

Таким образом, находим размер трещины

$$DE = BC \cdot d_1/d_2 = 0.048 \text{ m}$$

при действительном размере в 0.05 m. Аналогично удалось оценить длину трещины, если действительная длина трещины была больше 0.02 m.

**Выводы.** Таким образом, в работе представлен итерационный метод идентификации трещины на границе раздела двух однородных изотропных материалов. Приведены примеры его реализации. Показан возможный вариант нахождения размера трещины на конкретном примере.

### Библиографические ссылки

1. Каневский И. Н. Неразрушающие методы контроля: учеб. пособие / И. Н. Каневский, Е. Н. Сальникова. – Владивосток, 2007. – 420 с.
2. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде / Л. А. Фильштинский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127.
3. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a Griffith crack / A. K. Mal // Int. J. Eng. Sci. 1970. – 8. – P. 763 – 776.
4. Партон В. З. Динамическая механика разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисовский. – М., 1985. – 264 с.
5. Takei M. Diffraction of transient horizontal shear waves by a finite crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids / M. Takei, Y. Shindo, A. Atsumi // Eng. Fract. Mech. – 1982. – 16, №6. – P. 799 – 807.
6. Loeber J. F. Transmission of antiplane shear waves past an interface crack in dissimilar media / J. F. Loeber, G. C. Sih // Eng. Fract. Mech. – 1973. – 5. – P. 699 – 725.
7. Palaiya R. M. Interaction of antiplane shear waves by rigid strip lying at the interface of two dissimilar elastic half-spaces / R. M. Palaiya, P. Majumdar // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1981. – 61, №2. – P. 120 – 122.
8. Куриляк Д. Б. Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук, М. В. Войтко // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2006. – № 6. – С. 5–16.
9. Новацкий В. К. Теория упругости / В. Новацкий. – М., 1975. – 720 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. 1985. – 436 с.
11. Норри Д. Введение в метод конечных элементов ; пер. с англ. / Д. Норри, Ж. де Фриз – М., 1981. – 464 с.

Надійшла до редколегії 08.11.10

УДК 539.3

Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова

Запорожский национальный университет

### КОНТАКТ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПАРАБОЛОИДНОГО ШТАМПА И ШЕРОХОВАТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ

Інтегральні рівняння, що моделюють задачу контакту штампа у формі кругового параболоїда з шорстким пружним півпростором при експоненційному законі деформування шорсткості в

умовах часткового проковзування, розв'язані за допомогою методів послідовних наближень, редуцції, а також методу регуляризації. Визначено вплив коефіцієнтів шорсткості і тертя, значення тангенціальної сили та висоти її прикладення на контактні характеристики: функції нормального тиску, дотичних напруг, занурення штампів, кут нахилу штампа, розміри областей проковзування та зчеплення. Продемонстровано переваги експоненційного закону деформування шорсткості над степеневим законом для значних зовнішніх сил та зв'язок між ними для незначних сил.

*Ключові слова:* контактна задача, штамп, шорсткість, закон деформування шорсткості, тертя, часткове проковзування, область проковзування, область зчеплення.

Интегральные уравнения, моделирующие задачу контакта штампа в форме кругового параболоида с шероховатым полупространством при экспоненциальном законе деформирования шероховатости в условиях частичного проскальзывания, решены при помощи методов последовательных приближений, редукции, а также метода регуляризации. Определено влияние коэффициентов шероховатости и трения, значения тангенциальной силы и высоты ее приложения на контактные характеристики: функции нормального давления, касательных напряжений, углубление штампа, угол наклона штампа, размеры областей проскальзывания и сцепления. Продемонстрированы преимущества экспоненциального закона деформирования шероховатости над степенным законом для значительных сил и связь между ними для незначительных сил.

*Ключевые слова:* контактная задача, штамп, шероховатость, закон деформирования шероховатости, трение, частичное проскальзывание, область проскальзывания, область сцепления.

The problem of contact of a punch in the form of a circular paraboloid with rough half-space at exponential law of a roughness deformation in the conditions of partial slippage is modeled by the integral equations, these equations are solved by means of iteration method, reductions method and also a method of regularization. The influence of coefficient of a roughness and friction, value of tangential force and height of its application on contact characteristics, functions of normal pressure, tangential stress, punch deepening, a inclination of a punch, the sizes of slippage zone and cohesion zone is established. It is shown advantages exponentially over the power law of roughness deformation for great forces and interdependence between them for slight forces.

*Key words:* a contact task, a punch, a roughness, the law of roughness deformation, a friction, partial slippage, slippage zone, cohesion zone.

**Введение.** Рассмотрим пространственную контактную задачу с частичным проскальзыванием, возникающим вследствие того, что тангенциальная нагрузка, приложенная к штампу меньше, чем предельная нагрузка, способная вызвать полное скольжение в области контакта. При этом будем учитывать шероховатость полупространства, а штамп будем считать абсолютно гладким телом. Анализ распределения напряжений в условиях частичного проскальзывания имеет большое значение при расчетах на прочность, для описания зон возможных разрушений конструкций. Специфика такого рода задач связана с необходимостью определения не только функций нормальных и тангенциальных напряжений, но и размеров и форм областей сцепления и проскальзывания. Контактная задача в условиях частичного проскальзывания, но без учета шероховатости, в плоской постановке изучена в [4]. Обзор решенных контактных задач с частичным проскальзыванием для тел различной формы, не учитывающих шероховатость, сделан в [12].

