

Бібліографічні посилання

1. Александров В. М. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Механика твердого тела. – 2001. – №1. – С. 86–93.
2. Астафьев В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара, 2004. – 562 с.
3. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь. (Неклассические проблемы механики разрушения : в 4-х т., 5-ти кн. [Под общ. ред. А. Н. Гузя]; т. 4, кн. 2). – К., 1993. – 238 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. – М., 1995. – 520 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966. – 708 с.
6. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – К.: О., 1982. – 168 с.
7. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – К., 1989. – 248 с.
8. Ткаченко І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.
9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М., 1974. – 640 с.

Надійшла до редколегії 11.06.10

УДК 517.91

В. А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В КАНАТАХ ПОДЪЕМНЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КАНАТА О БАРАБАН

Розглянуто основні варіанти постановки крайових задач математичної фізики про рух пружних хвиль у канатах змінної довжини стосовно до механізмів, які здійснюють піднімання або опускання вантажів з їхньою допомогою. Ураховано тертя каната по поверхні барабана, а також можливість прослизання каната по барабану, тому рівняння стану каната виявляються різними на барабані та по-за його межами. Крайові умови в задачах точно враховують зміну границь області інтегрування рівнянь стану, а також характер взаємодії каната з вантажем. Передбачено можливість намотування каната з дозвуковими, звуковими, надзвуковими і довільними швидкостями.

Ключові слова: механіка тіл змінної довжини, пружні хвилі в канатах, тертя каната з барабаном, намотування з повільною швидкістю.

Рассмотрены основные варианты постановки краевых задач математической физики о движении упругих волн в канатах переменной длины применительно к механизмам, осуществляющим подъем или опускание грузов с помощью канатов. Учтено трение каната о поверхность барабана, а также возможность проскальзывания каната по барабану, поэтому уравнения состояния оказываются разными на барабане и за пределами. Краевые условия в этих задачах точно учитывают смену границ области интегрирования уравнений состояния, а также характер взаимодействия каната с грузом. Предусмотрена возможность наматывания каната с дозвуковыми, звуковыми, сверхзвуковыми и произвольными скоростями.

© В.А. Остапенко, 2011

Ключевые слова: механика тел переменной длины, упругие волны в канатах, трение каната с барабаном, наматывание с произвольной скоростью.

The basic variants on statement of initial-boundary value problems of mathematical physics about movement of elastic waves in ropes of variable length with respect to the devices which are carrying out rise or lowering of cargoes with the help of ropes are considered. Friction of a rope on a surface of a drum, and also an opportunity of frictional sliding a rope on a drum is taken into account therefore the state equations of a rope appear different on a drum and behind its limits. Boundary conditions in these problems precisely take into account change of integration area borders of the state equations, and also character of interaction of a rope with a cargo. The opportunity of winding of a rope with subsonic, sound, supersonic and arbitrary speeds is stipulated.

Key words: mechanics of variable length bodies, elastic waves in ropes, friction of a rope with a drum, winding with arbitrary speed.

Введение. Исследование динамического поля напряжений в канатах подъемных устройств, таких как лифты и шахтные подъемники, представляет важную для практического применения задачу. Поэтому, изучению проблемы вычисления динамических напряжений, возникающих в канатах, посвящено большое количество работ. Оказалось, что без учета изменения длины, по существу, не удастся получить модель системы, состоящей из каната и барабана, достаточно адекватную натурной. Кроме того, стало ясно, что неизбежно возникающие в канатах разрывы напряжений можно исследовать лишь с помощью построения решения в виде распространяющихся волн. Такое исследование проведено в [1 – 5] в предположении, что сила трения каната о барабан настолько велика, что его проскальзывание по барабану не может происходить. При таком предположении задача была сведена к решению волнового уравнения в области с переменными границами. Благодаря разработанному методу построения волн, отражаемых от подвижной границы, было получено точное решение такой задачи, представляющее собой совокупность распространяющихся волн.

Если коэффициент трения каната о барабан не слишком велик, происходит проскальзывание каната по барабану [6]. В этом случае упругие перемещения в той части каната, которая намотана на барабан, описываются телеграфным уравнением, в то время как перемещения в висящей части описываются волновым уравнением. Поэтому, в данном случае возникает система с переменной структурой и подвижными границами. Точная формулировка и последующее решение такой проблемы представляют несомненный интерес.

