

Получено аналитическое выражение, позволяющее определить координату x_{\max} поперечного сечения секций конической формы, где вторая гармоника звукового давления достигает своего максимума. Из анализа математического соотношения между координатой, где располагается максимум звукового давления второй гармоники, радиусом сечения узкой части секции и углом раствора конуса сделан вывод, что максимум второй гармоники располагается тем ближе к горлу секции, чем больше угол раствора конуса.

Разработана методика расчета величины звукового давления в воздушных полостях секций башни с учетом нелинейных эффектов. Методика позволяет выявить сечение секции, где необходимо установить гасители звука.

Бibliографические ссылки

1. Відновлювальна енергетика XXI століття. // Матер. 10-ї ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. 14–18 вересня 2009 року, пансіонат «Енергетик». СМТ Миколаївка, АР Крим, Україна. – Крим, 2009. – 300 с.
2. 3rd EAST EUROPEAN Conference on WIND ENGINEERING «3rd EECWE'2002»: program. // Conf.: Ukraine, Kyiv, 21 – 25 May, 2002. – Kyiv, 2002.
3. Безручко, К.В. Автономные наземные энергетические установки на возобновляемых источниках энергии : учеб. пособие / К.В. Безручко, С.В. Губин. – Х., 2007. – 310 с.
4. Санітарні норми виробничого шуму, ультразвуку та інфразвуку ДСН 3.3 6. 037 – 99 // Головне санітарно епідеміологічне управління. – К., 1999. – 79 с.
5. Наугольных К.А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К.А. Наугольных, Л.А. Островский. – М., 1990. – 237 с.
6. Морз Ф. Колебания и звук / Ф. Морз. – М., 1948. – 660 с.
7. Сокол Г.И. Резонансные явления в башне ветроэнергетической установки ВЕУ-250 / Г.И. Сокол, Е.В. Пасечный // 4-та міжнар. молод. наук.-практ. конф. «Людина і космос»: Дніпропетровськ, 5–7 червня 2002. – Д., 2002. – С. 472.
8. Фурдуев В.В. Электроакустика / В.В. Фурдуев. – М., 1948. – 256 с.
9. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука : учеб. пособие / В.А. Шутилов. – Л., 1980. – 280 с.
10. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М., 1986. – 554 с.

Надійшла до редколегії 30.06.10.

УДК 532.516

А.С. Самедов

Национальная Академия Авиации Азербайджана

РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Приведены результаты исследований по разработке эффективных расчетных методов газодинамики и теплообмена в турбинах авиационных двигателей. Для постановки и решения задач применен прямой подход с использованием как интегральных, так и дифференциальных методов, доведенных до численной реализации. Граничные условия теплообмена определены из решения соответствующих интегральных уравнений и эмпирических соотношений. Достоверность разработанных методик подтверждена расчетно-экспериментальными

© А.С. Самедов, 2011

исследованиями теплогидравлических характеристик соплового аппарата первой ступени газовой турбины.

Ключевые слова: авиационные турбины, методы газодинамического и теплового расчета, численное моделирование.

Наведено результати досліджень щодо розробки ефективних розрахункових методів газодинаміки та теплообміну в турбінах авіаційних двигунів. Для постановки та розв'язування задач застосовано прямий підхід з використанням як інтегральних, так і диференціальних методів, доведених до чисельної реалізації. Граничні умови теплообміну визначені із розв'язку відповідних інтегральних рівнянь та емпіричних відношень. Достовірність розроблених методик підтверджується розрахунково-експериментальними дослідженнями теплогидравлічних характеристик соплового апарата першого ступеня газової турбіни.

Ключові слова: авіаційні турбіни, методи газодинамічного та теплового розрахунку, чисельне моделювання.

Some results of investigations on development of effective gasdynamic and heattransfer calculation methods in aircraft engine turbines were considered. Straight approach with using as integral and so differential methods to performance and solution of the problem was applied and reduced to numerical realization. Heattransfer border conditions were determined from solutions of corresponding integral equations and empirical correlations. Reability of developed methods is confirmed by calculative-experimental researches of heathdraulic characteristics of a nozzle device of the first step of gasturbine.

Key words: aircraft turbines, methods of gasdynamic and heattransfer calculations, numerical simulation.

Введение. Одним из основных направлений повышения к.п.д. силовых установок летательных аппаратов является увеличение параметров рабочего процесса и, в первую очередь, температуры и давления газа в турбинах авиационных двигателей. Долговечность элементов проточной части при этом определяются газодинамической и тепловой эффективностью высоконагруженных узлов – сопловых и рабочих лопаток газовой турбины (ГТ), надежность которых оказывает непосредственное влияние на надежность и ресурс двигателя в целом и на безопасность полетов.

Наряду с успехами по разработке и внедрению современных и перспективных технологий изготовления лопаток ГТ, освоение высоких температур в авиационных газовых турбинных двигателях за счет усовершенствования систем охлаждения является приоритетным направлением исследований по тепловой защите элементов турбин. Однако с повышением температур газа требования к точности конечных результатов возрастают, что в свою очередь требует разработки и применения достаточно эффективных математических моделей и численных методов [2; 5; 7–9; 15; 16].

Здесь разработана новая математическая модель расчета температурного поля конвективно охлаждаемых лопаток газовых турбин, теоретическое обоснование которой доказано соответствующими теоремами [7–9; 12–14; 17–19]. Для этого были исследованы дискретные операторы, логарифмический потенциал двойного и простого слоя, построены сходящиеся квадратурные процессы и оценены их систематические погрешности в терминах модулей непрерывности А. Зигмунда. На основе теории потенциального течения задача обтекания турбинной решетки сведена к граничному интегральному уравнению (ГИУ) Фредгольма II рода с особенностью. Получены ГИУ для составляющих комплексного потенциала течения – потенциала скорости и функции тока, отличающиеся от существующих ГИУ эффективностью при численной

реализации. Для решения уравнений разработаны соответствующие алгоритмы и компьютерные программы на объектно-ориентированном языке Delphi 5 [6; 10; 11].

В отличие от потенциального, теплопроводное вязкое турбулентное течение газа в межлопаточном канале турбины исследовано на основе решения уравнений Навье-Стокса [1; 10; 11; 15]. Для замыкания системы дифференциальных уравнений в качестве моделей турбулентности использованы двухпараметрическая $k-\varepsilon$ модель турбулентности и однопараметрическая модель Спаларта-Аллармаса. Системы уравнений решены в среде программных комплексов Fluent и ANSYS с использованием средств геометрического моделирования – программы SolidWorks и сеточного генератора Gambit [20–24].

Расчеты выполнены для охлаждаемой сопловой лопатки первой ступени газовой турбины высокого давления. Результаты проведенных расчетных исследований удовлетворительно согласовываются с существующими представлениями о распределении поля скоростей и температур по обводу лопаток газовых турбин.

