

### Библиографические ссылки

1. Бартенев Г.М. Трение и износ полимеров / Г.М. Бартенев, В.В. Лаврентьев. – М., 1972. – 240 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М., 1980. – 302 с.
3. Гоман О.Г. Задачі про штампи при різних законах деформування шорсткості / О.Г. Гоман, С.Ф. Шишканова, Н.М. Д'яченко // Вісник Херсон. держ. техн. ун-ту. – 2003. – №3(19). – С.98–101.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М., 2001. – 478 с.
5. Дубошин Г.Н. Теория притяжения / Г.Н. Дубошин. – М. Физматгиз, 1961. – 288 с.
6. Дьяченко Н.Н. Задача о скольжении с трением параболического штампа по границе упругого шероховатого полупространства / Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова // Вісник Запор. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2008. – №1. – С. 66–75.
7. Дьяченко Н.Н. Решение задачи о вдавлении смещенной силой параболического штампа в упругое шероховатое полупространство / Н.Н. Дьяченко // Вісник Запор. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2006. – №1. – С. 16–25.
8. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М., 1984. – 752 с.
9. Крагельский И.В. Основы расчётов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М., 1977. – 576 с.
10. Шишканова А.А. О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / А.А. Шишканова // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102.
11. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М. – Л., 1949. – 270 с.
12. Hills D. A. Origins of partial slip in fretting – a revive of known and potential solution / D. A. Hills, G. Sosa // Proc. Roy. Soc. London A. – 1974. – V. 33. – P. 101–113.

Надійшло до редколегії 20.06.10

УДК 539.3

Н.М. Антоненко, І.Г. Величко

Запорізький національний університет

### МОДЕЛЮВАННЯ ВІДКРИТОЇ ТРІЩИНИ МІЖ ШАРОМ ТА АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ

Розглядається плоска деформація пружного шару, зчепленого з абсолютно жорсткою півплощиною по всій межі спільної границі, за виключенням відрізка. Моделюється відкрита тріщина, яка заповнена пружною речовиною, під дією зосередженого нормального навантаження. Будуються інтегральні рівняння для різних випадків контактів берегів тріщини. Наводяться результати чисельного розв'язання отриманих гіперсингулярних рівнянь.

*Ключові слова:* тріщина, тріщина з пружною речовиною, пружний шар, зчеплений з жорсткою півплощиною.

Рассматривается плоская деформация упругого слоя, сцепленного с абсолютно жесткой полуплоскостью по всей линии плоской границы, за исключением отрезка. Моделируется открытая трещина, заполненная упругой средой под действием сосредоточенной нормальной на-

грузки. Строятся интегральные уравнения для различных случаев контакта берегов трещины. Приводятся результаты численного решения полученных гиперсингулярных уравнений.

*Ключевые слова:* трещина, трещина с упругим веществом, упругий слой, сцепленный с жесткой полуплоскостью.

The two-dimensional deformation of the elastic layer, coupled with absolutely rigid half-plane along the line of common border, with exception of interval, was considered. The open crack filled with elastic substance under action of normal pointed force is modeled. The integral equation for various cases of contact on the crack borders is developed. Results of obtained numerical solutions of hypersingular equations are presented.

*Key words:* open crack, crack filled with elastic substance, elastic layer linked with rigid half-plane.

**Постановка задачі та огляд публікацій.** Механічні напруження, які виникають у тілі під дією зовнішніх навантажень, можуть призвести до порушення структури матеріалу, утворення нових і росту наявних тріщин, а в результаті – до локального або повного руйнування конструкції та її елементів. Тому вивчення розподілу напружень у точках тіла поблизу тріщини має важливе значення в розрахунках на міцність і довговічність елементів конструкцій з тріщинами.

Основи теорії тріщин закладені в роботах Вестергарда, Снеддона, Баренблатта і Ірвіна. Результати теорії тріщин викладені в багатьох працях, серед яких зазначимо роботи М.І. Мусхелішвілі [5] та Г. П. Черепанова [9]. Сучасний огляд теорії тріщин можна знайти в монографії О.М. Гузя [3]. Для розв'язання задач теорії тріщин в основному використовують методи, які опираються на застосування ТФКЗ, опис яких можна знайти, наприклад, в [2; 5; 7].