Математическая модель. В создаваемой здесь математической модели канат рассматривается как гибкая нить. Пусть канат, подвешенный вертикально и имеющий общую длину L , в начальный момент времени $t = 0$ начинает наматываться на барабан. К концу его подвешен груз массы m , то есть вес груза $G = m g$, где g – ускорение силы тяжести. Начало координат оси x находится в точке прикрепления конца каната к барабану до начала движения и в течение всего периода движения каната и барабана является неподвижным. Ось x на барабане проходит вдоль оси каната, вне барабана также проходит по оси каната, но направлена вертикально вниз. При $t = 0$ часть каната длиной l_0 намотана на барабан. В этот же момент времени канат начинает наматываться на барабан с угловой скоростью $\omega(t)$ и угловым ускорением $\varepsilon(t)$, то есть

$$\omega(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + \omega(0) . \quad (1)$$

Если r – радиус оси каната на барабане, то линейное перемещение каната будет осуществляться со скоростью

$$V(t) = \omega(t)r = r \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + r\omega(0) . \quad (2)$$

При отсутствиі проскальзвання каната по барабану все его точки, если канат рассматривать как абсолютно жесткое тело, будут получать перемещение

$$v(t) = r \int_0^t \int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau ds + r\omega(0)t + v(0) . \quad (3)$$

Таким образом, положение $U(x,t)$ любой точки каната, имевшей до начала движения координату x , будет определяться выражением

$$U(x,t) = x + u(x,t) - v(t) , \quad (4)$$

где $u(x,t)$ – упругие перемещения точек каната.

Рассмотрим состояние динамического равновесия вырезанного из вертикальной части каната его отрезка, заключенного между координатами x и $x + dx$. Со стороны оставшейся части каната на него действуют растягивающие усилия $P(x,t)$ и $P(x+dx,t)$. Кроме того, канат является весомым, то есть к нему приложена массовая сила $q(x,t) = g$, направленная вдоль оси x (рис. 1).

Растягивающие усилия в канате определяются следующим образом:

$$P(x,t) = \sigma(x,t)S; \quad P(x + dx,t) = \sigma(x + dx,t)S ,$$

где S – площадь поперечного сечения каната, а напряжение $\sigma(x,t)$ вычисляется с помощью закона Гука

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) .$$

Здесь E – модуль Юнга, $\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ – относительная деформация каната.

Поэтому

$$P(x,t) = ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}; \quad P(x + dx,t) = ES \frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} . \quad (5)$$

Равнодействующая сил, приложенных к вырезанному отрезку каната, равна

$$R = P(x + dx,t) - P(x,t) + \rho_1 dx q(x,t) .$$

Здесь ρ_1 – линейная плотность каната. Заметим, что линейная плотность каната связана с его объемной плотностью ρ соотношением $\rho_1 = \rho S$. Следовательно, по второму закону Ньютона

$$R = \rho_1 dx \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} .$$

Подставляя сюда значение R и учитывая равенства (5), получим

$$ES \left(\frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + g \rho_1 dx = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \rho_1 dx .$$

Применив к последнему равенству теорему о среднем

$$\frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x + \theta dx,t)}{\partial x^2} dx ,$$

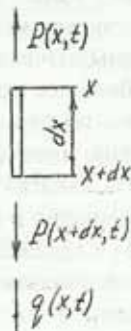


Рис.1. Схема нагружения элемента каната

где $0 < \theta < 1$, и перейдя к пределу при $dx \rightarrow 0$, после введения обозначения

$$a^2 = \frac{E}{\rho}$$

приведем это равенство к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g}{a^2} \quad (6)$$

Из равенства (4) следует

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \varepsilon(t)r \quad (7)$$

Подставив эти значения в равенство (6), получим уравнение для упругих перемещений в вертикальной части каната

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g(x,t)}{a^2} - \frac{\varepsilon(t)r}{a^2} \quad (8)$$

Учтя ранее введенное значение массовой силы $q(x,t)$, уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g + \varepsilon(t)r}{a^2} \quad (9)$$

Учтя равенства (7), уравнение (6) можно также записать в виде

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g}{a^2} \quad (10)$$

На части каната, намотанной на барабан, вес каната уравновешивается реакцией наружной поверхности барабана. Поэтому вдоль оси x вес каната не действует.