Учет шероховатости тел влияет на характер их контактного взаимодействия, что впервые обосновал И.Я. Штаерман [11]. Локальные поверхностные смещения микровыступов шероховатости могут зависеть от нормального давления по линейному, степенному или экспоненциальному законам. Первые два закона целесообразно применять для малых нормальных нагрузок, а экспоненциальный – для больших. Последнее подтверждено экспериментально для ряда полимеров и резин [1; 9] и связано с тем, что с увеличением давления смятия микровыступов шероховатости в случае экспоненциального закона не увеличиваются неограниченно, как в

случае степенного закона, а приближаются к фиксированому значению, зависящему от максимальной высоты микровыступов шероховатости.

Контактные задачи с учетом шероховатости для штампов различной формы при различных законах деформирования шероховатости изучены в [2 – 4; 7; 10; 11], с учетом как шероховатости так и скольжения с трением – в [6; 10].

В данной работе использован подход, основанный на разложении интеграла уравнения по функциям Лежандра, методе последовательных приближений и методе редукции, который предложен С.Ф. Шишкановой и применен в [3; 7; 10]. Этот подход позволяет получить приближенное аналитическое решение данной задачи

**Целью данной работы является** решение задачи контакта параболического штампа с упругим шероховатым полупространством при экспоненциальном законе деформирования шероховатости в условиях частичного проскальзывания. Необходимо определить влияние коэффициентов шероховатости и трения, величины тангенциальной силы на контактные характеристики, в том числе, определить форму и размеры областей сцепления и проскальзывания. Такая задача решается впервые.

**Постановка задачи.** Точку первоначального контакта шероховатого полупространства и штампа обозначим через  $O$ , плоскость, ограничивающую шероховатое полупространство примем за плоскость  $Oxy$ , ось  $Oz$  направим внутрь полу-

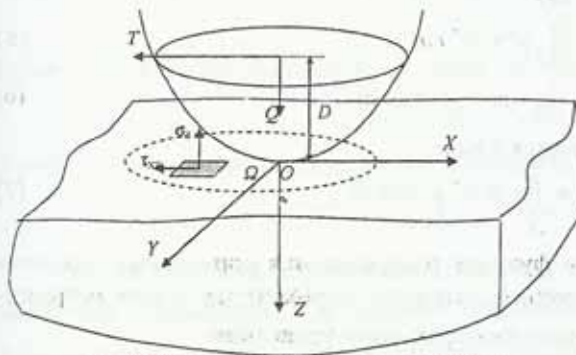


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия

пространства (рис. 1). Предположим, что параболический штамп с уравнением поверхности  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = -A(x^2 + y^2)$$

$$A = A_1 \frac{1}{cm}, \quad A_1 = const$$

находится под действием вертикальной силы  $Q$ , направленной вдоль оси  $Oz$ , горизонтальной силы  $T$ , приложенной на высоте  $D$  от поверхности полупространства и направленной параллельно оси абсцисс. Вследствие воздействия на штамп тангенциальной силы давление под ним будет распределено неравномерно, что приводит к возникновению дополнительного момента  $M_y$  относительно оси  $Oy$ .

Условие равновесия моментов имеет вид

$$M_y + |T|D = 0. \quad (1)$$

Результатом воздействия нормальной силы является поступательное перемещение штампа параллельно оси  $Oz$  на глубину  $\delta$ , а тангенциальной – поворот вокруг оси ординат:  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = \gamma$  – проекции вектора поворота. Поэтому нормальные составляющие перемещения точек штампа примут вид

$$w_1(x, y) = \delta - \gamma x + f(x, y). \quad (2)$$

Условия контакта штампа с упругим полупространством внутри области контакта  $\Omega$  выражаются соотношениями (аналогично [4, 184]):

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial x}; \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $w(x, y)$  – перемещение упругого шероховатого полупространства вдоль оси  $Oz$ .

Так как взаимодействующие тела находятся в условиях частичного проскальзывания, то  $|T| \leq \mu Q$ , где  $\mu$  – коэффициент трения. Область скольжения обозначим  $\Omega_1$ , а сцепления  $\Omega_2$ , тогда  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . В области скольжения  $\Omega_1$  выполнен закон трения Амонтона и направление касательных напряжений  $q(x, y) = \tau_{xz}(x, y)$  противоположно направлению проскальзывания и связано с нормальными давлениями штампа соотношением  $|q(x, y)| = -\mu p(x, y) \operatorname{sgn} s(x, y)$ , где  $s(x, y) = u(x, y) - \delta_x$ ,  $u(x, y)$  – перемещение упругого шероховатого полупространства вдоль оси  $Ox$ ,  $\delta_x$  – относительное смещение в направлении оси  $Ox$  фиксированных точек тел, расположенных на некотором удалении от области контакта. В области сцепления  $\Omega_2$  относительное проскальзывание равно нулю, то есть  $u(x, y) = \delta_x$ , и выполняется неравенство  $|q(x, y)| \leq \mu p(x, y)$  (аналогично [4]).

Контактное давление  $p(x, y)$  и касательное напряжение  $q(x, y)$  удовлетворяют следующим уравнениям равновесия сил и моментов

$$Q = \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy', \quad (4)$$

$$T = \iint_{\Omega} q(x', y') dx' dy', \quad (5)$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'. \quad (6)$$

С учетом (1) уравнение (6) переписывается в виде

$$-|T|D = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'. \quad (7)$$

Из (2), (3) и [4] следует, что функция распределения нормальных давлений  $p(x, y)$  под штампом, контактирующим с упругим шероховатым полупространством, будет удовлетворять следующему интегральному уравнению

$$W_1(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' = \delta - \gamma x - A(x^2 + y^2), \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала полупространства,  $r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ . Первое слагаемое в левой части (8) характеризует зависимость локальных смещений микронеровностей шероховатости от давления, которое может осуществляться по степенному [2; 4; 9] (в частности, линейному) закону  $W_1'(x, y) = B[p(x, y)]^K$  или по экспоненциальному [1; 9] –  $W_1''(x, y) = h \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha p(x, y)}{E}\right) \right]$ , где  $B$ ,  $K$  и  $h, \alpha$  – показатели шероховатости соответствующих законов. При  $K = 1$  и небольших нагрузках, когда  $\alpha p(x, y) / E$  мало, выполняется условие  $W_1' \approx W_2''$ , причем  $B = h\beta / E$ . Будем изучать случай экспоненциального закона.

