ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». Вип. 16, Т. 1, 2012

УДК 532.5

О. Г. Гоман, В. А. Катан

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИ УДАРЕ С ВРАЩЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ОТРЫВА

Розглянуто задачу про ударну взаємодію з відривом нестисливої рідини та вертикальної пластини, що плаває на її вільній поверхні при наявності обертання. Поставлена задача зведена до задачі Келдиша-Сєдова відносно комплексного потенціалу течії. Визначені межі застосування вибраної моделі відривної течії.

Ключові слова: удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Сєдова.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова для комплексного потенциала течения. Определены границы применимости выбранной модели отрывного течения.

Ключевые слова: удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, задача Келдыша-Седова.

The problem for the impact incompressible fluid and the vertical plate on free surface is considered. The solution is received as the result by the Keldish-Sedov's problem.

Key words: impact incompressible fluid and the solid of revolution on free surface, the Keldish-Sedov's problem.

Введение. Обзор и библиография по вопросам ударного взаимодействия жидкости и плавающих на ее поверхности твердых тел содержится в [1–3]. В [4] содержится постановка ударных задач в плоском приближении как при налички, так и в отсутствии отрыва течения и для их решения используются методы теории функций комплексного переменного.

Пусть вертикальная пластина длины b плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось Oy системы декартовых координат направлена по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а плоскость xOz совпадает со свободной поверхностью. Предполагается, что ударные импульсы подействовали так, что после удара пластина имеет только компоненту скорости вдоль оси Ox, а также угловую скорость вокруг оси Oz. Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ – потенциал течения, $\psi(z)$ – функция тока. В результате удара тело приобретает скорость $\bar{V} = (U_0 - \omega_z y)\bar{i}$, где U_0 – поступательная скорость полюса – точки B, а ω_z – угловая скорость тела относительно полюса.

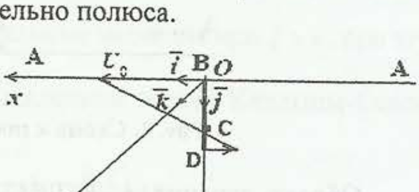

Рис. 1. Схема ударного взаимодействия с жидкостью вертикально погруженной пластинки

В предположении о наличии отрыва течения условие безотрывности течения распространяется только на участок контура BDC (причем положение точки C заранее неизвестно) и имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{BDC} = \bar{V}\cdot\bar{n}\,.$$

Учитывая различное направление нормали на участках BD и DC, оно сводится на указанных участках к одному выражению, а именно

$$v_x = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{BD} = U_0 - \omega_z y \text{ и } v_x = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{DC} = U_0 - \omega_z y\,.$$

Так как компоненты скорости выражаются через производные функции тока, то на участках BD и DC

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y\,,$$

откуда с точностью до несущественной константы имеем

$$\psi = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2}\,.$$

На свободной границе – оси Ox и участке отрыва CB имеем условие равенства нулю импульсного давления, что приводит к условию

$$\varphi = 0\,.$$

Перейдем в комплексную плоскость xOy $z = x + iy$ и введем функцию

$$\chi = -iw = \psi - i\varphi\,,$$

для которой имеем задачу Келдыша-Седова. На границе CDE задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re}\chi\big|_{CDE} = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2}\,,$$

а на границах $A_{-\infty}B$, BC, $EA_{+\infty}$ известна ее мнимая часть, а именно:

$$\operatorname{Im}\chi\big|_{A_{-\infty}B} = 0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{BC} = 0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{EA_{+\infty}} = 0\,.$$

Рис. 2. Схема к постановке задачи Келдыша-Седова

Область течения $A_{-\infty}BCDEA_{+\infty}$ с помощью функции

$$z = \sqrt{t^2 - b^2}$$

отображается на верхнюю полуплоскость комплексного переменного t (рис. 3):

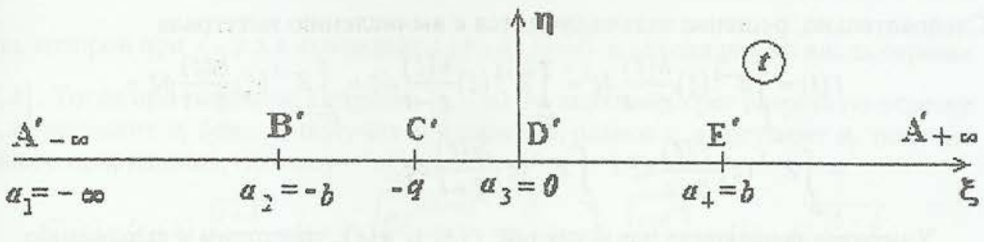

Рис. 3. Задача Келдыша-Седова во вспомогательной полуплоскости

Построенная функция допускает обращение, и обратная функция имеет вид

$$t=\sqrt{z^2+b^2}\,.$$

Тогда граничные условия задачи Келдыша-Седова для функции χ принимают вид

$$\operatorname{Im}\chi\big|_{A'_{-\infty}B'}=0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{B'C'}=0\,,\ \operatorname{Im}\chi\big|_{E'A'_{+\infty}}=0$$