Канат рассматривается как гибкая нить, намотанная на барабан радиуса r . Вследствие наличия растягивающего канат усилия $P(x,t)$ возникает давление каната на барабан. Давление на единицу длины каната, обозначим через $p(x,t)$. В свою очередь, наличие давления каната на барабан вызывает появление силы трения каната о барабан при попытке проскальзывания каната по барабану. Направление силы трения будет противоположным направлению проскальзывания каната по барабану. Такое проскальзывание обусловлено упругими перемещениями в канате.

Ось x направим вдоль каната в сторону поднимаемого канатом груза. Положительное направление упругих перемещений в канате, обозначаемых $u(x,t)$, будем полагать совпадающим с положительным направлением оси x . Следует учесть также, что канат движется вместе с барабаном, поэтому перемещения точек каната относительно барабана будут определяться только упругими перемещениями $u(x,t)$. Тогда отнесенная к единице длины каната сила трения $f(x,t)$ будет иметь направление, противоположное $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ и определяться выражением

$$f(x,t) = -\beta p(x,t) \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) \quad (11)$$

где β – коэффициент трения каната о барабан.

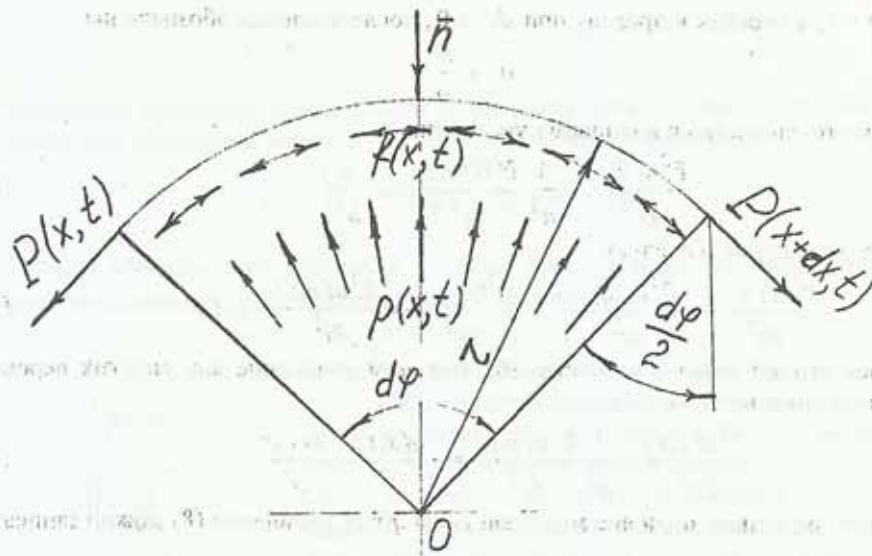


Рис. 2. Схема действия сил на барабане

Рассмотрим элемент барабана с канатом, заключенный между углом $d\varphi$ (рис. 2). Учитывая, что канат рассматривается как гибкая нить, то есть его выпрямление не приводит к появлению дополнительных усилий, для выпрямленного каната по второму закону Ньютона для сил, действующих на этом участке, получим равенство

$$P(x+dx) + f(x,t)dx - P(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (12)$$

Следует учесть, что $x = r\varphi$; $dx = r d\varphi$. Относительное удлинение каната при упругих деформациях по-прежнему определяется равенством $\varepsilon = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, а усилия в канате – равенствами (5). Поэтому, применив к равенству (12) теорему о среднем и переходя к пределу при $dx \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{ES} f(x,t) \quad (13)$$

Выразим также линейную силу трения $f(x,t)$ через упругие перемещения. Заметим, прежде всего, что путем проектирования на направление \bar{n} (рис. 2) удастся выразить линейное давление $p(x,t)$ через усилие $P(x,t)$:

$$p(x,t)dx = P(x+dx,t) \sin \frac{d\varphi}{2} + P(x,t) \sin \frac{d\varphi}{2} \quad (14)$$