Кроме того, функция нормального давления удовлетворяет граничному условию: вне области  $\Omega$ , а также на ее границе  $\Gamma$  она обращается в нуль

$$p(x, y) = 0, \text{ если } (x, y) \in \Gamma. \quad (9)$$

Касательные напряжения  $q(x, y)$  под штампом удовлетворяют уравнениям (аналогично [4]):

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Omega} \frac{q(x', y')}{r} dx' dy' &= -\frac{\partial s(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\Omega} \frac{q(x', y')}{r} dx' dy' &= -\frac{\partial s(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Представим функцию касательных напряжений  $q(x, y)$  в области контакта в виде (аналогично [4]):

$$q(x, y) = \begin{cases} \mu p(x, y) - q^*(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \\ \mu p(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \end{cases} \quad (11)$$

тогда с учетом (3), а также того факта, что при  $(x, y) \in \Omega_2$  проскальзывание равно нулю, система уравнений (5) превратится в одно уравнение вида

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega_2} \frac{q^*(x', y')}{r} dx' dy' = \delta_x + \mu \left( \delta - \gamma x - A(x^2 + y^2) - h \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha p(x, y)}{E}\right) \right] \right). \quad (12)$$

Кроме того, в точках границы  $\Gamma_2$  области  $\Omega_2$  выполнено

$$q^*(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (13)$$

С учетом условий равновесия сил (4), (5) и представления (11) получим уравнение

$$\mu Q - T = \iint_{\Omega_2} q^*(x', y') dx' dy'. \quad (14)$$

**Метод решения.** Нормальные давления. Обозначим  $\beta = 1$  см. Введем безразмерные величины: функцию безразмерного нормального давления  $p_1(x, y) = cp(x, y)$ , где  $c = (1-\nu^2)/(\pi E)$ , коэффициенты шероховатости  $h_1 = h/\beta$ ;  $\alpha_1 = \alpha \pi / (1-\nu^2)$  и осадку штампа  $\delta_1 = \delta/\beta$ . Уравнение (8) перепишем в операторном виде

$$h_1 \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1(x, y)) \right] + (Lp_1)(x, y) = \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} (x^2 + y^2), \quad (15)$$

где  $(Lp_1)(x, y) = \frac{1}{2\pi\beta} \iint_{\Omega} \frac{p_1(x', y')}{r} dx' dy'$  – оператор, отображающий пространство непрерывных на  $\Omega$  функций  $C(\Omega)$  с нормой  $\|p_1\| = \max_{(x, y) \in \Omega} |p_1(x, y)|$  в себя. Обозначим  $Q_1 = Qc$ ,  $T_1 = |T|c$ . При этом уравнения (4), (7), (9) примут вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x' p_1(x', y') dx' dy' + DT_1 &= 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega} p_1(x', y') dx' dy', \\ p_1(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Если бы на штамп действовала сила  $Q$ , параллельная оси  $Oz$ , а точка пересечения линии действия этой силы с плоскостью  $Oxy$  имела бы координаты

$(x_0, 0)$ , то условие равновесия моментов имело бы вид:  $x_0 Q = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'$ . В таком случае, как показано в [7], площадкой контакта  $\Omega$  являлся бы круг с центром в точке  $(x_0, 0)$  некоторого радиуса  $a$ , а значение  $\gamma$  выражалось бы соотношением  $\gamma = -2Ax_0$ . Поэтому, сравнивая приведенное условие равновесия моментов с (7), вводим обозначение:  $x_0 = -DT_1/Q_1$ . Это позволяет в правой части уравнения (15) выделить полный квадрат. После замены  $x^* = x - x_0$ ,  $y^* = y$  область  $\Omega$  переходит в круг  $\Omega^*$  с центром в начале координат. Обозначив  $p_1^*(x^*, y^*) = p_1(x^* + x_0, y)$ , заметим, что

$$r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{(x^* - x^{**})^2 + (y^* - y^{**})^2} = r(x^*, x^{**}, y^*, y^{**})$$

приходим к системе уравнений

$$\frac{h_1}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(x, y)) \right] + \frac{1}{2\pi\beta} \iint_{\Omega^*} \frac{p_1^*(x^{**}, y^{**})}{r} dx^{**} dy^{**} = g_1(x^*, y^*),$$

$$g_1(x^*, y^*) = \frac{\delta_1}{2\pi} + \frac{A(x_0)^2}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right),$$

$$\iint_{\Omega^*} x^{**} p_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**} = 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega^*} p_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**},$$

$$p_1^*(x^*, y^*) \Big|_{(x^*, y^*) \in \Gamma^*} = 0 \quad (\Gamma^* - \text{граница } \Omega^*).$$

Полученная система моделирует осесимметричную задачу о вдавлении параболического штампа с уравнением  $z = -\frac{A}{\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right)$  в шероховатое полупространство вертикальной силой  $Q_1$  на глубину  $\delta_1^* = \delta_1 + A(x_0)^2/\beta$ . Вследствие этого переходим к полярной системе координат  $x^* = \rho \cos \theta$ ,  $y^* = \rho \sin \theta$ , получив эквивалентную систему вида

$$\frac{h_1^*}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(x, y)) \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega^*} \frac{p_1^*(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{\delta_1^*}{2\pi} - \frac{Aa}{2\pi} \left( \frac{\rho}{a} \right)^2, \quad (16)$$

$$p_1^*(a) = 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega^*} p_1^*(\rho') \rho' d\rho' d\theta',$$