Расчет температурных полей лопаток газовых турбин методом граничных интегральных уравнений. Дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее в общем случае нестационарный процесс распространения теплоты в многомерной области (уравнение Фурье-Кирхгофа) имеет вид [4; 5; 7–9; 17–19]:

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{ grad } T) + q_v, \quad (1)$$

где ρ , c_v и λ – соответственно плотность, теплоемкость и теплопроводность материала; q_v – внутренний источник или сток тепла; T – искомая температура. В двумерной постановке, предполагая постоянство физических свойств и отсутствие внутренних источников (стоков) теплоты, температурное поле при стационарных условиях будет зависеть только от формы тела и от распределения температуры на контуре (границах) тела [4; 7; 8; 15; 16]. В этом случае уравнение (1) будет иметь вид:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Для определения конкретных температурных полей в элементах газовых турбин чаще задаются граничные условия третьего рода, характеризующие теплообмен между телом и окружающей средой на основе гипотезы Ньютона-Римана [4; 7; 8; 15; 16]:

$$\alpha_0(T_0 - T_{\gamma_0}) = \lambda \frac{\partial T_{\gamma_0}}{\partial n}, \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T_{\gamma_i}}{\partial n} = \alpha_i(T_{\gamma_i} - T_i). \quad (4)$$

Здесь: T_0 – температура среды T_i при $i=0$, где $i=\overline{0, M}$ – количество контуров (температура газа, омывающего лопатку); T_i – то же самое при $i=\overline{1, M}$ (температура охладителя); T_{γ_0} и T_{γ_i} – температура на контуре T_{γ_i} при $i=0$.

(наружный контур лопатки) и $i = \overline{1, M}$ (контур охлаждающих каналов); α_0 и α_i – коэффициенты теплоотдачи от газа к поверхности лопатки (при $i = 0$) и от лопатки к охлаждающему воздуху (при $i = \overline{1, M}$); λ – коэффициент теплопроводности материала лопатки; n – внешняя нормаль на контуре исследуемой области.

Краевая задача (2) – (4) решается с применением метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) (или метод теории потенциала – МТП), хорошо зарекомендовавшего себя при рассмотрении многосвязных областей сложной конфигурации и обладающего рядом преимуществ [3; 4; 7–9; 12–15].

Рассмотрим применение МГИУ для решения задачи (2) – (4) в первой постановке [3; 4; 7; 8; 15; 16].

Функция $T = T(x, y)$, непрерывная со своими производными до второго порядка, удовлетворяющая уравнению Лапласа в рассматриваемой области, включая ее контур $\gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$, является гармонической. Следствием интегральной формулы Грина для исследуемой гармонической функции $T = T(x, y)$ является соотношение:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \left[T_{\gamma} \frac{\partial(\ln R)}{\partial n} - \ln R \left(\frac{\partial T_{\gamma}}{\partial n} \right) \right] ds, \quad (5)$$

где R – переменное при интегрировании расстояние между точкой $K(x, y)$ и «бегущей» по контуру точкой k ; T_{γ} – температура на контуре γ . Значение температуры в некоторой k -й точке, лежащей на границе, получается как предельное при приближении точки $K(x, y)$ к границе

$$T = T_k = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{\gamma} T_{\gamma} \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} ds - \oint_{\gamma} \frac{\partial T_{\gamma}}{\partial n} \ln R_k ds \right]. \quad (6)$$

С учетом введенных граничных условий (3) – (4) и после приведения подобных членов соотношение (6) можно представить в виде линейного алгебраического уравнения, вычисляемого для точки k :

$$\phi_{k1} T_{\gamma_{01}} + \phi_{k2} T_{\gamma_{02}} + \dots + \phi_{kn} T_{\gamma_{0n}} - \phi_{k\gamma_0} T_0 - \phi_{k\gamma_i} T_i - 2\pi T_k = 0, \quad (7)$$

где n – количество участков разбиения наружного контура лопатки ℓ_{γ_0} (ℓ_{γ_i} при $i = 0$) на малые отрезки ΔS_0 (ΔS_i при $i = 0$); m – количество участков разбиения наружных контуров всех охлаждающих каналов ℓ_{γ_i} ($i = \overline{1, M}$) на малые отрезки ΔS_i .

Заметим, что неизвестными в уравнении (7) кроме искомого истинного значения T_k в точке k являются также, средние на отрезках разбиения контуров ΔS_0 и ΔS_i температуры $T_{\gamma_{01}}, T_{\gamma_{02}}, \dots, T_{\gamma_{0n}}, \dots, T_{\gamma_{im}}$ (общим числом $n + m$).

Из соотношения (7) получим искомую температуру для любой точки, пользуясь формулой (5):

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} [\phi_{k1} T_{\gamma_{01}} + \phi_{k2} T_{\gamma_{02}} + \dots + \phi_{kn} T_{\gamma_{0n}} + \dots + \phi_{km} T_{\gamma_{im}} - \phi_{k\gamma_0} T_{cp_0} - \phi_{k\gamma_i} T_{cp_i}] \quad (8)$$

В представленном довольно оригинальном виде решение краевой задачи (2) – (4) по расчету температурного поля конвективно охлаждаемой лопатки ГТ впервые дано О.И. Голубевой [3] и развито в работах Л.М. Зысиной-Моложен [4].

В работах [3; 4] дискретизация контуров $\gamma_i (i = \overline{0, M})$ производилась большим количеством дискретных точек и интегралы, входящие в уравнения в виде логарифмических потенциалов, рассчитывались приближенно, путем замены следующими соотношениями:

$$\int_{\Delta S_{\gamma_i}} \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} ds \approx \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} \Delta S_{\gamma_i}, \quad (9)$$

$$\int_{\Delta S_{\gamma_i}} \ln R_k ds \approx \ln R_k \Delta S_{\gamma_i}, \quad (10)$$

где $\Delta S_{\gamma_i} \in L = \bigcup_{i=0}^M l_i$; $l_i = \int_{\gamma_i} ds$.

В отличие от [3; 4] предлагается новый подход к применению метода граничных интегральных уравнений. Полагаем, что распределение температуры $T = T(x, y)$ можно отыскивать в следующем виде:

$$T(x, y) = \int_{\Gamma} \rho \ln R^{-1} ds, \quad (11)$$

где $\Gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$ – простые гладкие жордановы замкнутые кривые; M – количество

охлаждающих каналов; $\rho = \bigcup_{i=0}^M \rho_i$ – плотность логарифмического потенциала,

равномерно распределенного по γ_i ; $s = \bigcup_{i=0}^M s_i$ – дуговая координата точки (x_i, y_i) .