Учтя, что по теореме о среднем

$$P(x+dx,t) - P(x,t) = P_x(x+\theta dx)dx$$

где $0 < \theta < 1$, а также тот факт, что $dx = r d\varphi$, получим отсюда

$$p(x,t) = \frac{1}{r} [P_x(x, \theta dx, t) r d\varphi + 2P(x,t)] \frac{\sin \frac{d\varphi}{2}}{\frac{d\varphi}{2}} \quad (14)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $d\varphi \rightarrow 0$, получим

$$p(x,t) = \frac{P(x,t)}{r} \quad (15)$$

С учетом (5) получим

$$p(x,t) = \frac{ES}{r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (16)$$

поэтому формула (11) примет вид

$$f(x,t) = -\frac{\beta ES}{r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) \quad (17)$$

Подставив это значение $f(x,t)$ в уравнение (13), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) \quad (18)$$

Наконец, применив к (18) второе равенство (7), получим уравнение, описывающее упругие перемещения в канате, наматываемом на барабан

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(t)r}{a^2} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) \quad (19)$$

Уравнение (19) удобно рассматривать в стандартном виде телеграфного уравнения, в данном случае нелинейного

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon(t)r}{a^2} \quad (20)$$

Таким образом, в висящей части каната упругие перемещения определяются как решение волнового уравнения (9) или (10), а в части каната, навитой на барабан – как решения нелинейного телеграфного уравнения (20).

Краевые условия. Возможны несколько вариантов постановки краевых задач для рассматриваемой системы. Мы полагаем, что основными из них являются три следующих варианта: перед началом движения груз висит на канате; перед началом движения груз покоится на опоре, но канат выбран; перед началом движения груз покоится на опоре, а канат провисает. Этим не исчерпываются все возможные варианты начальных состояний системы, однако мы предполагаем, что остальные варианты постановки краевых задач могут быть получены как комбинация этих трех основных вариантов.

Для любого из этих вариантов будем полагать, что система разгоняется из некоторого начального состояния, определяемого начальными условиями

$$U(x, 0) = \varphi(x) ; \quad U_t(x, 0) = \psi(x) . \quad (21)$$

Верхний конец каната, имеющий при $t = 0$ координату $x = 0$, прикреплен к барабану, поэтому его перемещение при $t > 0$ будет определяться выражением

$$U(0, t) = -v(t) . \quad (22)$$

Во всех вариантах будет предполагаться, что система разгоняется из начального состояния равновесия и покоя, то есть, что $v(0) = 0$; $\omega(0) = 0$.

Вариант 1. Груз висит на канате. До начала намотки каната на барабан, то есть при $t < 0$, груз уже был подвешен к канату и в канате установились статические перемещения $u_s(x)$ и напряжения $\sigma_s(x)$. В этом варианте к нижнему концу каната, имеющему при $t = 0$ координату $x = L$, приложены три силы. Во-первых, это вес концевого груза $G = mg$. Во-вторых, сила инерции груза, возникающая при разгоне или торможении барабана. Если рассматривать канат как абсолютно твердое тело и полагать, что угловое ускорение вращения барабана $\varepsilon(t)$ направлено в сторону навивки каната, то линейное ускорение груза (а также и каната) $b(t) = \varepsilon(t)r$ и направлено вертикально вверх. Таким образом, инерционная составляющая в тяговом усилии каната, связанная с ускорением барабана, равна

$$F_b(t) = mb(t)$$

и направлена как и $b(t)$ вверх. Если канат разрезать в нижнем его сечении, то для сохранения равновесия к его нижнему концу нужно приложить усилие $F_b(t)$, направленное вниз.

