УДК 532.593

О. В. Козлова

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ КОШИ-ПУАССОНА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Розглядається задача Коші-Пуассона для плоского шару рідини в припущенні, що рідина стислива. Вважається, що шар збуджується за рахунок здвигів донної поверхні шару. Для розв'язку задачі використовується метод Вольтерра, який зводить задачу до нового типу граничного інтегрального рівняння.

Ключові слова: задача Коші-Пуассона, стисливий шар рідини, сейсмічні морські хвилі, граничні інтегральні рівняння.

Рассматривается задача Коши-Пуассона для плоского слоя жидкости в предположении, что жидкость является сжимаемой. Предполагается, что слой возмущается за счёт подвижек донной поверхности слоя. Для решения задачи используется метод Вольтерра, который приводит задачу к новому типу граничного интегрального уравнения.

Ключевые слова: задача Коши-Пуассона, сжимаемый слой жидкости, сейсмические морские волны, граничные интегральные уравнения.

The problem of Cauchy-Poisson problem for a flat layer of fluid in the assumption that the fluid is compressible is considered. It is assumed that the layer is perturbed due to shifts benthic surface of the layer. Using the method of Volterra to solve the problem, which reduces the problem to a new type of boundary integral equation.

Key words: Cauchy-Poisson problem, compressible fluid layer, seismic sea waves, boundary integral equations.

Введение. При рассмотрении колебания слоя жидкости в различных бассейнах, в том числе и в естественных водоёмах типа озёр и морей, обычно в первом приближении используют или постановку задачи в рамках модели мелкой воды, или в рамках модели Коши-Пуассона. При использовании классической модели Коши-Пуассона жидкость считается идеальной и несжимаемой, и основным дифференциальным уравнением, описывающим такие её движения, является уравнение Лапласа. Именно в такой постановке решается большинство задач о колебании жидкости в ограниченных технических бассейнах и в естественных водоемах [1; 2]. Задачи возникновения и распространения крупномасштабных сейсмических волн решаются как в рамках модели Коши-Пуассона, так и в рамках модели мелкой воды, в которой основным уравнением является волновое уравнение [3 – 5].

В данной работе сделана попытка учесть сжимаемость слоя жидкости в плоской задаче Коши-Пуассона. Несмотря на то, что скорость звука в воде является значительной, но всё же она не бесконечно большая, как это принято в модели Коши-Пуассона, и эффект запаздывания в передаче возмущений в некоторых случаях может оказаться весьма заметным.

Постановка задачи. Рассматривается плоская задача для слоя жидкости, который в невозмущённом состоянии имеет толщину h. Систему координат XOY выбираем так, что невозмущенной донной поверхности соответствует $y = 0$, а свободной поверхности $y = h$; предполагаем, что слой неограничен в обе стороны по оси X.

Как известно, классическая задача Коши-Пуассона имеет следующую постановку: имеется потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

и граничным условиям на поверхности дна:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = f(x,t), \tag{2}$$

где $f(x,t)$ – представляет собой закон подвижки донной поверхности (вертикальная скорость движения всей донной поверхности или отдельных его участков); на свободной поверхности $y = h$:

$$\left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|_{y=h} = 0\,. \tag{3}$$

К уравнению (1) и граничным условиям (2), (3) добавляется ещё начальные условия в виде

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x,y); \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x,y), \tag{4}$$

в частности, функции φ_0 и ψ_0 могут быть нулевыми.

Рассматриваемая в данной работе постановка «сжимаемой» задачи Коши-Пуассона отличается от приведённой только тем, что вместо уравнения Лапласа (1) используется волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{5}$$

а условия (2) – (4) имеют прежний вид.

Метод решения «сжимаемой» задачи Коши-Пуассона. Для решения уравнения (5) с условиями (2) – (4) применим метод Вольтерра [6]. Рассмотрим некоторую область Ω трёхмерного пространства x, y, t, ограниченную поверхностью S, состоящей из конечного числа участков, имеющих непрерывно меняющуюся касательную плоскость.