где  $h_1^* = \frac{h_1 \beta}{a}$ ,  $r(\rho, \rho', \theta, \theta') = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')} = r$ . Чтоб искомая функция удовлетворяла граничному условию  $p_1^*(a) = 0$ , подставим это условие в (16) и вычтем полученное уравнение из (16), придем к операторному уравнению

$$\frac{h_1^*}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho)) \right] + \left[ (L^* - H) p_1^* \right](\rho) = \frac{Aa}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где  $[L^* f](\rho) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$ ,  $Hf = [L^* f](a)$  – оператор и функционал, действующие на пространстве  $C[0, a]$  непрерывных на  $[0, a]$  функций.

Для решения последней системы применяется подход, предложенный С.Ф. Шишкановой. Вследствие того, что функция  $\frac{1}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)}$  является производящей функцией многочленов Лежандра, интеграл  $\iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$

можно разложить в абсолютно сходящийся на  $[0, a]$  ряд [5]:

$$\iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta' = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 U_{2n}(\rho),$$

$$U_{2n}(\rho) = \int_0^{\rho} \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^{2n-1} f(\rho') d\rho' + \int_{\rho}^a \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^{2n} f(\rho') d\rho',$$

откуда получим

$$(H - L^*)(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}}{1 - 2n} = 1 - \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\rho}{a}\right),$$

$$(H - L^*) \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} b_{j,i} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i} \right], \quad (18)$$

где  $b_{j,i} = \left[ \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \right]^2 \left( \frac{1}{1-2i} - \frac{1}{2j-2i+1} \right)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ;  $j \in \mathbb{N}$ ),  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k$ . Последние соотношения, кроме прочего, позволяют провести оценку норм операторов  $H - L^*$  и  $mI - (L^* - H)$ , где

$m = 1 - \frac{h_1^*}{2\pi}$ , а  $I: C[0, a] \rightarrow C[0, a]$  – тождественный оператор вида  $I(f) = f$ , то из (18) получим

$$\|H - L^*\| \leq 1 - \frac{2}{\pi},$$

$$\|mI - (L^* - H)\| \leq \max \left\{ m; \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right\} \text{ при } h_1^* \in (0, 2\pi).$$

Если коэффициент шероховатости  $h_1^*$  ограничен снизу некоторой функцией, зависящей от другого коэффициента  $\alpha_1$ , то коэффициент  $h_1^*$  условимся называть большим, в противном случае – малым.

Рассмотрим вначале случай большого коэффициента  $h_1^*$ . Введем замену, аналогичную [4]:

$$\psi(\rho) = -\left[1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho))\right] + \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right],$$

тогда  $p_1^*(\rho) = -\frac{1}{\alpha_1} \ln \left[ \psi(\rho) + 1 - \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right]$ , а уравнение (17) примет вид

$$\psi(\rho) = (G\psi)(\rho), \quad (G\psi)(\rho) = \frac{2\pi}{h_1^* \alpha_1} (H - L^*) \ln \left[ \psi(\rho) + 1 - \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right]. \quad (19)$$

Это уравнение Гаммерштейна. В классе непрерывных на  $[0, a]$  функций выполнено

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \frac{2\pi}{h_1^* \alpha_1} \cdot \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} \cdot \|H - L^*\| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{2\pi - 4}{\alpha_1 h_1^*} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Из последней оценки и принципа сжимающих отображений следует, что уравнение Гаммерштейна (19) имеет единственное решение в классе непрерывных на  $[0, a]$  функций, которое можно найти методом последовательных приближений, если

$$h_1^* > \frac{2\pi - 4}{\alpha_1} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2}. \quad (20)$$

При фиксированном значении силы это условие выполняется лишь для коэффициентов  $h_1^*$ , ограниченных снизу величиной, зависящей от  $\alpha_1$ , то есть для больших коэффициентов  $h_1^*$ .

Опишем метод решения системы (19) в этом случае. Представим неизвестную функцию в виде

$$\psi(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i} - 1 \right].$$

Подставим этот ряд в уравнение (19). Функции, содержащиеся в (19), разложим в степенные ряды, получим:

$$p_1^*(\rho) = -1/\alpha_1 \ln \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right] = 1/\alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right];$$

$$\xi_1 = \gamma_1 + Aa/h_1^*; \quad \xi_j = \gamma_j, \quad j=2,3,4,\dots; \quad \xi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i; \quad \beta_0 = \sigma_0 = \ln \xi_0;$$

$$\beta_j = \xi_j / \xi_0;$$

$$p_j = (-1)^j / j; \quad a_{j,m} = \sum_{i=1}^j a_{j-i,m-i+1} \beta_i; \quad a_{j,j} = \beta_j \quad (m=1,\dots,j, \quad j \in \mathbb{N});$$

$$\sigma_j = \sum_{m=1}^j p_{j-m+1} a_{j,m} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Подставим разложения  $\psi(\rho)$ ,  $p_1^*(\rho)$  и (18) в уравнение (19) и в уравнение равновесия сил, придем к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\gamma_i = \frac{2\pi}{\alpha_1 h_1^*} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$a = \left[ \frac{Q_1}{2\pi} \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \frac{1}{2i+2} \right]^{-1/2}.$$