и

$$\operatorname{Re}\chi\big|_{C'D'E'}=U_0\sqrt{b^2-\xi^2}-\omega_z\frac{b^2-\xi^2}{2}.$$

Решение задачи Келдыша-Седова. Следуя Мусхелишвили [5], составим функцию граничных условий

$$h(\xi)=\begin{cases} f(\xi), & \xi\in D',\\ ig(\xi), & \xi\in D'',\end{cases},$$

где

$$f(\xi)=U_0\sqrt{b^2-\xi^2}-\omega_z\frac{b^2-\xi^2}{2},\quad \xi\in[-q,b]\quad (D')$$

и

$$g(\xi)=0,\quad \xi\in(-\infty,-q)\cup(b,+\infty)\quad (D'').$$

Данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью $B'C'$ и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, то есть параметрами задачи есть $a_1=-q$ и $b_1=b$.

Найдем решение поставленной задачи в классе функций, ограниченных в граничных точках промежутка $B'C'$, то есть в точках $-q$ и b. Каноническое решение выделенного класса имеет вид

$$Z(t)=\sqrt{R(t)}\,,$$

где

$$R(t)=(t-a_1)(t-b_1)=(t+q)(t-b)\,.$$

Ветвь $\sqrt{R(t)}$ принимает на оси ξ положительные значения при $\xi>b$, при этом вдоль отрезка $\xi\in[-q,b]\quad (D')$ сделан разрез.

Одно из частных решений $\Psi(t)$ поставленной задачи Келдыша-Седова, определяется формулой

$$\Psi(t)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{(t+q)(t-b)}\int_L Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-t}d\xi\,,$$

где L – действительная ось плоскости t.

Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(t)=\int\limits_{L} Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-t}d\xi=\int\limits_{D'} Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-t}d\xi+\int\limits_{D''} Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-t}d\xi=$$

$$=\int\limits_{D'} Z^{-1}(\xi)\frac{f(\xi)}{\xi-t}d\xi+\int\limits_{D''} Z^{-1}(\xi)\frac{ig(\xi)}{\xi-t}d\xi.$$

Учитывая выражение для функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$, приходим к выражению

$$I(t)=-i\int\limits_{-q}^{b}\frac{1}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}}\frac{U_0\sqrt{b^2-\xi^2}-\omega_z\dfrac{b^2-\xi^2}{2}}{\xi-t}d\xi.$$

Представим интеграл в виде

$$I(t)=-iJ(t),$$

где

$$J(t)=U_0\int\limits_{-q}^{b}\sqrt{\frac{b+\xi}{q+\xi}}\frac{d\xi}{\xi-t}-\frac{\omega_z}{2}\int\limits_{-q}^{b}\frac{b^2-\xi^2}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-t}.$$

Введем обозначения

$$J_1(t)=\int\limits_{-q}^{b}\sqrt{\frac{b+\xi}{q+\xi}}\frac{d\xi}{\xi-t} \text{ и } J_2(t)=\int\limits_{-q}^{b}\frac{b^2-\xi^2}{\sqrt{(q+\xi)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-t},$$

тогда

$$J(t)=U_0J_1(t)-\frac{\omega_z}{2}J_2(t).$$

Рассмотрим первый интеграл

$$J_1(t)=\int\limits_{-q}^{b}\sqrt{\frac{b+\xi}{q+\xi}}\frac{d\xi}{\xi-t}.$$

Так как промежуток интегрирования $[-q,b]$ лежит вне отрезка $[-b,-q]$, границами которого являются особые точки ветвления функции $\sqrt{\dfrac{b+\xi}{q+\xi}}$, то нахождения искомого интеграла при помощи теоремы Коши приводит к необходимости вычисления дополнительных интегралов по полубесконечным промежуткам вида подобного данному, поэтому для этого интеграла применим непосредственное интегрирование. После замены $\dfrac{b+\xi}{q+\xi}=\sigma^2$ и интегрирования дробно рациональной функции получим

$$J_1(t)=\ln\frac{\sqrt{\dfrac{2b}{b+q}}+1}{\sqrt{\dfrac{2b}{b+q}}-1}-\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}\ln\frac{\sqrt{\dfrac{2b}{b+q}}+\sqrt{\dfrac{t+b}{t+q}}}{\sqrt{\dfrac{2b}{b+q}}-\sqrt{\dfrac{t+b}{t+q}}}.$$