Пусть функция $\varphi(x,y,t)$ – непрерывное решение рассматриваемой задачи, имеющее непрерывные вторые производные, и $\sigma(x,y,t)$ такое же решение уравнения

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 0\,. \tag{6}$$

Тогда имеет место формула Грина для объёма Ω:

$$\iint\limits_S \{\varphi P_n(\sigma) - \sigma P_n(\varphi)\} dS = 0\,, \tag{7}$$

где через $P_n(\varphi)$ обозначен оператор

$$P_n(\varphi) = \left(\cos(n,x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(n,y)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{a^2}\cos(n,t)\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi\,, \tag{8}$$

и n – направление внутренней нормали к области Ω.

В формуле (7) dS – элемент поверхности в пространстве x, y, t. Хотя формула (7) выведена в предположении, что φ и σ имеют непрерывные вторые производные, однако она сохраняет смысл даже в том случае, когда одна из этих двух функций в области является разрывным решением.

Возьмём в качестве функции σ фундаментальное решение уравнения (6), которое принадлежит Вольтерра. Это решение имеет вид

$$\sigma(x,y,t;x_0,y_0,t_0) = \ln\left(\frac{a(t_0-t)}{r} - \sqrt{\frac{a^2(t_0-t)^2}{r} - 1}\right), \tag{9}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ и (x_0, y_0, t_0) служат в качестве произвольных параметров.

Решение (9) справедливо в обратном конусе Маха

$$a^2(t_0-t)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2, \quad t<t_0 \tag{10}$$

и на границе этого конуса оно обращается в нуль. Вне указанного конуса функцию σ следует полагать равной нулю.

Возьмём в качестве указанной области Ω следующую область: она ограничена плоскостью $t=0$, плоскостью $y=0$, плоскостью $y=h$, поверхностью обратного конуса (10) с вершиной в точке (x_0,y_0,t_0) и поверхностью малого цилиндра радиуса ε, описанного вокруг оси обратного конуса, то есть линии

$$x=x_0, \quad y=y_0. \tag{11}$$

Поперечное сечение области Ω плоскостью $x=x_0$ показано на рис. 1.

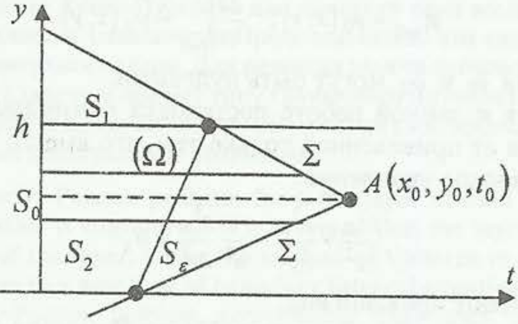

Рис. 1. Поперечное сечение области

Область Ω представляет собой область влияния на точку A с координатами (x_0,y_0,t_0).

Как видно из рис. 1, поверхность S области Ω состоит из отдельных кусков, которые обозначим следующим образом: Σ – кусок поверхности обратного конуса Маха, вырезаемого из конуса плоскостями $y=0$ и $y=h$; S_0 – часть плоскости $t=0$, вырезаемая конусом Маха из полосы $0<y<h$ (за исключением круга радиуса ε); S_1 – часть плоскости $y=h$, вырезаемой конусом Маха; S_2 – часть плоскости $y=0$, вырезаемая конусом Маха; S_ε – поверхность цилиндра с осью $x=x_0$; $y=y_0$, длиной $0<t<t_0-\varepsilon/a$.

Таким образом, тождество Грина (7) преобразуется к виду

$$\iint\limits_{S_0+S_\varepsilon+S_1+S_2+\Sigma}\{\varphi P_n(\sigma)-\sigma P_n(\varphi)\}\,dS=0. \tag{12}$$

На поверхности Σ подынтегральное выражение в (12) равно нулю.

На поверхности S_ε имеем

$$P_n(\sigma)=\frac{\partial\sigma}{\partial r}=\frac{a(t_0-t)}{r\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r^2}},$$

так что

$$\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial r}-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)dS=\int\limits_0^{t-\varepsilon/a}dt\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\left\{\varphi\frac{a(t_0-t)}{\varepsilon\sqrt{a^2(t_0-t)^2-\varepsilon^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\ln\left(\frac{a(t_0-t)}{\varepsilon}-\sqrt{\frac{a^2(t_0-t)}{\varepsilon^2}-1}\right)\right\}d\theta. \tag{13}$$

