого края балки.

На рис. 2 показано распределение продольных деформаций на нижней грани балки по длине балки в момент времени  $t^* = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$  для первой итерации при  $x^* = 0.5 \text{ м}$ .

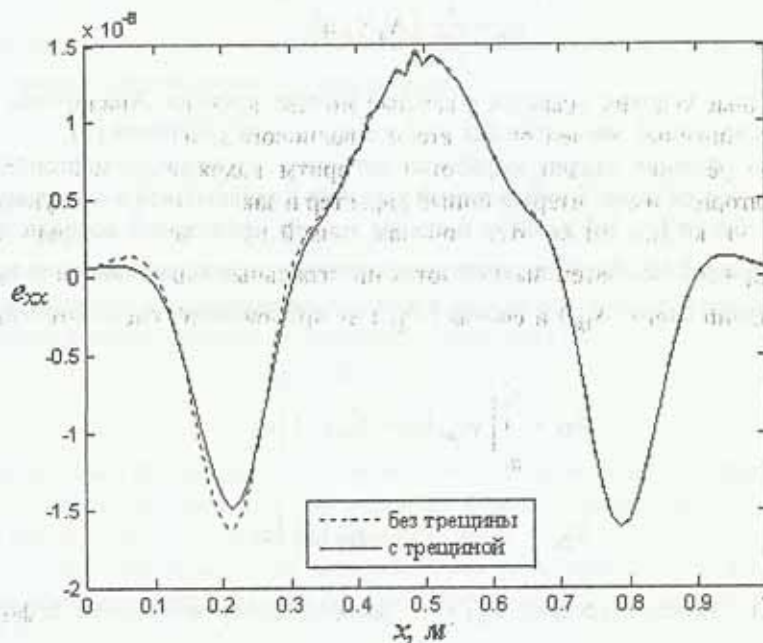


Рис. 2. Распределение продольных деформаций для первой итерации

На рис. 3,4 показано распределение продольных деформаций – для второй итерации при  $x^* = 0.25 \text{ м}$  и десятой итераций при  $x^* = 0.2002 \text{ м}$  метода соответственно в момент времени  $t^* = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