Эту бесконечную систему можно решать приближенно, заменяя ее конечной [8], то есть методом редукции, при условии (20). Действительно, рассмотрим отображения  $P_N : C[0, a] \rightarrow R_N[0, a]$ , где  $R_N[0, a]$  – множество полиномов  $N$ -ой степени, определенных на  $[0, a]$ . Результат действия этого отображения на  $f$  обозначим  $\overline{f}_N$  (то есть  $\overline{f}_N = R_N f$ ). Приближенное уравнение [8]  $\overline{\psi}_N = \overline{G}_N \overline{\psi}_N$  при достаточно больших  $N$  допускает единственное решение  $\overline{\psi}_N^*$  и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному  $\psi^*$ , т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^* - \overline{\psi}_N^*\| = 0.$$

Подставляя найденную функцию  $p_1^*(\rho)$  в уравнение (16), найдем  $\delta_1^*$

$$\delta_1^* = -\frac{2\pi}{\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} + aA.$$

Теперь рассмотрим случай малых коэффициентов шероховатости  $h_1^*$ . После замены

$$m = 1 - \frac{h_1^*}{2\pi}; \quad \psi(\rho) = -\left[1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho))\right] + \frac{Aa}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right],$$

уравнение (17) переписется в виде

$$\psi(\rho) = (G_1 \psi)(\rho). \quad (21)$$

$$(G_1 \psi)(\rho) = m \left[ \psi(\rho) - \frac{Aa}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right] - \frac{1}{\alpha_1} (L^* - H) \ln \left[ 1 + \psi(\rho) - \frac{Aa}{2\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right].$$

На классе непрерывных на отрезке  $[0, a]$  функций отображение  $G_1 \psi$  является сжимающим при ограничениях

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{1}{\alpha_1} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} < 1, \quad 0 < h_1^* < 2\pi. \quad (22)$$

При этих ограничениях на указанном классе функций уравнение (21) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Условия (22) соответствуют случаю малых коэффициентов шероховатости  $h_1^*$ .

В этом случае представим неизвестную функцию из уравнения (21) в виде, аналогичном случаю больших коэффициентов  $h_1^*$ :  $\psi(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i} - 1 \right]$ . Аналогично случаю больших  $h_1^*$  получим бесконечную систему нелинейных уравнений

$$\gamma_1 = m\gamma_1 + mA \frac{a}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,1}, \quad \gamma_i = m\gamma_i - \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} \quad (i=2,3,4,\dots),$$

$$a = \left[ \frac{Q_1}{2\pi} \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2i+2} \right]^{-1/2}$$

в тех же обозначениях коэффициентов, как и выше, кроме  $\xi_1 = \gamma_1 + Aa/(2\pi)$ . Систему можно решать методом редукции при ограничениях (22).

Искомые функция безразмерного нормального давления и углубление примут соответственно вид

$$p_1(x, y) = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \left( 1 - \frac{(x-x_0)^2 + y^2}{a^2} \right)^j, \quad \delta = \delta_1^* a - A(x_0)^2.$$

Введем обозначения:  $\Delta_j = -\frac{1}{\alpha_1} \frac{\sigma_j}{Aa}$ ,  $\Xi_j = \xi_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ), тогда

$$p_1^*(\rho) = Aa \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2j}, \quad 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho)) = - \sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2j}.$$

Из результатов работ [3; 7] следует, что графиком функции  $p_1(x, y)$  является поверхность вращения, линиями уровня которой являются окружности с центрами в точке  $(x_0, 0)$ .

*Касательные напряжения.* В уравнении (12) вместо  $\gamma$  подставим значение  $\gamma = -2Ax_0$ , найденное выше. Аналогично случаю нормальных давлений в (12) и (14) введем замены  $x^* = x - x_0$ ,  $y^* = y$ , что приведет к новой области  $\Omega_2^*$  с границей  $\Gamma_2^*$ . Положим  $q_1^*(x^*, y^*) = cq^*(x^* + x_0, y^*)$ ,  $p_1^*(x^*, y^*) = p_1(x^* + x_0, y)$ ,  $\delta_2 = \frac{\delta_x}{\beta} + \mu \left[ \delta_1 + \frac{A}{\beta} (x_0)^2 \right]$ , получим систему

$$\frac{1}{\beta} \iint_{\Omega_2^*} \frac{q_1^*(x^{**}, y^{**})}{r} dx^{**} dy^{**} = \delta_2 - \mu g_2(x^*, y^*), \quad (23)$$

$$g_2(x^*, y^*) = \frac{A}{\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right) + h_1^* \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p(x^*, y^*)) \right],$$

$$q^*(x^*, y^*) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2^*,$$

$$\mu Q_1 - T_1 = \iint_{\Omega_2^*} q_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**}. \quad (24)$$

Эта система моделирует осесимметричную контактную задачу о вдавлении в полупространство центральной силой  $\mu Q_1 - T_1$  на глубину  $\delta_2$  штампа с уравнением поверхности вращения  $z = -\mu g_2(x^*, y^*)$ , линиями уровня которой являются окружности с центрами в точке  $(0, 0)$ . Поэтому областью  $\Omega_2^*$  будет круг неизвестного радиуса  $a_2$ . Вследствие этого перейдем к полярной системе координат. Для получения приближенного решения  $\bar{q}_1^*(\rho)$  преобразованного интегрального уравнения первого рода применим метод регуляризации: введем малый параметр  $u \ll 1$  и решим интегральное уравнение второго рода

$$u \bar{q}_1^*(\rho) + \frac{1}{a_2} \iint_{\Omega_2^*} \frac{\bar{q}_1^*(\rho')}{r} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{\delta_2 \beta}{a_2} - \mu \left( \frac{A}{a_2} \rho^2 + h_1^* \frac{a}{a_2} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p(\rho)) \right] \right) \quad (25)$$