В третьих, на нижнем конце каната действует сила инерции груза, возникающая вследствие упругих перемещений каната в точке его соединения с грузом. Так как положительное направление упругих перемещений принято совпадающим с положительным направлением оси x , ускорение u_{tt} будет также направлено вдоль оси x вниз. А поскольку $b(t)$ и u_{tt} имеют разные направления, сила инерции груза, возникающая вследствие упругих перемещений в канате, будет равна

$$F_u(x, t) = -mu_{tt}(x, t) .$$

Таким образом, равнодействующая сил, приложенных к концу каната, с учетом его движения равна

$$G + F_b + F_u = m(g + \varepsilon(t)r - u_{tt}(L - v(t), t)) .$$

Эта равнодействующая уравновешивается натяжением каната

$$P(x, t) = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} .$$

Поэтому в точке $x = L - v(t)$ справедливо равенство

$$P(L - v(t), t) = G + F_b + F_u ,$$

откуда следует краевое условие на нижнем конце каната

$$ux(L - v(t), t) = \frac{m}{ES} (g + \varepsilon(t)r - u_{tt}(L - v(t), t)) . \quad (23)$$

При постановке краевой задачи следует учесть, что точка начального контакта каната с барабаном в неподвижной системе координат Ox не перемещается и имеет постоянную координату $x = l_0$. При $t > 0$ область, занимаемая канатом, определяется интервалом $-v(t) < x < L - v(t)$. Таким образом, оказывается, что краевая задача об упругих перемещениях в канате, поднимающем груз и наматываемом на барабан, ставится следующим образом. В области $-v(t) < x < L - v(t)$, $t > 0$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, t)$, такую, которая при $-v(t)$

$x < l_0$ удовлетворяет уравнению (20), а при $l_0 < x < L - v(t)$ – уравнению (9), а также крайвым и начальным условиям (21), (22) и (23). Кроме того, в точке $x = l_0$ должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций:

$$v(l_0, t) = w(l_0, t); \quad v_x(l_0, t) = w_x(l_0, t). \quad (24)$$

В левой части равенства (24) находится решение краевой задачи на интервале $-v(t) < x < l_0$, а в правой части – на интервале $l_0 < x < L - v(t)$. Иными словами, решение задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x, t), & l_0 < x < L - v(t); \\ v(x, t), & -v(t) < x < l_0. \end{cases} \quad (25)$$

Начальные условия (21) представляют собой статические перемещения и скорости точек каната и в этом варианте получают следующие значения. На интервале $l_0 < x < L - v(t)$ на канат в его поперечном сечении, имеющем координату x , действуют вес груза G и вес $\rho_l(L - x)g$ части каната, расположенной ниже сечения x . Сумма этих сил будет уравновешиваться натяжением каната, которое определяется по формуле (5). Поэтому справедливо равенство

$$ESu_x(x) = G + \rho_l(L - x)g.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от l_0 до x , получим

$$u(x) = \frac{G(x - l_0)}{ES} - \frac{\rho_l(L - x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho_l(L - l_0)^2 g}{2ES} + u(l_0). \quad (26)$$

Из (26) следует, что

$$ux(l_0) = \frac{1}{ES}(G + \rho_l(L - l_0)g). \quad (27)$$

В статическом состоянии вес груза и вес каната направлены вниз. Поэтому сила трения каната о барабан направлена в противоположную сторону, то есть вверх. А это значит, что в уравнении (20) множитель $\text{sign}(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t})$ следует принимать равным единице. Стационарную часть упругих перемещений будем представлять в виде

$$us(x) = \begin{cases} ws(x), & l_0 < x < L; \\ vs(x), & 0 < x < l_0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $w_s(x)$ – стационарные упругие перемещения на интервале $l_0 < x < L$, представленные формулой (26). Стационарные упругие перемещения $v_s(x)$ на интервале $0 < x < l_0$ оказываются решением следующей краевой задачи. В области $0 < x < l_0$ найти решение уравнения (20), удовлетворяющее краевому условию (22) при $t = 0$, а также условию непрерывности деформаций в точке $x = l_0$:

$$v_x(l_0) = ux(l_0) = \frac{1}{ES}(G + \rho_l(L - l_0)g). \quad (29)$$

Так как функция $v_s(x)$ не зависит от t , уравнение (20) для такой функции превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2} - \frac{\beta}{r} \frac{dv_s(x)}{dx} = 0. \quad (30)$$