При этом кривые $\Gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$ положительно ориентированы и заданы в параметрическом виде: $x = x(s)$; $y = y(s)$; $s \in [0, L]$; $L = \int_{\Gamma} ds$.

Используя метод теории потенциала и выражение (11), задачу (2) – (4) приведем к следующей системе граничных интегральных уравнений:

$$\rho(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\rho(s) - \rho(\xi)) \frac{\partial}{\partial n} \ln R(s, \xi) d\xi = \frac{\alpha_i}{2\pi\lambda} (T - \int_{\Gamma} \rho(s) \ln R^{-1} ds), \quad (12)$$

где $R(s, \xi) = ((x(s) - x(\xi))^2 + (y(s) - y(\xi))^2)^{1/2}$

Для вычисления сингулярных интегральных операторов, входящих в (12), исследованы дискретные операторы логарифмического потенциала простого и

двойного слоя, показана их связь и получены оценки в терминах модулей непрерывности (оценки типа оценок А. Зигмунда).

Интегральные методы расчета распределения скоростей вокруг профиля лопатки. Точность вычисления температурных полей охлаждаемых деталей в большинстве зависит от достоверности закладываемых в расчет граничных условий теплообмена.

Весьма важная роль в исследовании и совершенствовании лопаточных аппаратов турбомашин принадлежит методам аэродинамического расчета потока в решетках, которые предшествуют оценке газодинамической эффективности и изучению тепловых процессов в них. Для расчета скорости газового потока по обводу профиля лопатки использованы методы прямых задач гидродинамики решеток, основанные на численной реализации интегральных уравнений с особенностью [1; 6; 10–14]. Задача сводится к рассмотрению обтекания прямой плоской решетки двумерным установившимся безвихревым (потенциальным) потоком несжимаемой жидкости в плоскости действительных координат (рис. 1). Получены граничные интегральные уравнения для составляющих комплексного потенциала течения $W(z)$ – потенциала скорости ϕ и функции тока ψ , отличающиеся от существующих эффективностью при численной реализации [1; 6; 10; 11]:

$$W(z) = \phi(z) + i\psi(z);$$

$$\phi(x_k, y_k) = V_\infty (x_k \cos \alpha_\infty + y_k \sin \alpha_\infty) \pm \frac{1}{2\pi} \Gamma \theta_B \mp \frac{1}{2\pi} \oint_{S+} \phi(S) d\theta;$$

$$\psi = V_\infty (y \cos \alpha_\infty - x \sin \alpha_\infty) - \frac{1}{2\pi} \oint_{S+} \bar{V}(z)_k \ln \sqrt{sh^2 \frac{\pi}{t} (x - x_k) + \sin^2 \frac{\pi}{t} (y - y_k)} dz_k,$$

где V_∞ – средневекторная скорость набегающего потока; α_∞ – угол между вектором \bar{V}_∞ и осью решетки профилей; t – шаг решетки; Γ – циркуляция скорости; θ_B – угол, соответствующий выходной кромке профиля.

Распределение потенциала скорости ϕ по контуру получено из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\phi_j \pm \sum_{i=1}^n \phi_i (\theta_{j,i+1} - \theta_{j,i-1}) \approx V_\infty (x_{kj} \cos \alpha_\infty + y_{kj} \sin \alpha_\infty) \pm \frac{1}{2\pi} \Gamma \theta_{j,B},$$

где $i = 2n - 1$, $j = 2n$, n – количество участков. Значения скорости газового потока определены путем дифференцирования потенциала скорости по контуру s профиля лопатки, то есть $V(s) = d\phi/ds$.

Распределение скорости по обводу профиля получено также из решения интегрального уравнения для функции тока ψ , приведенного к следующему алгебраическому виду:

$$\psi \approx \psi_\infty \mp \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n V_i \ln \left\{ \sqrt{sh^2 \left[\frac{2\pi}{t} (x - x_k) \right] - \sin^2 \left[\frac{2\pi}{t} (y - y_k) \right]} \right\} \Delta s_i,$$

где $\psi_\infty = V_\infty (y \cos \alpha_\infty - x \sin \alpha_\infty)$.

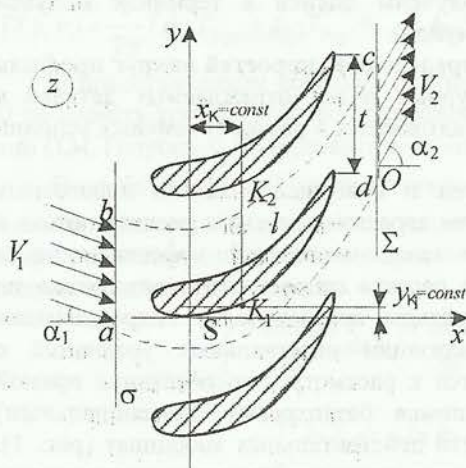


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Для решения задач разработаны соответствующие алгоритмы и компьютерные программы на объектно-ориентированном языке Delphi 5 [6; 10; 11].

Дифференциальные методы расчета поля скоростей в проточной части двигателя.

В реальной газовой турбине лопаточный аппарат представляет собой кольцевую гидродинамическую решетку, в которой имеет место трехмерное нестационарное неизотермическое течение вязкой сжимаемой жидкости, теоретическое исследование которого связано с

решением полной системы дифференциальных уравнений, описывающих это течение [1; 10; 11; 20; 22].

Система уравнений турбулентного течения вязкого теплопроводного газа состоит из следующих соотношений:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_i)}{\partial x_j} = 0; \quad (13)$$

уравнение сохранения импульсов:

$$\frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_i V_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{\Sigma} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + F_i + W_i; \quad (14)$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial (\rho c_p T^*)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_j c_p T^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \right) + W^V + E^k + Q_V + \Phi + \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (15)$$

где ρ – плотность рабочего тела; V_i – компоненты скорости; t – время; p – давление; μ_{Σ} – суммарная вязкость; F_i – компоненты внешней массовой силы; W_i – потери на внутреннее трение; c_p – удельная теплоемкость; T^* – температура торможения; λ – коэффициент теплопроводности; κ – показатель адиабаты; W^V – работа вязких сил; Q_V – объемный источник теплоты; Φ – выработка вязкой теплоты; E^k – кинетическая энергия; индексы $i=1,2,3$ и $j=1,2,3$ обозначают проекции по трем координатным осям x, y, z .

При рассмотрении ламинарных течений суммарная вязкость μ_{Σ} представляет собой простую динамическую вязкость μ , а для турбулентных течений величина μ_{Σ} определяется различными моделями турбулентности, о которых речь пойдет ниже.