У даній статті пропонується спосіб визначення напружено-деформованого стану (НДС) тіла поблизу тріщини, оснований на використанні методу інтегральних перетворень Фур'є. Запропонований підхід дозволяє розповсюдити отриманий розв'язок на випадок багатопланових основ. Подібна задача про визначення НДС вільної тріщини на межі розподілу пружного півпростору та шару розглянута В.М. Александровим та Д.А. Пожарским в [1].

У запропонованій моделі тріщини вважатимемо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега тріщини пропорційні нормальним напруженням зі змінним коефіцієнтом пропорційності. Запропонований підхід до моделювання тріщин дозволяє визначати НДС поблизу вільної тріщини і тріщини з наповнювачем.

Розглянемо пружний невагомий шар постійної товщини, який лежить на абсолютно жорсткій півплощині. Деформація шару плоска. Матеріал шару вважатимемо невагомим, однорідним і ізотропним. Уведемо декартову систему координат з початком на верхній межі шару. Вісь  $x$  спрямуємо вправо вздовж верхньої межі, вісь  $z$  спрямуємо перпендикулярно  $x$  у глибоку шару. Тобто, область, зайнята шаром, буде характеризуватися нерівностями  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq z \leq h$  (рис. 1).

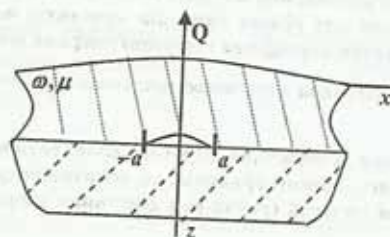


Рис. 1. Схема до постановки задачі



На нижній межі шару для  $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$  шар зчеплений з півплощиною, а при  $x \in (-a, a)$  маємо або вільну тріщину або тріщину заповнену пружною речовиною. Під дією зосередженого навантаження величиною  $Q$ , направлено перпендикулярно межі шару, тріщина розкривається.

Межові умови на верхній межі шару мають вигляд:

$$\sigma_z(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad (1)$$

де  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака.

Вважатимемо, що горизонтальні переміщення точок верхнього берега тріщини настільки малі, що ними можна знехтувати і, з урахуванням цього, межові умови на нижній межі шару мають вигляд

$$u(x, h) = 0, \quad (2)$$

$$w(x, h) = \begin{cases} A(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad (3)$$

де  $A(x) = (a^2 - x^2)^\eta f(x)$ .

Тут  $f(x)$  – функція класу  $C^2_{[-a, a]}$ ,  $\eta > 0$  – параметр, який визначає особливість поведінки функції  $w(x, h)$  поблизу вершин тріщини.

Для визначеності задачі необхідно знати напруження в точках верхнього берега тріщини. У рамках запропонованої моделі вважатимемо, що

$$\sigma_z(x, h) = y_\eta(x) f(x), \quad |x| < a. \quad (4)$$

Функція  $(a^2 - x^2)^\eta / y_\eta(x)$  – змінний коефіцієнт пропорційності між переміщеннями та напруженнями. Зазначимо, що особливість поведінки нормального напруження  $\sigma_z(x, h)$  поблизу вершини тріщини залежить від функції  $y_\eta(x)$ . Оскільки вона обирається неоднозначно, то її вибір визначає математичну модель задачі, тому її пропонується обирати таким чином, щоб отримані розв'язки співпадали з експериментальними, або, при відсутності таких, відповідали фізичному сенсу. При підході до неї із середини тріщини. Наприклад, для випадку вільної тріщини матимемо, що  $y_\eta(x) \equiv 0$ ,  $|x| < a$ . Для інших випадків функція  $y_\eta(x)$  буде визначатися у процесі розв'язання задачі.