Из уравнения (30) следует

$$\frac{dv_s(x)}{dx} = Ce^{\frac{\beta}{r}x}. \quad (31)$$

Отсюда и краевого условия (29) получаем

$$C = \frac{1}{ES} e^{-\frac{\beta l_0}{r}} (G + \rho l(L - l_0)g).$$

Поэтому

$$\frac{dv_s(x)}{dx} = \frac{1}{ES} e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} (G + \rho l(L - l_0)g).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_s(x) = \frac{G + \rho l(L - l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} + C_1.$$

Отсюда и краевого условия (22) при $t = 0$, с учетом того, что $v(0) = 0$, следует

$$v_s(x) = \frac{G + \rho l(L - l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right]. \quad (32)$$

Из (32) следует

$$v_s(l_0) = \frac{G + \rho l(L - l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right]. \quad (33)$$

Из условия непрерывности перемещений (40) при $t = 0$ следует

$$u(l_0) = v_s(l_0).$$

Поэтому с учетом последнего равенства и равенства (33) функция (26) окончательно принимает вид

$$w_s(x) = \frac{G(x-l_0)}{ES} - \frac{\rho l(L-x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)^2 g}{2ES} + \frac{G + \rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[1 - e^{-\frac{\beta}{r} l_0} \right]. \quad (34)$$

Таким образом, если в начальный момент времени груз висит на канате, то в нем уже созданы начальные перемещения $u_s(x)$, определяемые формулой (28); где $w_s(x)$ вычисляется по формуле (34); а $v_s(x)$ – по формуле (32). А так как начальная скорость всех точек каната принята равной нулю, начальные условия в краевой задаче для первого варианта имеют следующий вид:

$$u(x, 0) = u_s(x); \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (35)$$

Вариант 2. Груз покоится на опоре. До начала намотки каната на барабан, то есть при $t < 0$, груз покоился на опоре и его вес на канат не передавался. В то же время канат был выбран, и при включении барабана груз сразу повисал на канате. В этом случае изменятся только начальные условия задачи. Так как вес груза до начала движения на канат не действовал, в формулах (32) и (34), определяющих функции $v_s(x)$ и $w_s(x)$ следует принять $G = 0$, то есть записать эти формулы в виде

$$v_s(l_0) = \frac{\rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right];$$

$$w_s(x) = -\frac{\rho l(L-x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[1 - e^{-\frac{\beta}{r} l_0} \right]. \quad (36)$$

Поэтому, краевая задача об упругих перемещениях во втором варианте ставится следующим образом. В области $-v(t) < x < L - v(t)$, $t > 0$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, t)$, такую, которая при $-v(t) < x < l_0$

удовлетворяет уравнению (20), а при $l_0 < x < L - v(t)$ – уравнению (9), а также крайевым и начальным условиям (22), (23) и (35). Кроме того, в точке $x = l_0$ должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций (24). В начальных условиях (35) функция $u_i(x)$ должна вычисляться по формуле (28), а компоненты в правой части этой формулы – по формуле (36).

Вариант 3. До начала движения канат провисал. До начала намотки каната на барабан, то есть при $t < 0$, груз покоился на опоре и его вес на канат не передавался. Кроме того, канат провисал, то есть имел общую длину не L , а L_1 , имея избыток длины $\Delta L = L_1 - L$. Вполне оправдано предположить, что вес избыточной части каната опирался на груз, поэтому решение задачи о статических перемещениях в канате под действием собственного веса по-прежнему имеет вид (36). После включения барабана сначала выбирается этот избыток длины и только потом груз повисает на канате и начинает движение.

Следовательно, начальные условия в третьем варианте не будут отличаться от начальных условий для второго варианта. Останется неизменным и краевое условие (22). В то же время, в краевом условии (23) необходимо учесть тот факт, что движение груза начнется с запаздыванием. Интервал времени t_1 , в течение которого такое запаздывание произойдет, определится как наименьший положительный корень уравнения

$$v(t) = \Delta L. \quad (37)$$

Поэтому краевое условие на нижнем конце каната в этом случае будет иметь вид:

$$ux(L - v(t), t) = \frac{m}{ES} (g + \varepsilon(t)r - u(L - v(t), t))H(t - t_1), \quad (38)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Краевое условие (38) записано в предположении, что при $t < t_1$ нижний конец каната свободен.