Рассмотрим второй интеграл

$$J_2(t)=\int\limits_{-q}^{b}\sqrt{\frac{b-\xi}{q+\xi}}(b+\xi)\frac{d\xi}{\xi-t}.$$

Введем функцию

$$F(t)=(t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}},$$

ветвь которой при $t = \xi \geq b$ совпадает с $(\xi + b)\sqrt{\dfrac{\xi - b}{\xi + q}}$ и сделан разрез вдоль отрезка $[-q, b]$. Тогда при переходе с отрезка $[b, +\infty)$ на верхний берег разреза по отрезку $[-q, b]$ аргумент θ_1 (рис. 4) получит приращение, равное π, а аргумент θ_2 получит нулевое приращение, поэтому

$$F^-(t) = (t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}} = (t+b)\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i(\theta_1+\pi)}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}(t+b)\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} = i(\xi+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}\,.$$

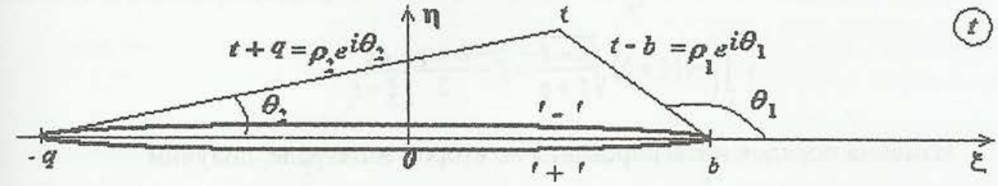

Рис. 4. Схема к вычислению функции $F(t)$

При переходе с отрезка $[b, +\infty)$ на нижний берег разреза по отрезку $[-q, b]$ аргумент θ_1 получит приращение равное $-\pi$, а аргумент θ_2 получит нулевое приращение, поэтому

$$F^+(t) = (t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}} = (t+b)\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i(\theta_1-\pi)}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}(t+b)\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} = -i(\xi+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}\,,$$

а при переходе с верхнего берега разреза по отрезку $[-q, b]$ на отрезок $(-\infty, -q]$ аргумент θ_1 получит нулевое приращение, а аргумент θ_2 получит приращение равное π, так что

$$F(t) = (t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}} = i(t+b)\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i(\theta_2+\pi)}}} = \frac{i(t+b)}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\sqrt{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} = (t+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}\,.$$

При $t \to \infty$ имеет место разложение

$$F(t) = t\sqrt{\frac{1-\frac{b}{t}}{1+\frac{q}{t}}}\left(1+\frac{b}{t}\right) = t\left(1-\frac{b}{2t}-\frac{b^2}{8t^2}+\dots\right)\left(1-\frac{q}{2t}+\frac{3q^2}{8t^2}+\dots\right)\left(1+\frac{b}{t}\right) =$$

$$= t\left(1-\frac{b+q}{2t}+\frac{3q^2+2bq-b^2}{8t^2}+\dots\right)\left(1+\frac{b}{t}\right) = t+\frac{b-q}{2}-\frac{b+q}{8t}(5b-3q)+\dots\,.$$

Следовательно, функция

$$G(t) = (t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}} - t - \frac{b-q}{2}$$

стремится к нулю при стремлении t в бесконечность, то есть $\lim\limits_{t\to\infty} G(t) = 0$.

В комплексной плоскости t рассмотрим область, ограниченную контурами L и L_∞, первый из которых охватывает отрезок интегрирования $[-q, b]$ действительной оси и обходит его по часовой стрелке, а второй расположен в окрестности бесконечно удаленной точки и обходится против часовой стрелки (рис. 5). Внутри выделенной многосвязной области функция $G(t)$ не имеет особых точек и для любой внутренней точки t справедлива интегральная формула Коши

$$2\pi i G(t) = \int\limits_L \frac{G(\xi)}{\xi - t}d\xi + \int\limits_{L_\infty} \frac{G(\tau)}{\tau - t}d\tau\,,$$