Зв'язок між напруженнями та переміщеннями точок верхнього берега тріщини. Задачу будемо розв'язувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (5)$$

Як показано у [8], трансформанти напружень і переміщень точок шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

$$p\bar{w}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} \left[ ((2-\omega)shpz - \omega pzchpz)\alpha + 2(-\omega pzshpz + chpz)\beta + \right. \\ \left. + 2((1-\omega)shpz - \omega pzchpz)\gamma - \omega pzshpz\delta \right], \quad (6)$$

$$-i\xi\bar{u}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} \left[ \omega pzshpz\alpha + 2((1-\omega)shpz + \omega pzchpz)\beta + \right. \\ \left. + 2(\omega pzshpz + chpz)\gamma + ((2-\omega)shpz + \omega pzchpz)\delta \right], \quad (7)$$

$$-\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = (-(1-\omega)shpz + \omega pzchpz)\alpha + 2\omega pzshpz\beta + 2\omega(shpz + \\ + pzchpz)\gamma + (chpz + \omega pzshpz)\delta, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (chpz - \omega pzshpz)\alpha + 2\omega(shpz - pzchpz)\beta - 2\omega pzshpz\gamma - ((1- \\ -\omega)shpz + \omega pzchpz)\delta. \quad (9)$$

$$\text{Тут } \alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \beta = \mu p\bar{w}(\xi, 0), \gamma = -i\xi\bar{u}(\xi, 0), \delta = -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi, 0). \quad (10)$$

Застосуємо пряме перетворення Фур'є (5) до співвідношень (2), (3):

$$\begin{cases} \bar{u}(\xi, h) = 0, \\ \bar{w}(\xi, h) = \int_{-a}^a A(x) e^{i\xi x} dx = M(\xi). \end{cases} \quad (11)$$

Дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha$  і  $\delta$  можна знайти з межових умов (1) на верхній межі шару

$$\alpha = \overline{Q\delta(x)} = Q, \delta = 0. \quad (12)$$

Підставимо до лівих частин співвідношень (11) вирази для трансформант переміщень (6), (7) та (12). Отримаємо систему відносно функцій  $\beta$  і  $\gamma$ , розв'язок якої має вигляд

$$\beta = \frac{2\mu p(p_1\omega S + C)M(\xi) + (p_1\omega + (\omega - 2)SC)Q}{2(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}, \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{2\mu p((\omega - 1)S - \omega p_1 C)M(\xi) + (-p_1^2\omega^2 + (\omega^2 - 3\omega + 2)S^2)Q}{2(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}. \quad (14)$$

Тут  $p_1 = ph$ ,  $S = sh(p_1)$ ,  $C = ch(p_1)$ .

Нормальне напруження на нижній межі шару можна знайти із співвідношення

$$\sigma_z(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_z(\xi, h) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (15)$$

З урахуванням (12), (13) і (14) перепишемо (15) у наступному вигляді

$$\sigma_z(x, h) = G(x) + g(x). \quad (16)$$

Тут

$$G(x) = \frac{\mu\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(-p_1 + SC)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \tilde{\omega} = \omega(2 - \omega),$$

$$g(x) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega p_1 S + C}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} \cos(px) dp. \quad (17)$$

Перетворимо доданок  $G(x)$ . Замінімо  $M(\xi)$  його інтегральним представленням (11) та змінимо порядок інтегрування

$$G(x) = \frac{\mu\omega}{\pi} \int_{-a}^a A(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(-p_1 + SC)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} e^{i\xi(t-x)} d\xi \right] dt. \quad (18)$$

Оскільки при  $p = |\xi| \rightarrow \infty$  вираз

$$L(p) = \frac{p(-p_1 + SC)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2} - \frac{p}{\tilde{\omega}} = -\frac{\tilde{\omega} p(2p_1 + e^{-2p_1}) + p(2 - \tilde{\omega} + 2\omega^2 p_1^2)}{2\tilde{\omega}(1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2)} \rightarrow 0,$$