В свою очередь, имеем:

потери на внутреннее трение:

$$W_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right);$$

статическая температура:

$$T = T^* - \frac{V^2}{2c_p};$$

работа вязких сил в тензорной форме:

$$W^V = V_j \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right];$$

выработка вязкой теплоты в тензорной форме:

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial V_j}{\partial x_k};$$

кинетическая энергия:

$$E^k = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} |V^2| \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} |V^2| \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} |V^2| \right) \right].$$

Для плотности газа используется уравнение идеального газа в форме:

$$\rho = \frac{p}{\frac{R}{M_V} T},$$

где R – универсальная газовая постоянная; M_V – молекулярный вес.

Для определения динамической вязкости используется уравнение Сазерленда [20; 22]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S},$$

где μ_0 и T_0 – исходные значения величин: для воздуха $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} \text{ кг / м} \cdot \text{сек}$ и $T_0 = 273 \text{ K}$; $S = 110.56 \text{ K}$ – эффективная температура, называемая константой Сазерленда.

Удельная теплоемкость c_p и число адиабаты κ определяется из табличных данных.

Для случая турбулентного режима течения скорость выражается суммой основной (осредненной) и пульсационной составляющих, так как турбулентность означает пульсирование мгновенной скорости в каждой точке течения жидкости, т.е.:

$$V_x = \overline{V_x} + V'_x, \quad (16)$$

где $\overline{V_x}$ – компонент скорости по оси x ; V'_x – компонент пульсаций скорости по оси x .

Если такие выражения используются для мгновенной скорости в системе уравнений Навье-Стокса, то они могут быть осреднены, учитывая, что компонент пульсаций скорости, осредненный по времени, равен нулю и среднее по времени значение мгновенной скорости есть среднее значение самой скорости. Временной интервал для интегрирования выбирается произвольно, но так, чтобы быть достаточно продолжительным для получения достоверных результатов и достаточно коротким для сокращения влияния переходных эффектов на интегрирование:

$$\frac{1}{\delta_t} \int_0^{\delta_t} V'_x dt = 0; \quad \frac{1}{\delta_t} \int_0^{\delta_t} V_x dt = \overline{V_x}.$$

После подстановки выражения (16) в уравнение движения (14), осреднение по времени добавляет дополнительные члены:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right),$$

где τ_{ij} – напряжения Рейнольдса, которые связаны с динамической турбулентной вязкостью следующим выражением:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho V_i V_j'} = \mu_T \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Особенностью формы записи системы уравнений (13) – (15) является то, что из уравнения энергии можно выделить соотношение

$$q_i = \mu_\Sigma \frac{\partial (c_p T)}{\partial x_i},$$

при помощи которого можно рассчитать компоненты вектора суммарного потока тепла q , где суммарная вязкость $\mu_\Sigma = \mu + \mu_t$. Это дает возможность использования данной модели при решении задач теплообмена между движущимся газом и элементами проточной части двигателя в сопряженной постановке с привлечением условий сопряжения – граничных условий IV рода. Однако в таком виде система уравнений не является замкнутой, так как входящий в нее коэффициент турбулентной вязкости μ_t априори неизвестен. Поэтому задача моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в межлопаточном канале газовой турбины переходит к определению турбулентной вязкости μ_t .

Расчет турбулентного пограничного слоя. Для определения турбулентной вязкости μ_t с целью замыкания системы уравнений Навье-Стокса использованы двухпараметрическая $k-\varepsilon$ модель турбулентности [21] и модель Спаларта-Аллмараса [23].

Стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности базируется на уравнении переноса, записанном для кинетической энергии турбулентности (k) и скорости диссипации турбулентной энергии (ε) [20–22]:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k V_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k;$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon V_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon.$$

В этих формулах величина G_k представляет собой производство кинетической энергии турбулентности, характеризующуюся градиентом скорости:

$$G_k = -\rho \overline{V_i' V_j'} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

Используя гипотезу Буссинеска, G_k можно представить в виде

$$G_k = \mu_t S^2,$$

где S является модулем тензора напряжений:

$$S \equiv \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}.$$

Турбулентная вязкость рассчитывается как

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Генерация турбулентности вдоль потока

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

где Pr_t – турбулентное число Прандтля; g_i – составляющая вектора силы гравитации. Коэффициент термического расширения равен

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

$$\text{Для идеального газа } G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

При высоких значениях числа Маха турбулентная сжимаемость учитывается при помощи так называемого коэффициента развитой диссипации Y_M , входящей в уравнение кинетической энергии турбулентности k :

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где M_t – турбулентное число Маха, рассчитываемое по формуле $M_t = \sqrt{k/a^2}$; $a = \sqrt{kRT}$ – скорость звука в данной среде. Модельными константами являются [20; 22]: $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$, $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

Модель Спаларта-Аллмараса относится к новому классу однопараметрических моделей, описывает поведение эффективной вязкости во всей пристеночной области, включая вязкий подслой, и дает удовлетворительные результаты для пограничного слоя с отрицательным градиентом давления [10; 11; 20; 22; 23].

В используемой версии модели Спаларта-Аллмараса дифференциальное уравнение турбулентного переноса формулируется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{v} V_i) = G_v + \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right\} + c_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_v + S_{\tilde{v}}.$$

Модельной переменной является величина \tilde{v} , которая идентична турбулентной кинематической вязкости и связана с ν соотношением $\nu = \tilde{v} \cdot f_{v1}$ (или $\mu_t = \rho \cdot \tilde{v} \cdot f_{v1}$), исключая пристеночные зоны. Функция вязкостного затухания f_{v1} определяется при помощи формул:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \text{ и } \chi = \tilde{v}/\nu.$$

Турбулентная производительность G_v моделируется следующим образом:

$$G_v = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{v},$$

где $\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{v}}{\gamma^2 d^2} f_{v2}$ и $f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$; c_{b1} и γ – модельные константы; d – расстояние до стенки; S – скалярное значение тензора деформаций.

В предложенной версии модели Спаларта-Аллмараса определение значения тензора деформаций S основано на определении величины пульсаций завихренности:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}},$$

где Ω_{ij} – среднее значение тензора пульсаций завихренности, рассчитываемое при помощи уравнения:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Выражение для явления турбулентного разрушения Y_v моделируется следующим соотношением:

$$Y_v = c_{w1} \rho f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2,$$

где $f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}$; $g = r + c_{w2} (r^6 - r)$; $r \equiv \tilde{v} / (\tilde{S} \gamma^2 d^2)$, причем при $r > 10$ величина $f_w(r)$ полагается постоянной и равной $f_w(r=10)$.

Модельные константы имеют следующие значения [20; 22]: $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma_{\tilde{v}} = 2/3$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{v2} = 5.0$, $c_{w1} = c_{b1} / \gamma^2 + (1 + c_{b2}) / \sigma_{\tilde{v}}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2.0$, $\gamma = 0.4187$.