с учетом уравнения

$$\mu Q_1 - T_1 = \iint_{\Omega_2} \bar{q}_1^*(\rho') \rho' d\rho' d\theta', \quad (26)$$

Чтобы искомая функция удовлетворяла граничному условию  $\bar{q}_1^*(a_2) = 0$ , подставим это условие в (25) и вычтем полученное уравнение из (25), придем к операторному уравнению

$$\frac{u}{2\pi} \bar{q}_1^*(\rho) + [(L_2 - H_2)\bar{q}_1^*](\rho) = g_3(\rho), \quad (27)$$

$$g_3(\rho) = \frac{\mu A a_2}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a_2} \right)^2 \right] - \frac{\mu h_1^*}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \Xi_i \left( \frac{a_2}{a} \right)^{2i-1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a_2} \right)^{2i} \right],$$

где  $[L_2 f](\rho) = \frac{1}{2\pi a_2} \iint_{\Omega_2} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$ ,  $H_2 f = [L_2 f](a_2)$  – оператор и функционал, действующие на пространстве  $C[0, a_2]$  непрерывных на  $[0, a_2]$  функций.

Аналогично случаю нормальных давлений получаем при  $u \in (0, 2\pi)$  оценку

$$\|\varepsilon I - (L_2 - H_2)\| \leq \max \left\{ \varepsilon; \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right\}, \text{ где } \varepsilon = 1 - \frac{u}{2\pi}, \text{ а после применения принципа}$$

сжимающих отображений [8] приходим к выводу о существовании и единственности решения уравнения (27) при всех  $u \in (0, 2\pi)$ , в частности, при  $u \ll 1$ . Искомую

функцию представим рядом  $\bar{q}_1^*(x, y) = \mu A a_2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \left( \frac{\rho}{a_2} \right)^k$ . Подставив это разложение в уравнения (27) и (26), получим систему для определения коэффициентов этого ряда и радиуса  $a_2$  области сцепления  $\Omega_2$

$$\begin{cases} \zeta_n = \varepsilon \zeta_n + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k b_{kn} + \theta_n, \quad n=1, 2, 3, \dots \\ a_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu Q_1 - T_1}{2\pi A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_k}{2k+2}}} \end{cases}$$

где  $\theta_1 = \frac{1}{2\pi} (\Delta_1 h_1^* - 1)$ ,  $\theta_n = \frac{h_1^* \Delta_n}{2\pi} \left( \frac{a_2}{a} \right)^{2n-2}$ ,  $n=2, 3, 4, \dots$ . К выписанной системе

применяем метод последовательных приближений и метод редукции. Эта система является нелинейной относительно  $a_2$ . Убеждаемся в возможности применения метода редукции путем численного эксперимента. Относительное смещение  $\delta_x$  находим из (25)

$$\delta_x = \mu A (a_2)^2 \left( 1 - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} + h_1^* \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \left( \frac{a_2}{a} \right)^{2k-2} \right) - \mu \delta - \mu A (x_0)^2.$$

**Анализ результатов численных исследований.** Расчеты проводились для  $A_1 = 1$ , а в методе регуляризации выбрано  $\mu = 0,0001$ . Как подчеркивалось ранее, площадкой контакта является круг  $\Omega$  с центром в точке  $(x_0, 0)$  радиуса  $a$ , где  $x_0 = -DT_1/Q_1$ , областью сцепления – круг  $\Omega_2$  с центром в той же точке радиуса  $a_2$ , поэтому областью проскальзывания  $\Omega_1$  является кольцо  $\Omega \setminus \Omega_2$ . Поскольку  $\gamma = -2Ax_0$  зависит только от смещения  $x_0$ , то (при фиксированном значении силы  $Q_1$ ) угол наклона штампа увеличивается с ростом тангенциальной силы  $T_1$  или высоты  $D$  приложения этой силы и не изменяется при варьировании прочих исходных данных.

Рис. 2 – 4 показывают, что наибольшие значения касательных напряжений достигаются в точках, лежащих на границе области сцепления, а наибольшее значение нормального давления достигается в центре площадки контакта.

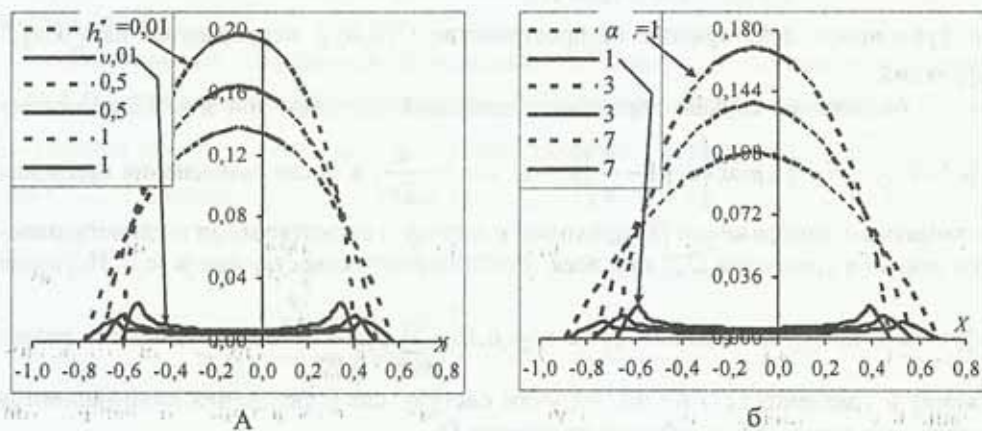


Рис. 2. Функции нормальных давлений  $p_1(x, 0)$  (штриховые линии) и функции касательных напряжений  $q_1(x, 0)$  (сплошные линии) при  $T_1 = 0,1Q_1$ ,  $D = 1$  см,  $\mu = 0,3$ : для а – при различных значениях коэффициента шероховатости  $h_1^*$ , при  $\alpha_1 = 3$ , б – при различных значениях коэффициента шероховатости  $\alpha_1$ , для  $h_1^* = 1$