то зручно ввести позначення

$$R_1(t-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(p) e^{-i\xi(t-x)} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} L(p) \cos p(t-x) dp,$$

$$R_2(t-x) = \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) dp, \quad T = -\frac{2\mu}{\pi(2-\omega)},$$

після чого (18) набуде вигляду

$$G(x) = T \int_{-a}^a A(t) [R_1(t-x) - R_2(t-x)] dt. \quad (19)$$

Інтеграл  $R_2(t-x)$  розбігається, і його будемо розуміти в наступному сенсі

$$R_2(t-x) = \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) dp = \lim_{q \rightarrow 0+0} \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) e^{-q p} dp =$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{q^2 - (t-x)^2}{(q^2 + (t-x)^2)^2} = -\frac{1}{(t-x)^2}.$$

Оскільки інтеграл  $\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt$  при  $x=t$  має неінтегровану особливість, то скористаємось формальною рівністю

$$\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt = - \int_{-a}^a A(t) d\left(\frac{1}{t-x}\right) = -\frac{A(t)}{t-x} \Big|_{-a}^a + \int_{-a}^a \frac{d(A(t))}{t-x} = \int_{-a}^a \frac{A'(t) dt}{t-x}.$$

Математичне обґрунтування такої регуляризації наведено, наприклад, в [4]. Використано той факт, що береги тріщини зникаються, і, отже,  $A(\pm a) = 0$ .



Таким чином, маємо такий зв'язок між нормальними напруженнями в точках верхнього берега тріщини  $\sigma_z(x, h)$  та нормальними переміщеннями  $A(x)$  точок верхнього берега тріщини

$$\sigma_z(x, h) = T \left[ \int_{-a}^a A(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{A'(t)}{t-x} dt \right] + g(x). \quad (20)$$

Дослідження особливостей поведінки напружень поблизу вершини тріщини. З урахуванням (3) співвідношення (20) приведемо до вигляду:

$$\sigma_z(x, h) = T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{[(a^2 - t^2)^\eta f(t)]'}{t-x} dt \right] + g(x). \quad (21)$$

З'ясуємо, як поводить себе нормальне напруження  $\sigma_z(x, h)$  при  $x \rightarrow a-0$  та при  $x \rightarrow a+0$ . Оскільки функції  $f(x)$ ,  $R_1(t-x)$  і  $g(x)$  – обмежені, то поведінка нормального напруження залежатиме лише від поведінки функції

$$N_f(x) = \int_{-a}^a \frac{[(a^2 - t^2)^\eta f(t)]'}{t-x} dt.$$

Форма відкритої тріщини в околі її вершини при  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = 1$  і  $\eta = \frac{3}{2}$  відповідатиме випадкам зображеним на рис. 2, а, 2, б і 2, в, відповідно.

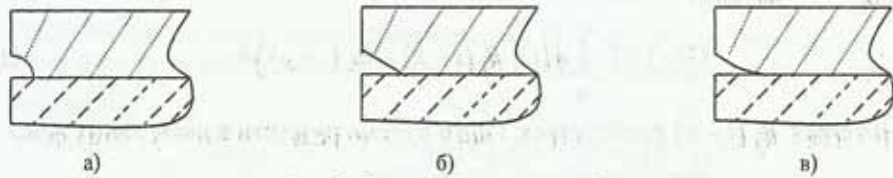


Рис. 2. Форма тріщини в околі її вершини

Оцінимо поведінку функції  $N_f(x)$  для трьох випадків значень параметра  $\eta$ .