Определение граничных условий теплообмена. Расчетные данные распределения скорости по обводу являются исходными для определения внешних условий теплообмена.

Для расчетов локальных значений α_f в качестве основы принят метод ЦКТИ, разработанный Л.М. Зысиной-Моложен, в котором используется

интегральное соотношение энергии для теплового пограничного слоя, записанное в переменных А.А. Дородницына, позволяющих в единообразной форме представить решения для ламинарного, переходного и турбулентного пограничных слоев [4; 15; 16]. Для внесения поправок в базовое значение α_Γ использованы подтвержденные расчетно-экспериментальным путем рекомендации ЦКТИ и ХПИ [4; 5; 15; 16].

При определении внутренних граничных условий теплообмена используется взаимосвязь внутренних геометрических и гидродинамических моделей с тепловыми, характеризующими температурное поле тела лопатки. Комплекс параметров, объединяющий в себе теплогидравлические и геометрические характеристики системы охлаждения, имеет вид [2; 5; 15; 16]:

$$\alpha_B F_B = f(\alpha_\Gamma, Q_\Gamma, T_{\Gamma Л}, T_{ВЛ}, \lambda_B, \mu_B, \lambda_\Gamma).$$

При этом, по сути выполняется оптимизационная задача с предварительным заданием допустимых по условиям прочности температур стенок с газовой $T_{\Gamma Л}$ и воздушной $T_{ВЛ}$ сторон с учетом ее предельной неравномерности.

Задача внутренней гидродинамики системы охлаждения рассмотрена на примере лопатки со вставным перфорированным дефлектором.

Поиск оптимальной конструкции системы охлаждения тонкостенной дефлекторной лопатки с поперечным течением воздуха осуществляется путем предварительного выявления перегретых участков. Местные коэффициенты теплоотдачи охладителя α_B определяются при известном распределении потока в охлаждающих каналах. С этой целью строится эквивалентная гидравлическая схема (ЭГС), при составлении которой весь тракт течения охладителя в системе охлаждения делится на множество взаимосвязанных участков типовых элементов (каналов). Течение охладителя в разветвленных сетях описывается 1-м законом Кирхгофа [5,15,16]:

$$f_1 = \sum_{j=1}^m G_{ij} = \sum_{j=1}^m \text{sign}(\Delta p_{ij}) k_{ij} \sqrt{\Delta p_{ij}}; \quad i = 1, 2, 3 \dots n, \quad (17)$$

где G_{ij} – расход охладителя на ветке $i-j$; m – количество веток, присоединенных к i -му узлу; n – число внутренних узлов гидравлической сети; Δp_{ij} – перепад полного давления охладителя на ветке $i-j$. В этой формуле коэффициент гидравлической проводимости ветки $(i-j)$ определяется следующим образом [5; 15]:

$$k_{ij} = \sqrt{2 f_{ij}^2 \cdot p_{ij} / \xi_{ij}}, \quad (18)$$

где f_{ij} , p_{ij} , ξ_{ij} – соответственно, средняя площадь поперечного сечения канала $(i-j)$, плотность потока охладителя на данном участке и суммарный коэффициент гидравлического сопротивления ветви.

Система нелинейных алгебраических уравнений (17) решается методом Зейделя с ускорением по следующей формуле [5]:

$$p_i^{k+1} = p_i^k - f_i^k / (\partial f / \partial p)^k,$$

где k – номер итерации; p_i^k – давление охладителя в i -м участке гидравлической сети. Коэффициенты гидравлического сопротивления ξ_{ij} , входящие в (18) можно определить по эмпирическим соотношениям, имеющимся, например в [5; 15].

Значение α_B в области входной кромки лопатки с внутренним сегментным оребрением, обдуваемой воздухом одним рядом круглых струй через отверстия в носике дефлектора, рассчитывается зависимостью [5; 15; 16]:

$$Nu = C Re^{0.98} Pr^{0.43} / (L / b_{equ}),$$

$b_{equ} = \pi d_0^2 / 2t_0$ – ширина эквивалентной по площади щели; d_0 , t_0 – диаметр и шаг отверстий в носовой части дефлектора. Критерий Re в данной формуле определяется по скорости струи на выходе через отверстия дефлектора, в качестве характерного размера принимается длина внутреннего обвода входной кромки L .

На участках струйного обдува поверхностей, кроме зоны входной кромки можно воспользоваться эмпирической зависимостью [5; 15; 16]:

$$Nu = 0.018 \left(0.36 \bar{\delta}^2 - 0.34 \bar{\delta} + 0.56 - 0.1 \bar{h} \right) \bar{S}_x \cdot (G_c f_k / G_k f_c)^k \cdot Re^{0.8}, \quad (19)$$

где $\bar{\delta} = \delta/d$ – относительная толщина дефлектора; $\bar{h} = h/d$ – относительная высота

канала между дефлектором и стенкой лопатки; $\bar{S} = S/d$ – относительный шаг системы струй; d – диаметр перфорации; $k = 0.25 + 0.5 \bar{h}$. Критерий Re в формуле (19) определяется по гидравлическому диаметру поперечного канала $L = 0.75 - 0.45 \bar{\delta}$ и скорости потока охладителя за зоной перфорации дефлектора.

При расчетах в каждом итерационном процессе производится проверка пропускной способности тракта охлаждения по полному давлению на выходе, подсчитанному соответственно, через потери полного давления и приведенную скорость истечения воздуха из лопатки с учетом его подогрева.

Таким образом, обеспечение необходимого значения коэффициента теплоотдачи α_B производится путем варьирования комплексом геометрических параметров схемы охлаждения и режимных параметров охладителя [5; 15].

Результаты. Для верификации представленных методик использованы

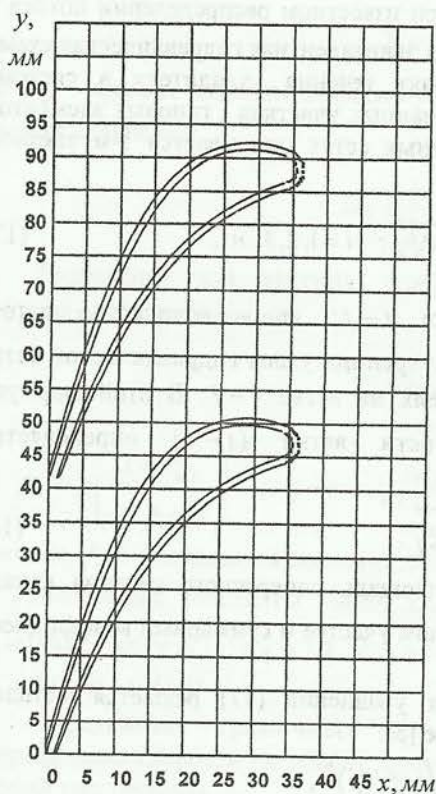


Рис. 2. Решетка профилей сопловой охлаждаемой лопатки

результаты расчета облопаточенного сегмента соплового аппарата первой ступени турбины высокого давления [8; 9]. Расчеты обтекания решетки турбулентным потоком вязкого теплопроводного газа проводились с параметрами, соответствующими натурной установке. Сопловая решетка тестового эксперимента была спрофилирована аналитически с помощью степенных полиномов на околозвуковую скорость (рис. 2).