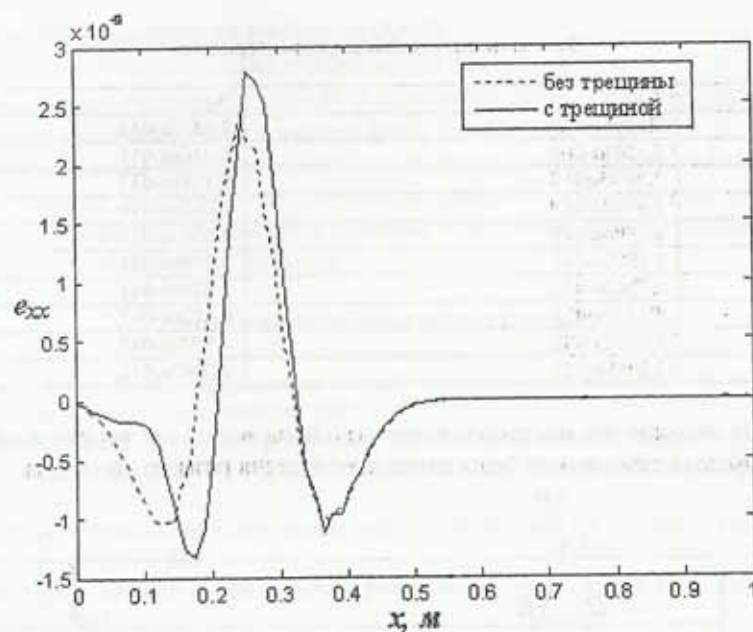


Рис. 3. Распределение продольных деформаций для второй итерации

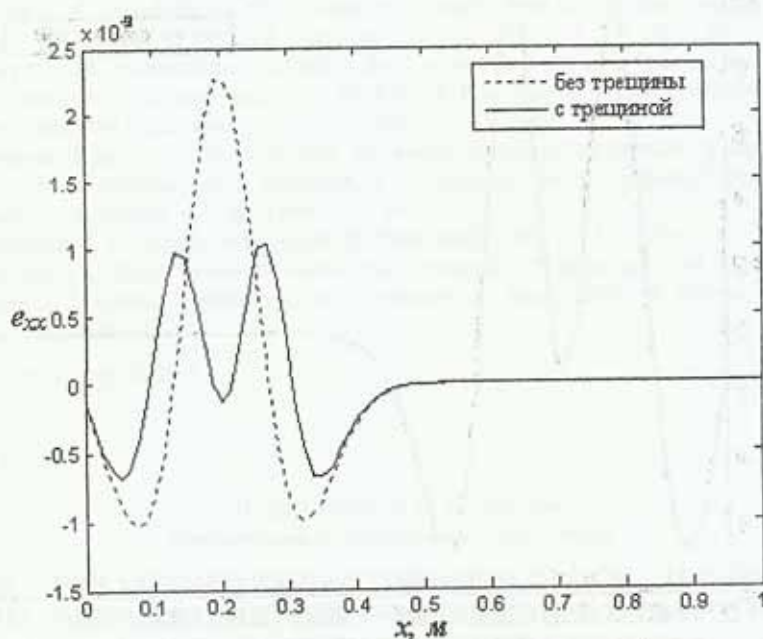


Рис. 4. Распределение продольных деформаций для десятой итерации

В табл. 1 приведены значения  $S_{1k}$  и  $S_{2k}$  для десяти итераций процесса.

Таким образом, местоположение трещины установлено. Аналогичные расчеты были проведены для различных длин трещин – 1 см, 2 см, 4 см, 10 см.

Значення інтегральних характеристик

k	$S_{1k}$	$S_{2k}$
1	2.5596e-010	2.7652e-011
2	1.3501e-010	5.0166e-011
3	2.5975e-011	6.1019e-011
4	5.4748e-011	1.0126e-010
5	6.5954e-011	2.6051e-011
6	3.5970e-011	3.3796e-011
7	1.7563e-011	1.8274e-011
8	9.1359e-012	9.1420e-012
9	4.5995e-012	4.5772e-012
10	2.2997e-012	2.2967e-012

Після знаходження местоположення тріщини виникає питання про її розмір. На рис. 5 представлена простейша схема знаходження розміру тріщини.