При  $\eta = \frac{1}{2}$  в околі вершини берег тріщини перпендикулярний лінії тріщини, і ми маємо так звану «каверну» [3]

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{[\sqrt{a^2 - t^2} f(t)]'}{t-x} dt &= - \int_{-a}^a \frac{t f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} + \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f'(t) dt}{t-x} = \\ &= - \int_{-a}^a \frac{[t f(t) - t f(x) + t f(x)] dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-a}^a \frac{[\sqrt{a^2 - t^2} f'(t) - \sqrt{a^2 - t^2} f'(x) + \sqrt{a^2 - t^2} f'(x)] dt}{t - x} = \\
& = - \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - f(x) \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - x f(x) \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} + \\
& + \int_{-a}^a f''(\xi) \sqrt{a^2 - t^2} dt + f'(x) \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x}.
\end{aligned}$$

Оскільки  $f'(\xi)$ ,  $f''(\xi)$  – обмежені функції та

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x} &= \begin{cases} -\pi x, & |x| < a, \\ \pi \left[ \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{|x|} - x \right], & |x| > a, \end{cases} \\
\int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} &= \begin{cases} 0, & |x| < a, \\ -\frac{\pi x}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a, \end{cases}
\end{aligned}$$

то отримаємо наступні асимптотичні формули:

$$N_f(x) = O(1) \Rightarrow \sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a - 0.$$

$$N_f(x) = \frac{\pi f(a) \sqrt{2a}}{2\sqrt{r}} + O(1) \Rightarrow \sigma_z(x, h) = -\frac{\mu f(a) \sqrt{2a}}{(2 - \omega)\sqrt{r}} + O(1), \text{ } r = x - a,$$

при  $x \rightarrow a + 0$ .

Аналогічно отримано асимптотичні формули для  $\eta = 1$  (берег тріщини нахилений під кутом до лінії тріщини) і  $\eta = \frac{3}{2}$  (береги тріщини плавно зникаються).

При  $\eta = 1$ :

$$\sigma_z(x, h) = O(1) - 2af(a)T \ln r, \text{ } r = a - x, \text{ при } x \rightarrow a - 0.$$

$$\sigma_z(x, h) = O(1) - 2af(a)T \ln r, \text{ } r = x - a, \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

При  $\eta = \frac{3}{2}$ :

$$\sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a - 0,$$

$$\sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

На основі асимптотичних формул можна прийти до висновку, що поведінка нормальних напружень при підході до вершини тріщини з внутрішнього та зовнішнього боків для випадків  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$  узгоджуються з результатами, наведеними в [5]. У випадку вільної тріщини напруження  $\sigma_z$  на верхньому березі тріщини нульові, отже, при цьому випадок, зображений на рис. 2, б, неможливий.

На основі асимптотичних оцінок при  $x \rightarrow a + 0$  можна отримати формули для обчислення коефіцієнтів концентрації напружень (КІН):

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_z(r, 0) = -\frac{2\mu \sqrt{a\pi} f(a)}{(2-\omega)}, \text{ при } \eta = \frac{1}{2},$$

$$k_1 = 0, \text{ при } \eta = 1 \text{ і при } \eta = \frac{3}{2}.$$

**Випадок вільної тріщини.** Із співвідношення (21) отримуємо інтегро-диференціальне рівняння відносно невідомої функції  $f(x)$

$$T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] = -g(x). \quad (22)$$

Невідому функцію шукатимемо у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \rho_i S_{2i}(x), \quad (23)$$

де  $S_{2i}(x)$  – поліноми, які обираються залежно від значення параметра  $\eta$ .

Використавши спектральні співвідношення [6], можна показати, що функції

$$F_i(x) = \int_{-a}^a \frac{\left[ S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta \right]'}{t-x} dt \quad (24)$$

є лінійними комбінаціями поліномів Чебишова другого роду при  $\eta = \frac{1}{2}$  або першого роду при  $\eta = \frac{3}{2}$ .

З врахуванням формул (23) та (24) перепишемо співвідношення (22) у наступному вигляді

$$T \sum_{i=0}^n \rho_i \left[ \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta R_1(t-x) dt + F_i(x) \right] = -g(x). \quad (25)$$

Невідомі величини  $\rho_i$  у цьому рівнянні можна визначити, розкладаючи ліву та праву частини в лінійну комбінацію поліномів Чебишова та прирівнюючи коефіцієнти при однакових поліномах Чебишова.