Профиль лопатки имеет хорду $b = 60 \text{ мм}$; шаг решетки $t = 41.5 \text{ мм}$, ширину горлового сечения $a_2 = 11.26 \text{ мм}$; толщину выходной кромки $d_2 = 1.8 \text{ мм}$; угол отгиба выходной кромки $\delta = 12^\circ 48'$. При вычислительных экспериментах были использованы следующие режимные параметры газового потока: скорость на входе в решетку $V_1 = 156 \text{ м/с}$, на выходе из решетки $V_2 = 562 \text{ м/с}$; угол выхода $\alpha_2 = 16^\circ 6'$; температура и давление газа: на входе в ступень $T_2^* = 1193 \text{ К}$, $p_2^* = 1.2095 \text{ МПа}$, на выходе из ступени $T_{21} = 1005 \text{ К}$, $p_{21} = 0.75 \text{ МПа}$; относительная скорость газа на выходе из решетки $\lambda_{\text{ад}} = 0.891$; физические свойства газа: показатель адиабаты $\kappa_2 = 1.35$, газовая постоянная $R_2 = 288 \text{ Дж/кгК}$.

На рис. 3 представлены графики расчетного распределения скорости газового потока по обводу профиля лопатки. Для случая потенциального обтекания результаты (\diamond) получены из решения граничных интегральных уравнений при помощи программы, составленной на объектно-ориентированном языке Delphi [6; 10; 11]. Решение полной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа с использованием двухпараметрической $k - \varepsilon$ модели турбулентности (\blacksquare) выполнено в среде комплекса ANSYS [20].

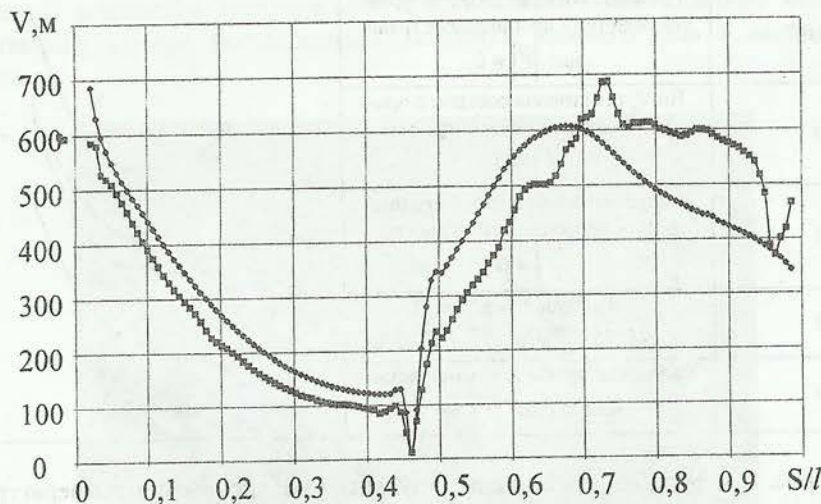


Рис. 3. Графики расчетного распределения скорости газового потока по обводу профиля лопатки газовой турбины:

- \diamond — методом граничных интегральных уравнений при потенциальном обтекании;
- \blacksquare — решением полной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа; V — скорость газа, м/с;
- S/l — относительная координата профиля

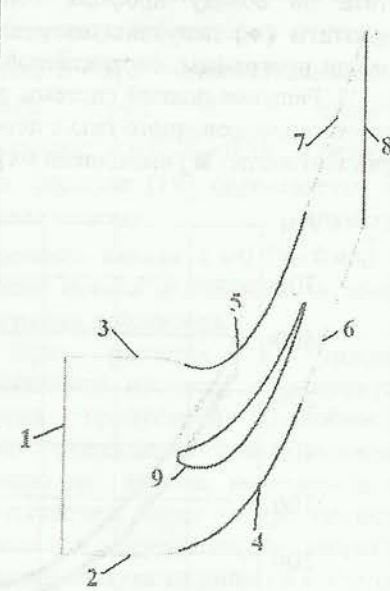
Расчетная область и граничные условия для решения системы дифференциальных уравнений заданы в табл. 1.

На рис.4. изображено разбиение расчетной области на конечные элементы с помощью сеточного генератора Gambit [22]. Применена комбинированная сетка с общим числом ячеек 64200 со сгущением вдоль обвода контура профиля.

Структура двумерного течения вязкого теплопроводного газа с применением $k-\varepsilon$ модели турбулентности представлена на рис. 5 и рис. 6. Расчеты выполнены для числа $Re = 1.68 \cdot 10^6$ на выходе из решетки, при степени турбулентности набегающего потока $Tu_1 = 0.01$. При тех же условиях получено расчетное распределение поля скоростей из решения системы уравнений Навье-Стокса с применением модели турбулентности Спаларта-Аллмараса в среде решателя Fluent [22; 23], которое представлено на рис. 7. Ввиду малой степени турбулентности набегающего потока и монотонно изменяющейся кривизны профиля, обтекание с применением модели турбулентности Спаларта-Аллмараса получилось безотрывное, на спинке профиля пограничный слой утолщен, за выходной кромкой формируется характерный аэродинамический след.

Таблица 1

Расчетная область двумерного течения вязкого газа в турбинной решетке

Нумерация границ расчетной области	Участки, исходные данные и граничные условия	
1	Входной участок: $V = 156 \text{ м/с}$; $p^* = 1.2095 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $T^* = 1193 \text{ К}$; $Tu = 0.01$	
2,3,6,7	Условные боковые стороны фронтов решетки - проницаемые границы: $ \vec{V} \neq 0$	
4	Вогнутая сторона соседнего профиля - непроницаемая граница: $ \vec{V} = 0$	
5	Выпуклая сторона соседнего профиля - непроницаемая граница: $ \vec{V} = 0$	
8	Выходной участок: $p^* = 0.75 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $T^* = 1142 \text{ К}$	
9	Расчетный профиль - непроницаемая граница: $ \vec{V} = 0$	

На рис. 8 и рис. 9 представлены результаты распределения температурного поля в расчетной области с использованием, соответственно, моделей турбулентности $k-\varepsilon$ и Спаларта-Аллмараса.