Как видно из табл. 1, высота приложения тангенциальной силы  $D$  влияет на смещение  $x_0$  штампа вдоль  $Ox$ , а поэтому на смещение области контакта, смещение функции нормального давления и касательного напряжения вдоль этой оси, но не влияет на их числовые значения, также как не влияет на размеры площадок сцепления и проскальзывания, на значение  $\delta_x$  относительного смещения штампа вдоль оси  $Ox$ . С ростом расстояния  $D$  осадка штампа  $\delta$  уменьшается вплоть до поднятия вершины параболоидного штампа над поверхностью полупространства.

Уменьшение коэффициентов шероховатости  $h_1^*$  и  $\alpha_1$  приводит к уменьшению осадки штампа  $\delta$  и относительного смещения  $\delta_x$  вдоль оси  $Ox$ , уменьшению размеров областей проскальзывания и сцепления, увеличению наибольшего нормального давления, увеличению наибольшего касательного напряжения и значения касательного напряжения в центре площадки контакта (см. рис. 2 и табл. 1).

Таблиця 1

## Значения контактных характеристик для различных исходных данных

$\mu$	$Q_1, [см^2]$	$T_1, [см^2]$	Кoeffициенты шероховатости			$D, [см]$	$x_0, [см]$	$a, [см]$	$a_2, [см]$	$\delta, [см]$	$\delta_x, [см]$	$\gamma$						
			$h_1^*$	$h_1$	$\alpha_1$													
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	9	0	0	0,6704	0,5408	0,6188	0,6691	0					
							0,5	-0,05	0,6704	0,5408	0,6163	0,6691	0,1					
							3	-0,3	0,6704	0,5408	0,5288	0,6691	0,6					
							5	-0,5	0,6704	0,5408	0,3688	0,6691	1					
							7	-0,7	0,6704	0,5408	0,1288	0,6691	1,4					
							8	-0,8	0,6704	0,5408	-0,0212	0,6691	1,6					
			0,5	0,2987	3	9	-0,9	0,5974	0,4884	-0,2622	0,5942	1,8						
			1	0,6704			-0,9	0,6704	0,5408	-0,1912	0,6691	1,8						
			2	1,5670			-0,9	0,7835	0,6271	-0,0516	0,8060	1,8						
			3	2,6169			-0,9	0,8723	0,6966	0,0806	0,9346	1,8						
			0,3	0,1			$0,1Q_1$	1	0,5747	1	1	-0,1	0,5747	0,4762	0,5197	0,5677	0,2	
											3	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2	
5	-0,1	0,7370			0,5866	0,6866					0,7507	0,2						
7	-0,1	0,7894			0,6223	0,7559					0,8221	0,2						
0,3	0,1	$0,1Q_1$			1	0,0050					3	1	-0,1	0,4973	0,4314	0,4724	0,4879	0,2
													0,2	0,1085	-0,1	0,5427	0,4535	0,4964
			0,4	0,2322			-0,1	0,5805	0,4770	0,5238			0,5777	0,2				
			0,6	0,3680			-0,1	0,6134	0,4994	0,5519			0,6100	0,2				
			0,8	0,5145			-0,1	0,6431	0,5207	0,5803			0,6401	0,2				
1	0,6704	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2											
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	1	0	0,6704	0,6705	0,6188	0,6187	0						
							0,05	0,6704	0,5974	0,6163	0,6520	0,1						
							0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2						
							0,2	0,6704	0,4143	0,5788	0,6952	0,4						
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	1	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2						
0,2							-0,1	0,6704	0,4821	0,6088	0,6828	0,2						
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,3002	3	1	0,00863	-0,1	0,3002	0,2435	0,1128	0,1318	0,2					
							0,1	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2					
							0,2	-0,1	0,8395	0,6754	0,9649	1,0580	0,2					
							0,3	-0,1	0,9568	0,7684	1,2610	1,3830	0,2					
							0,4	-0,1	1,0500	0,8416	1,5230	1,6720	0,2					

С уменьшением значения тангенциальной силы увеличивается размер области сцепления при неизменном размере площадки контакта, а, следовательно, уменьшается область проскальзывания и относительное смещение  $\delta_x$ , осадка штампа  $\delta$  увеличивается, при этом функция нормального давления не изменяется, а функция касательных напряжений во всех точках области сцепления уменьшает свои значения (см. рис. 3, табл. 1). При нулевой тангенциальной силе область сцепления совпадает с площадкой контакта, а касательные напряжения отсутствуют. При увеличении коэффициента трения увеличивается размер области сцепления при неизменном размере площадки контакта, поэтому уменьшается область проскальзывания, при этом, осадка штампа  $\delta$  остается неизменной, а относительное смещение  $\delta_x$  увеличивается, функция нормальных давлений не изменяется, а функция касательных напряжений изменяется так, как показано на рис. 3, увели-

чивая наибольшее значение и значение в центре площадки контакта (см. рис. 4 и табл. 1).