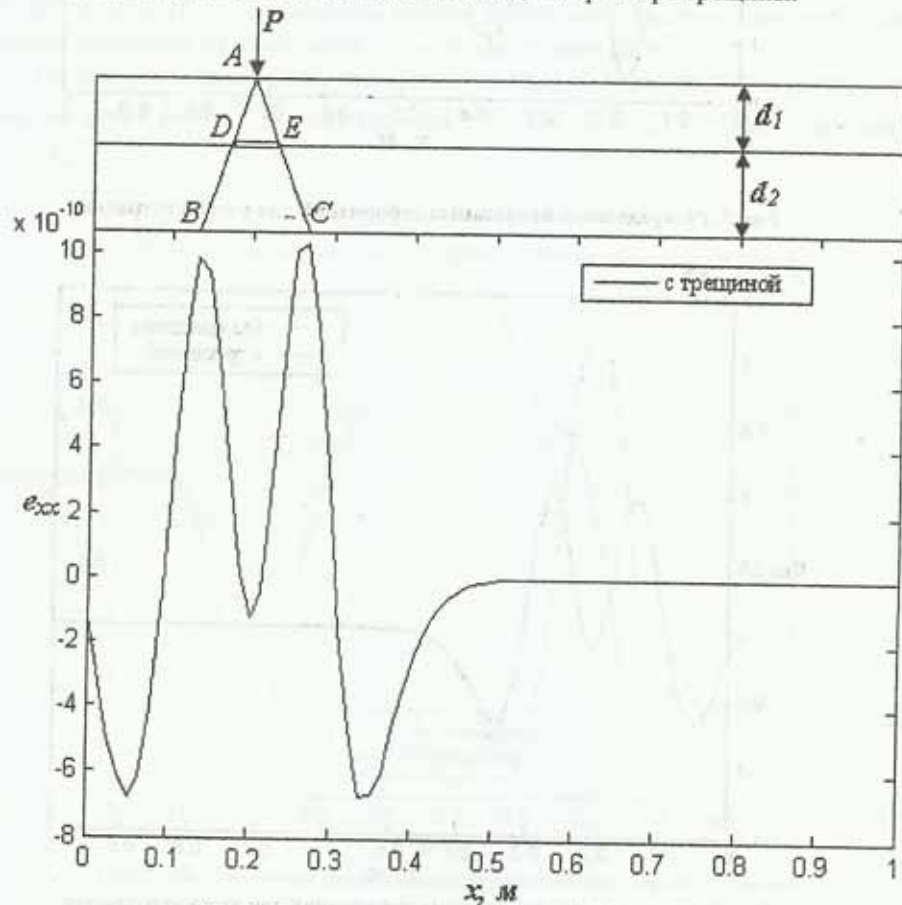


Рис. 5. Схема знаходження розміру тріщини

На рис. 5: DE – довжина тріщини; BC – відстань між двома піками в розподілі продольних деформацій на нижній грані балки з тріщиною для останньої ітерації процесу знаходження местоположення тріщини (рис. 4), BC = 0.12 м.

Таким образом, находим размер трещины

$$DE = BC \cdot d_1 / d_2 = 0.048 \text{ m}$$

при действительном размере в 0.05 m. Аналогично удалось оценить длину трещины, если действительная длина трещины была больше 0.02 m.

**Выводы.** Таким образом, в работе представлен итерационный метод идентификации трещины на границе раздела двух однородных изотропных материалов. Приведены примеры его реализации. Показан возможный вариант нахождения размера трещины на конкретном примере.

### Библиографические ссылки

1. Каневский И. Н. Неразрушающие методы контроля: учеб. пособие / И. Н. Каневский, Е. Н. Сальникова. – Владивосток, 2007. – 420 с.
2. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде / Л. А. Фильштинский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127.
3. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a Griffith crack / A. K. Mal // Int. J. Eng. Sci. 1970. – 8. – P. 763 – 776.
4. Партон В. З. Динамическая механика разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисовский. – М., 1985. – 264 с.
5. Takei M. Diffraction of transient horizontal shear waves by a finite crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids / M. Takei, Y. Shindo, A. Atsumi // Eng. Fract. Mech. – 1982. – 16, №6. – P. 799 – 807.
6. Loeber J. F. Transmission of antiplane shear waves past an interface crack in dissimilar media / J. F. Loeber, G. C. Sih // Eng. Fract. Mech. – 1973. – 5. – P. 699 – 725.
7. Palaiya R. M. Interaction of antiplane shear waves by rigid strip lying at the interface of two dissimilar elastic half-spaces / R. M. Palaiya, P. Majumdar // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1981. – 61, №2. – P. 120 – 122.
8. Куриляк Д. Б. Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук, М. В. Войтко // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2006. – № 6. – С. 5–16.
9. Новацкий В. К. Теория упругости / В. Новацкий. – М., 1975. – 720 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. 1985. – 436 с.
11. Норри Д. Введение в метод конечных элементов ; пер. с англ. / Д. Норри, Ж. де Фриз – М., 1981. – 464 с.

Надійшла до редколегії 08.11.10

УДК 539.3

Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова

Запорожский национальный университет

## КОНТАКТ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПАРАБОЛОИДНОГО ШТАМПА И ШЕРОХОВАТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ

Інтегральні рівняння, що моделюють задачу контакту штампа у формі кругового параболоїда з шорстким пружним півпростором при експоненційному законі деформування шорсткості в