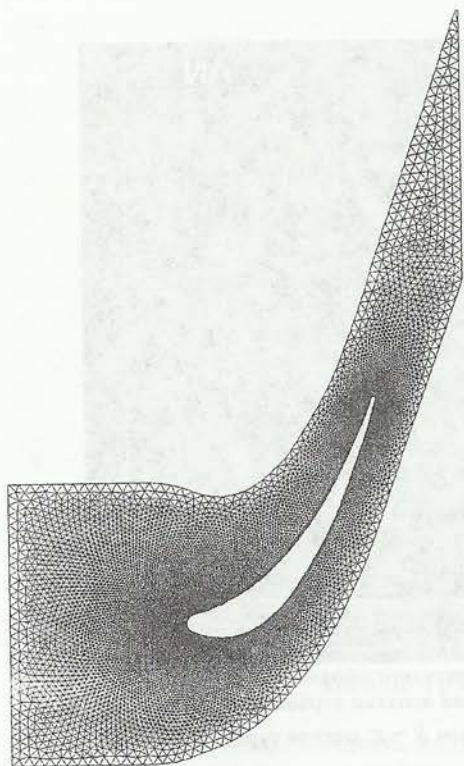


Рис. 4. Разбиение расчетной области на конечные элементы

Полученные результаты подтверждают достоверность представленных методик и применимость их при исследованиях динамики рабочего тела в авиационных двигателях.

Выводы. Сравнительный анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что, вычисления хорошо воспроизводят структуру течения, а также локальные характеристики распределения скоростей. Вместе с тем на стороне разрежения лопатки наблюдается достаточно существенное различие между результатами расчета, так как применение для определения турбулентной вязкости стандартной $k - \varepsilon$ модели приводит к завышению расчетных значений потерь полного давления, что характеризуется распределением скоростей в расчетной области. Это обстоятельство доказывает свойство $k - \varepsilon$ модели генерировать повышенный уровень турбулентной вязкости на конфузورных участках течения [15; 24]. Следовательно, из двух использованных моделей турбулентности лучшие результаты дает модель Спаларта-Аллмараса.

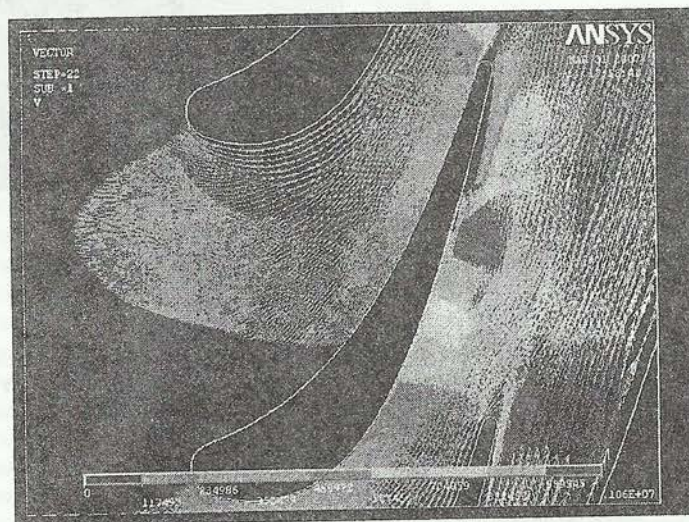


Рис.5. Структура двумерного течения вязкого теплопроводного газа с применением $k - \varepsilon$ модели турбулентности

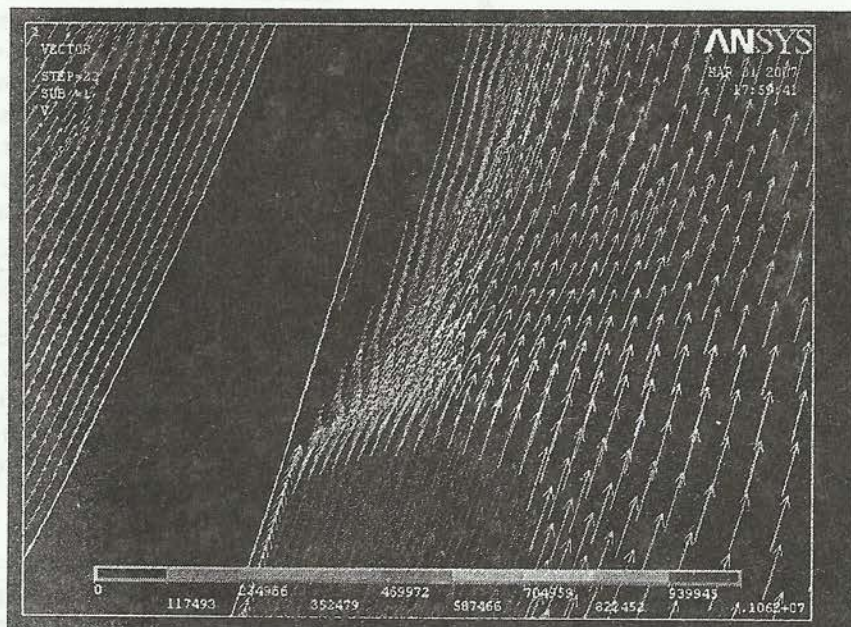


Рис.6. Зона підвищеної турбулентності, образована при русі обтікання профілю лопатки турбіни вязким теплопровідним газом з використанням $k - \varepsilon$ моделі турбулентності.

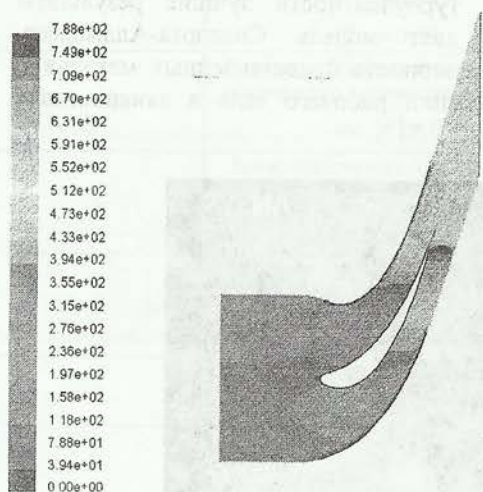


Рис. 7. Результати розподілу поля швидкостей (м/с) в розрахунковій області з використанням моделі Спаларта-Аллараса в середі програмного комплексу Fluent

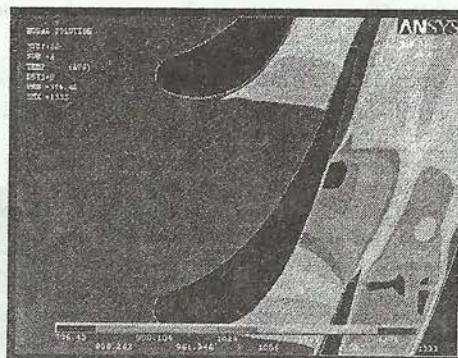


Рис. 8. Результати розподілу температурного поля в розрахунковій області (в К) з використанням програми ANSYS