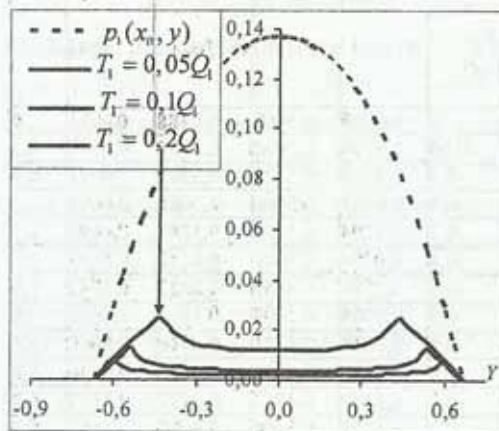


Рис. 3. Функция нормальных давлений  $p_1(x_0, y)$  (штриховая линия) и функции касательных напряжений  $q_1(x_0, y)$  (сплошные линии) для различных значений тангенциальной силы  $T_1$ , при  $D = 1$  см,  $\mu = 0,3$ ,  $h_1^* = 1$ ,  $\alpha_1 = 3$

перемещения полупространства. Это говорит о том, что при экспоненциальном законе деформирования микронеровностей шероховатости с увеличением силы углубления штампа в упругое полупространство увеличиваются в основном за счет именно этих составляющих и все в меньшей степени за счет смятия микронеровностей.

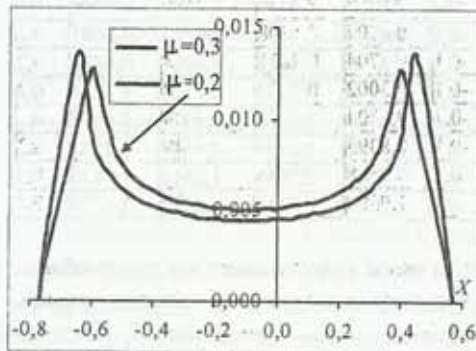


Рис. 4. Функции касательных напряжений  $q_1(x, 0)$  при различных значениях коэффициента трения  $\mu$ , при  $T_1 = 0,1Q_1$ ,  $D = 1$  см,  $h_1^* = 1$ ,  $\alpha_1 = 3$

На рис. 5 изображены графики углублений штампа в упругое полупространство с шероховатостью, полученные с учетом экспоненциального (сплошные линии) и степенного законов (штриховые линии). При этом в случае экспоненциального закона  $h_1^* = 1$ ,  $\alpha_1 = 3$ , в случае степенного —  $K = 1$ ,  $B_1 = \alpha_1 h_1^* = 3$ . Из графиков видно, что эти линии при малых  $Q_1$  касаются. При больших  $Q_1$  график углублений по экспоненциальному закону приближается к линии А, значение ординат которой равно  $h + ca_0^2$ , где  $a_0 = \sqrt[3]{3\pi Q_1 / (8c)}$ . Второе слагаемое этого значения характеризует упругие

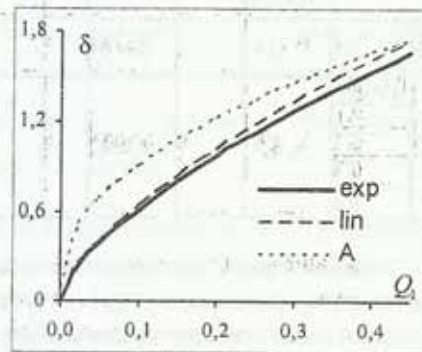


Рис. 5. Зависимость углубления от силы, действующей на штамп

Представляет интерес для дальнейшего изучения нерешенная задача контакта в условиях частичного проскальзывания упругого шероховатого полупространства со штампом другой геометрической формы.

### Библиографические ссылки

1. Бартенев Г.М. Трение и износ полимеров / Г.М. Бартенев, В.В. Лаврентьев. – М., 1972. – 240 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М., 1980. – 302 с.
3. Гоман О.Г. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості / О.Г. Гоман, С.Ф. Шишканова, Н.М. Д'яченко // Вісник Херсон. держ. техн. ун-ту. – 2003. – №3(19). – С.98–101.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М., 2001. – 478 с.
5. Дубошин Г.Н. Теория притяжения / Г.Н. Дубошин. – М. Физматгиз, 1961. – 288 с.
6. Дьяченко Н.Н. Задача о скольжении с трением параболического штампа по границе упругого шероховатого полупространства / Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова // Вісник Запор. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2008. – №1. – С. 66–75.
7. Дьяченко Н.Н. Решение задачи о вдавлении смещенной силой параболического штампа в упругое шероховатое полупространство / Н.Н. Дьяченко // Вісник Запор. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2006. – №1. – С. 16–25.
8. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М., 1984. – 752 с.
9. Крагельский И.В. Основы расчётов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М., 1977. – 576 с.
10. Шишканова А.А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / А.А. Шишканова // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102.
11. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М. – Л., 1949. – 270 с.
12. Hills D. A. Origins of partial slip in fretting – a revive of known and potential solution / D. A. Hills, G. Sosa // Proc. Roy. Soc. London A. – 1974. – V. 33. – P. 101–113.

Надійшло до редколегії 20.06.10

УДК 539.3

Н.М. Антоненко, І.Г. Величко

Запорізький національний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ ВІДКРИТОЇ ТРИЩИНИ МІЖ ШАРОМ ТА АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ

Розглядається плоска деформація пружного шару, зчепленого з абсолютно жорсткою півплощиною по всій межі спільної границі, за виключенням відрізка. Моделюється відкрита тріщина, яка заповнена пружною речовиною, під дією зосередженого нормального навантаження. Будуються інтегральні рівняння для різних випадків контактів берегів тріщини. Наводяться результати чисельного розв'язання отриманих гіперсингулярних рівнянь.

*Ключові слова:* тріщина, тріщина з пружною речовиною, пружний шар, зчеплений з жорсткою півплощиною.

Рассматривается плоская деформация упругого слоя, сцепленного с абсолютно жесткой полуплоскостью по всей линии плоской границы, за исключением отрезка. Моделируется открытая трещина, заполненная упругой средой под действием сосредоточенной нормальной на-