**Випадок тріщини з наповнювачем.** Для випадку моделі тріщини з наповнювачем  $\sigma_z(x, h) \neq 0$ , при  $|x| < a$ . Як зазначено вище, в рамках запропонованої моделі вважаємо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега тріщини пропорційні нормальним напруженням, зі змінним коефіцієнтом пропорційності. Інтегральне рівняння для визначення функції  $f(x)$  має вигляд



$$y_\eta(x) f(x) = T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] + g(x).$$

Із асимптотичних формул випливає, що для випадку  $\eta = \frac{1}{2}$  функція  $y_\eta(x)$  обмежена при  $x \rightarrow \pm a$ , тому вважатимемо  $y_\eta(x) = -c = \text{const}$ , тобто

$$\sigma_z(x, h) = -cf(x), |x| < a. \quad (26)$$

При  $\eta = 1$  напруження мають логарифмічну особливість і вважатимемо, що  $y_\eta(x) = -c \ln(a^2 - x^2)$ , тобто

$$\sigma_z(x, h) = -c \ln(a^2 - x^2) f(x), |x| < a. \quad (27)$$

Підставимо співвідношення (26) і (27) в (21), отримаємо:

при  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \kappa \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] - bg(x), \quad (28)$$

при  $\eta = 1$

$$\ln(a^2 - x^2) f(x) = \kappa \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2) f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2) f(t) \right]'}{t-x} dt \right] - bg(x), \quad (29)$$

де  $\kappa = \frac{2\mu b}{\pi(2-\omega)}$ ,  $b = \frac{1}{c}$ .

Метод розв'язання – аналогічний тому, який використовувався у випадку вільної тріщини. Аналоги співвідношень (25) при цьому мають вигляд:

$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[ S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta R_1(t-x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x), \quad (30)$$

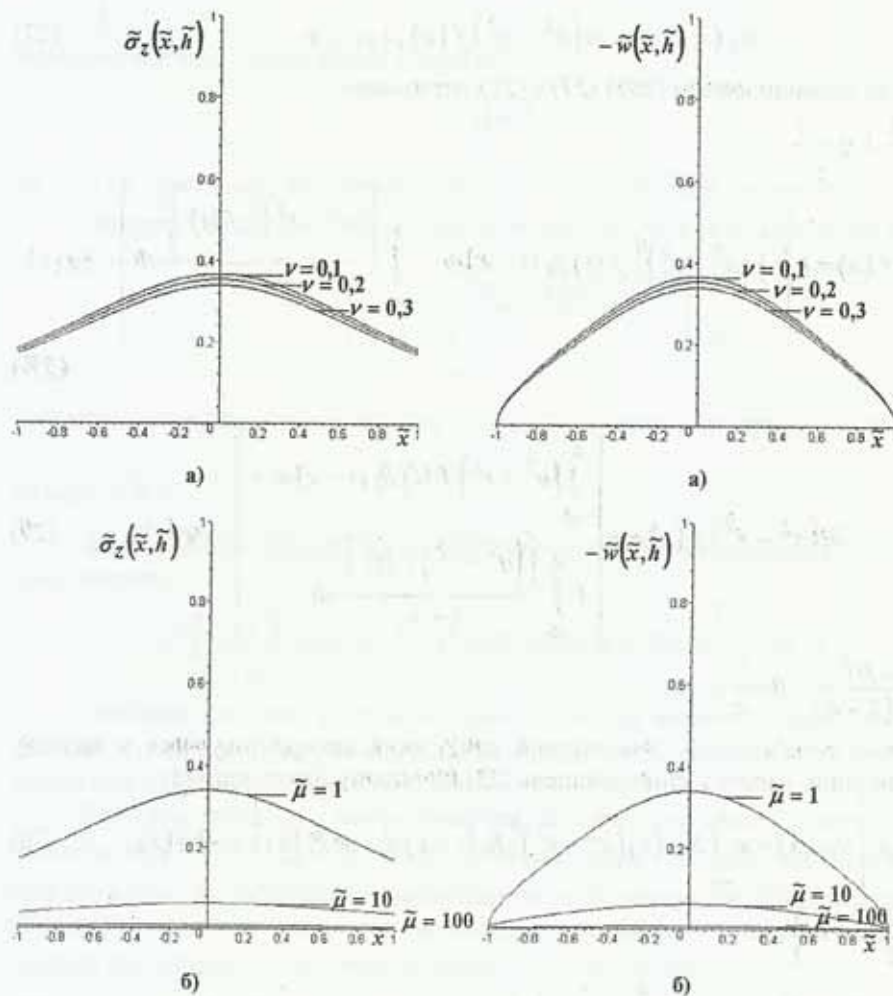
при  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$ ,