причём последний интеграл стремится к нулю при распространении контура интегрирования в бесконечность. Итак, получаем

$$2\pi i G(t)=\int_{L^-}\frac{G^-(\xi)}{\xi-t}d\xi+\int_{L^+}\frac{G^+(\xi)}{\xi-t}d\xi,$$

или

$$2\pi i G(t)=\int_{-q}^{b}\left(i(\xi+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}-\xi-\frac{b-q}{2}\right)\frac{d\xi}{\xi-t}+$$

$$+\int_{b}^{-q}\left(-i(\xi+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}-\xi-\frac{b-q}{2}\right)\frac{d\xi}{\xi-t}.$$

Изменив порядок интегрирования во втором интеграле, получим

$$2\pi i\left((t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}}-t-\frac{b-q}{2}\right)=2i\int_{-b}^{q}(\xi+b)\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}}\frac{d\xi}{\xi-t},$$

откуда

$$J_2(t)=\pi\left((t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}}-t-\frac{b-q}{2}\right).$$

Следовательно, одно из частных решений $\Psi(t)$ поставленной задачи Келдыша-Седова имеет вид

$$\Psi(t)=-\frac{1}{\pi i}\sqrt{(t+q)(t-b)}i\left(U_0J_1(t)-\frac{\omega_z}{2}J_2(t)\right),$$

где

$$J_1(t)=\ln\frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}+1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}-1}-\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}\ln\frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}+\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}-\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}},$$

$$J_2(t)=\pi\left((t+b)\sqrt{\frac{t-b}{t+q}}-t-\frac{b-q}{2}\right).$$

Окончательно получаем

$$\Psi(t)=\frac{U_0}{\pi}\left[\sqrt{t^2-b^2}\ln\frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}+\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}-\sqrt{\frac{t+b}{t+q}}}-\sqrt{(t+q)(t-b)}\ln\frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}+1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}}-1}\right]+$$

$$+\frac{\omega_z}{2}\left(t^2-b^2-\left(t+\frac{b-q}{2}\right)\sqrt{(t+q)(t-b)}\right).$$

Определение точки отрыва. Выражение для скорости течения находим по формуле

$$v_x-iv_y=\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dt}\frac{dt}{dz}.$$

После дифференцирования и выделения мнимой и действительной части приходим к выражению для v_x, которое при $\xi\to -q$ имеет особенность. Из требования непрерывности горизонтальной скорости жидкости [4] получаем следующее уравнение для определения положения точки отрыва

$$\ln\frac{1-\sqrt{\dfrac{1+\lambda}{2}}}{1+\sqrt{\dfrac{1+\lambda}{2}}}+2\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}+\Lambda\frac{\pi}{8}(3\lambda-1)=0,$$

где $\lambda=\frac{q}{b}$ – безразмерная координата точки отрыва; $\Lambda=\frac{\omega_z b}{U}$ – безразмерный кинематический параметр.

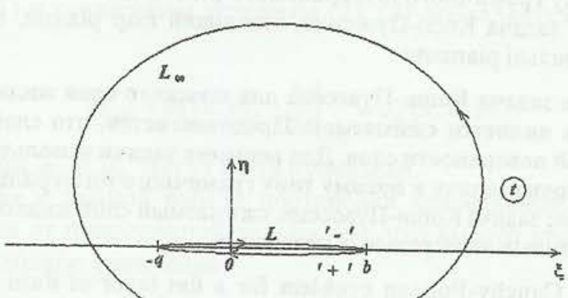

Рис. 5. Схема к вычислению функции $J_2(t)$ при помощи формулы Коши

Полученное уравнение совпадает с уравнением Седова для горизонтального удара вертикальной пластинки без вращения [4]. Численное исследование полученного уравнение показывает, что оно имеет единственное решение при значениях кинематического параметра $\Lambda \le 2,653$. При больших значениях кинематического параметра уравнение имеет три корня, что указывает на неприменимость выбранной модели расположения отрывных зон.

Выводы. Получено точное решение задачи об ударе с вращением пластинки вертикально, погруженной в несжимаемую жидкость. Полученное решение позволяет сделать заключение о наличии зоны отрыва при ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, и определить её расположение на пластинке в зависимости от кинематических параметров.

Библиографические ссылки

1. **Гуревич М. И.** Теория течений со свободными границами / М. И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика. – 1971. – Т. 5. – С. 32–114.
2. **Григолюк Э. И.** Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. **Логвинович Г. В.** Гидродинамика течений со свободными границами / Г. В. Логвинович. – Киев, 1969. – 216 с.
4. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1968. – 512 с.

Надійшла до редколегії 10.05.2012.