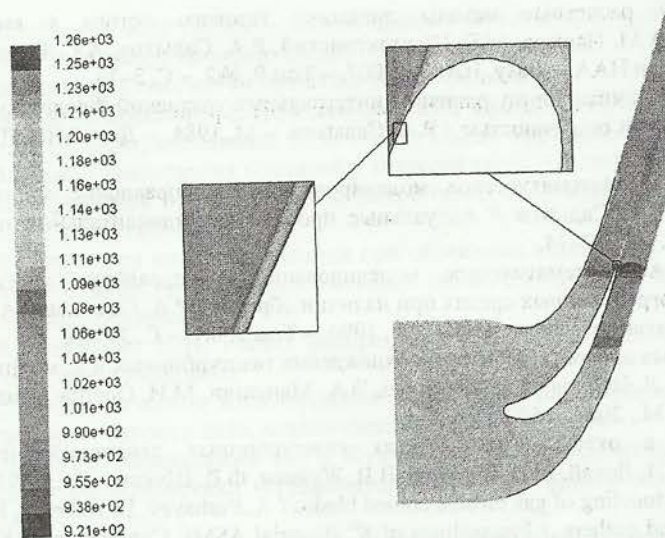


Рис. 9. Результаты распределения температурного поля в расчетной области (в К) с использованием программы Fluent

Библиографические ссылки

1. Газовая динамика. Механика жидкости и газа / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев, М.И. Осипов и др. [под общей ред. А.И.Леонтьева]. – М., 1997. – 671 с.
2. Тепловая защита лопаток турбин / Б.М. Галицкий, В.Д. Совершенный, В.Ф. Формалев, М.С. Черный. – М., 1996. – 356 с.
3. Голубева О.И. К определению температурного поля лопаток газовых турбин / О.И. Голубева // Труды ЦИАМ. – 1947. – №129. – 16 с.
4. Зысина-Моложен Л.М. Теплообмен в турбомашинах / Л.М. Зысина-Моложен, Л.В. Зысин, М.П. Поляк. – Л., 1974. – 336 с.
5. Копелев С.З. Конструкция и расчет систем охлаждения ГТД / С.З. Копелев, А.Ф. Слитенко. [под ред. Слитенко А.Ф.]. – Харьков, 1994. – 240 с.
6. Численное решение интегральных уравнений обтекания плоских решеток газовых турбин / А.М. Пашаев, Д.Д. Аскеров, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов // Всеукр. науч.-техн. журнал «Двигатели внутреннего сгорания». – 2005. – С. 12–19.
7. Методы расчета тепловой защиты лопаток газовых турбин / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, Д.Д. Аскеров, А.С. Самедов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2007. – Вып. 68, №3. – С. 102–116.
8. Численное моделирование температурных полей в элементах авиационных газовых турбин / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов, Д. Ардил // Науч. вестник МГТУ Гражданской Авиации. Серия: Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов. – 2005. – №85 (3). – С. 109–120.
9. Пашаев А.М. Современные технологии и методы тепловой защиты элементов высокотемпературных авиационных газотурбинных двигателей / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов // Сборник науч. тр. НАА, посвященный 70 летию Юбилею академике А.М. Пашаева. – Баку, НАА. – 2004. – № 1. – С. 22–67.
10. Численное моделирование динамики рабочего тела в проточных частях авиационных газотурбинных двигателей / А.М. Пашаев, М.Г. Шахтахтинский, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов и др. // Сборник науч. тр. НАА. – Баку, НАА. – 2007. – №1. – С. 3–28.

11. Эффективные расчетные методы динамики газового потока в авиационных двигателях / А.М. Пашаев, М.Г. Шахтактинский, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов и др. // Ученые записки НАА. – Баку, НАА. – 2007. – Том 9, №2. – С. 3–13.
12. Садыхов Р.А. К численному решению интегральных уравнений Фредгольма II рода с логарифмической особенностью / Р.А. Садыхов. – М., 1984. – Деп. ВИНТИ №6601–84. – 19 с.
13. Садыхов Р.А. Математическое моделирование и управление многосвязными системами / Р.А. Садыхов // Актуальные проблемы фундаментальных наук. – М., 1991. – Том 1. – С. 12–24.
14. Садыхов Р.А. Математическое моделирование и управление многосвязными системами в ограниченных средах при наличии сбросов / Р.А. Садыхов // Актуальные проблемы фундаментальных наук. – М., 1994. – Том 2, ч.1. – С. 31–43.
15. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок / В.Л. Иванов, А.И. Леонтьев, Э.А. Манушин, М.И. Осипов. [под ред. А.И. Леонтьева]. – М., 2004. – 592 с.
16. Теплоотдача в охлаждаемых деталях газотурбинных двигателей летательных аппаратов / В.И. Локай, М.Н. Бодунов, В.В. Жуйков, Ф.В. Шукин. – М., 1995. – 216 с.
17. Pashayev A. Modeling of gas turbine cooled blades / A. Pashayev, D. Askerov, R. Sadiqov, A. Samedov and others // Proceedings of 8th Biennial ASME Conference on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA 2006). – Torino, Italy. – July 4–7, 2006.
18. Pashayev A. Numerical Methods of Protection of Gas Turbine Blades From Influence of High Temperature / A. Pashayev, R. Sadiqov, A. Samadov, R. Mammadov // Proceeding of 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. – Hartford, CT. AIAA 2008-5166, American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 21–23 July, 2008.
19. Pashayev A. Protecting Gas Turbine Blades from the Influence of High Temperatures / A. Pashayev, E. Schnack, R. Sadiqov, A. Samadov // Proceeding of International Symposium on advanced in Applied Mechanics and Modern Information Technology. – Baku, 2011 (ISAAM&MIT11). – P. 271–278.
20. Imgrund M.C. ANSYS® Verification Manual. – Swanson Analysis Systems, Inc. 1992.
21. Launder B.E. The Numerical Computation of Turbulent Flows / B.E. Launder, D.B. Spalding // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol. 3. – P. 269–289.
22. Fluent. Fluent Inc., Centerra Resource Park, Cavendish Court, Lebanon, NH 03766, USA. – 2001.
23. Spalart P. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P. Spalart, S. Allmaras. // Technical Report AIAA-92-0439, American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1992.
24. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD / D.C. Wilcox D.C. // DCW Industries Inc., La Canada, California, ISBN: 0-963-6051-0-0. – 1998.

Надійшла до редколегії 27.10.11