$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[ \ln(a^2 - x^2) S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2) R_1(t-x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x), \quad (31)$$

при  $\eta = 1$ .

**Чисельні приклади.** Розглянемо тріщину з пружним наповнювачем, яка знаходиться на межі розподілу пружного шару та абсолютно жорсткого півпростору (рис. 1). Довжина тріщини  $2a$ . Шар знаходиться під дією нормального зосередженого навантаження величини  $Q$ .

Для числових розрахунків введено безрозмірні величини  $\bar{h} = h/a$ ,  $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{\mu} = \mu a/Q$ ,  $\bar{b} = bQ/a$ ,  $\bar{\sigma}_z(\bar{x}, \bar{h}) = \sigma_z(x, h) a/Q$ ,  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{h}) = w(x, h)/a$ . Нижче наведено графіки нормальних напружень  $\bar{\sigma}_z(\bar{x}, \bar{h})$  (рис. 3, а, б, в, г) і вертикальних переміщень  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{h})$  (рис. 4, а, б, в, г) точок верхнього берега тріщини при  $\eta = \frac{1}{2}$ .



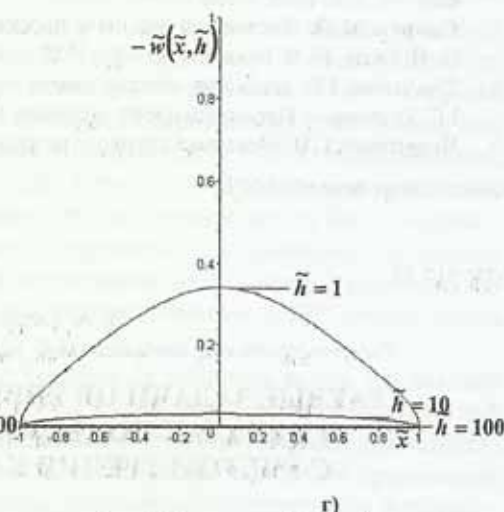
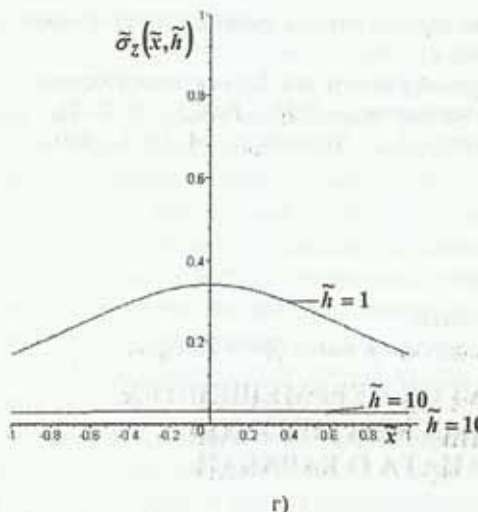
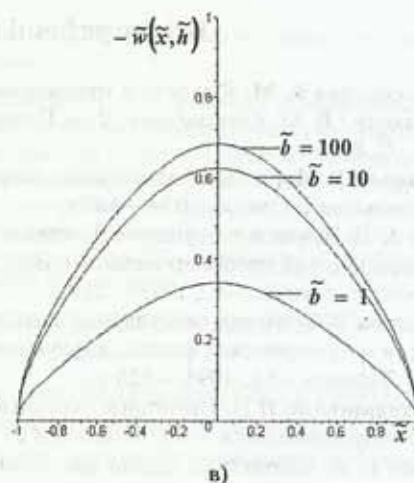
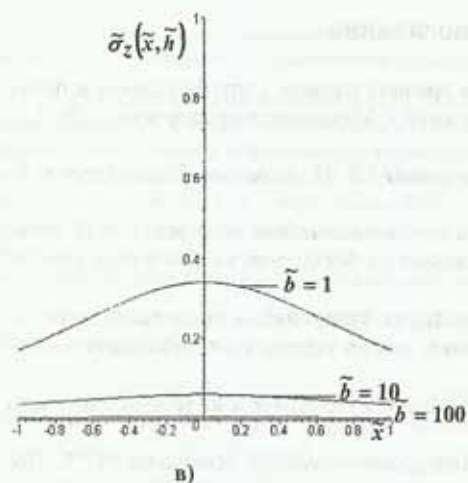