Таким образом, краевая задача об упругих перемещениях в третьем варианте ставится следующим образом. В области $-v(t) < x < L - v(t)$, $t > 0$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, t)$, такую, которая при $-v(t) < x < l_0$ удовлетворяет уравнению (20), а при $l_0 < x < L - v(t)$ – уравнению (9), а также крайевым и начальным условиям (22), (38) и (35). Кроме того, в точке $x = l_0$ должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций (24). В начальных условиях (35) функция $u_i(x)$ должна вычисляться по формуле (28), а компоненты в правой части этой формулы – по формуле (36).

Уже из особенностей постановки задачи варианта 3 следует, что в ее решении будут возникать дополнительные разрывы.

С точки зрения разработки методов решения всех трех вариантов краевых задач, следует различать возможные скорости движения подвижного конца. Эти методы претерпевают существенную модификацию в зависимости от того, с какой скоростью движется подвижный конец: дозвуковой, звуковой или сверхзвуковой [1–3]. Однако если краевая задача для всех этих трех диапазонов изменения скорости подвижного конца решена, становится возможным построение решения для каждого из рассмотренных вариантов постановки краевых задач для случая движения подвижного конца с произвольной скоростью [1–3].

Выводы. Решение поставленных выше краевых задач позволяет построить более корректную концепцию о распространении упругих волн и распределении динамического поля напряжений в канатах переменной длины и с учетом трения каната о барабан. Оказывается, что процессы отражения волн от подвижного и неподвижного концов существенно отличаются друг от друга. Вследствие этого возникающие из-за присутствия в краевых условиях функций Хевисайда скачки на

пряжений распространяются вдоль каната с подвижными границами иначе, чем в канате неизменной длины.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В.А. Первая краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Диф. уравн. и их прилож. в физике. – Днепропетровск, 1989. – С. 4–14.
2. Остапенко В.А. Вторая краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика. – 1997. – Вип. 1. – С. 3–21.
3. Остапенко В.А. Третья краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика. – 1996. – Вип. 2. – С. 4–23.
4. Ostapenko V.A. Dynamic field of displacements in rods of variable length / V.A. Ostapenko // Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, – 2005. – P. 316–323.
5. Остапенко В.А. Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 182–198.
6. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – К., 1971. – 224 с.

Надійшла до редколегії 25.02.11

УДК 621.311.245:534.322.3

Г.И. Сокол, Т.В. Тузниченко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОЗДУШНЫХ ПОЛОСТЯХ БАШНИ ВЕТРОАГРЕГАТОВ С УЧЁТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Отримані рівняння, які описують амплітуду звукового тиску другої гармоніки та її зміну при розповсюдженні у повітряних об'ємах секцій башти вітроустановки. Записані аналітичні вирази, які дозволяють знайти координату x_{max} на продольній вісі поперечного перетину секції конічної форми, де друга гармоніка звукового тиску досягає свого максимуму.

Ключові слова: хвильові процеси, нелінійні ефекти, координата максимуму другої гармоніки, повітряні об'єми секцій вежі, конічна форма, горизонтально вісьова вітроустановка.

Получены уравнения, описывающие амплитуду звукового давления второй гармоники и ее изменение при распространении в воздушных полостях секций башни ветроустановки. Записаны аналитические выражения, позволяющие определить координату x_{max} поперечного сечения секций конической формы, где вторая гармоника звукового давления достигает своего максимума.

Ключевые слова: волновые процессы, нелинейные эффекты, координата максимума второй гармоники, воздушные полости секций башни, коническая форма, горизонтально осевая ветроустановка.

Equations describing the amplitude of the sound pressure of the second harmonic and its change during the propagation in air cavities of the tower windmill sections are received. The analytical expressions to determine the coordinate of the cross-sectional x_{max} conical sections are written, where the second harmonic of the sound pressure reaches its maximum.

Key words: wave processes, nonlinear effects, the coordinate of the second-harmonic maximum, air spaces of the tower sections, conical shape, horizontal axis wind turbine.

© Г.И. Сокол, Т.В. Тузниченко, 2011