Рис. 3. Нормальні напруження

Рис. 4. Вертикальні переміщення

Аналіз графіків показує, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона  $\nu$ , модуля зсуву  $\tilde{\mu}$  та товщини шару  $\tilde{h}$  спостерігається зменшення нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h})$  та вертикальних переміщень  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h})$  точок верхнього берега тріщини, при збільшенні коефіцієнта пружності  $\tilde{b}$  нормальні напруження  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h})$  в точках верхнього берега тріщини зменшуються, а вертикальні переміщення  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h})$  збільшуються. Отримані результати не суперечать фізичному сенсу.

**Висновок.** У статті пропонується спосіб визначення НДС шару поблизу тріщини нормального відриву, яка знаходиться на межі пружного шару та абсолютно жорсткої півплощини. Для розв'язку задачі використано метод інтегральних перетворень Фур'є. Задача зводиться до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння. В рамках запропонованої моделі отримано результати, які узгоджуються з отриманими іншими авторами.



### Бібліографічні посилання

1. Александров В. М. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полу-плоскости / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Механика твердого тела. – 2001. – №1. – С. 86–93.
2. Астафьев В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара, 2004. – 562 с.
3. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь. (Неклассические проблемы механики разрушения : в 4-х т., 5-ти кн. [Под общ. ред. А. Н. Гузя]; т. 4, кн. 2). – К., 1993. – 238 с.
4. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. – М., 1995. – 520 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 708 с.
6. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – К.: О., 1982. – 168 с.
7. Саврук М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – К., 1989. – 248 с.
8. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І. Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.
9. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М., 1974. – 640 с.

Надійшла до редколегії 11.06.10

УДК 517.91

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В КАНАТАХ ПОДЪЕМНЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КАНАТА О БАРАБАН

Розглянуто основні варіанти постановки крайових задач математичної фізики про рух пружних хвиль у канатах змінної довжини стосовно до механізмів, які здійснюють піднімання або опускання вантажів з їхньою допомогою. Ураховано тертя каната по поверхні барабана, а також можливість прослизання каната по барабану, тому рівняння стану каната виявляються різними на барабані та по-за його межами. Крайові умови в задачах точно враховують зміну границь області інтегрування рівнянь стану, а також характер взаємодії каната з вантажем. Передбачено можливість намотування каната з дозвуковими, звуковими, надзвуковими і довільними швидкостями.

*Ключові слова:* механіка тіл змінної довжини, пружні хвилі в канатах, тертя каната з барабаном, намотування з повільною швидкістю.

Рассмотрены основные варианты постановки краевых задач математической физики о движении упругих волн в канатах переменной длины применительно к механизмам, осуществляющим подъем или опускание грузов с помощью канатов. Учтено трение каната о поверхность барабана, а также возможность проскальзывания каната по барабану, поэтому уравнения состояния оказываются разными на барабане и за пределами. Краевые условия в этих задачах точно учитывают смену границ области интегрирования уравнений состояния, а также характер взаимодействия каната с грузом. Предусмотрена возможность наматывания каната с дозвуковыми, звуковыми, сверхзвуковыми и произвольными скоростями.

© В. А. Остапенко, 2011