Предполагая, что функция $\varphi(x,y,t)$ везде ограничена, предельным переходом $\varepsilon \to 0$ из выражения (13) получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial r}-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)dS = 2\pi\int\limits_0^{t_0}\varphi(x_0,y_0,t)\,dt\,. \tag{14}$$

После предельного перехода поверхность S_0 на плоскости $t=0$ будет представлять ту часть, которая вырезается обратным конусом Маха из полосы $0<y<h$. На этой поверхности $cox(n\,x)$ и $\cos(n\,y)$ обращаются в нуль, а $\cos(n,t)=1$, так что

$$\iint\limits_{S_0}\left\{\varphi\,P_n(\sigma)-\sigma\,P_n(\varphi)\right\}dS = -\frac{1}{a^2}\iint\limits_{S_0}\left(\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)dS\,. \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{a}{\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r^2}}\Bigg|_{t=0}=\frac{a}{\sqrt{a^2t_0^2-r^2}}$$

и

$$\sigma\big|_{t=0}=\ln\left(\frac{at_0}{r}-\sqrt{\frac{a^2t_0^2}{r^2}-1}\right),$$

из (15) получаем

$$\iint\limits_{S_0}\left\{\varphi\,P_n(\sigma)-\sigma\,P_n(\varphi)\right\}dS = -\frac{1}{a^2}\iint\limits_{S_0}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2t_0^2-r^2}}\varphi_0(x,y)-\right.$$
$$\left.-l\,n\left(\frac{at_0}{r}-\sqrt{\frac{a^2t_0^2}{r^2}-1}\right)\psi_0(x,y)\right\}dx\,dy\,, \tag{16}$$

где область S_0 представляет собой пересечение областей

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-a^2t_0^2\le 0 \quad\text{и}\quad 0\le y\le h\,.$$

Участок границы S_1 представляет собой сечение обратного конуса Маха плоскостью $y=h$. В результате на плоскости $y=h$ образуется область S_1, ограниченная гиперболой, как показано на рис. 2.

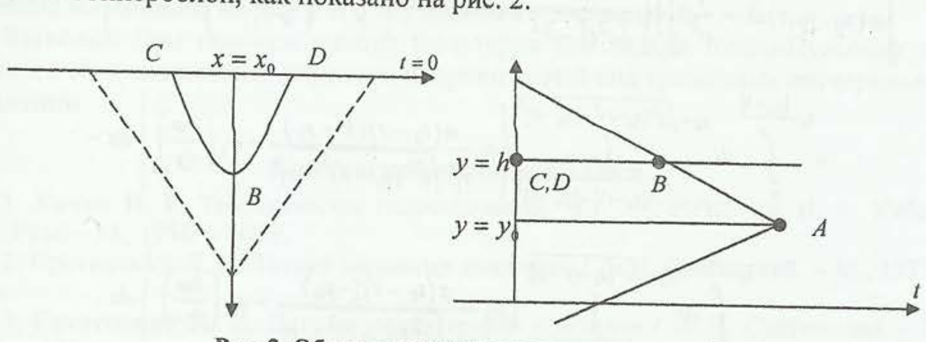

Рис. 2. Область влияния на плоскости y = h

Этот участок границы расположен между гиперболами

$$x_0-\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}<x<x_0+\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}\,,$$

где $0<t<t_0-\dfrac{|y_0-h|}{a}$.

На границе S_1 $\cos(n\,x)=0$, $\cos(n\,t)=0$, а $\cos(n\,y)=1$, так что

$$P_n(\varphi)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=h} \quad\text{и}\quad P_n(\sigma)=-\frac{\partial\sigma}{\partial y}\bigg|_{y=h}=-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)_1,$$

причём

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{a(t_0-t)(y-y_0)}{r^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r^2}}\Bigg|_{y=h}=\frac{a(t_0-t)(h-y_0)}{r_1^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r_1^2}},$$

где

$$r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(h-y_0)^2}.$$

Обозначив, далее через $\sigma_1=\sigma|_{y=h}$, получим

$$\iint\limits_{S_1}\{\varphi P_n(\sigma)-\sigma P_n(\varphi)\}\,dS=-\iint\limits_{S_1}\left\{\varphi_1\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)_1-\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1\right\}dS=$$

$$=-\int\limits_0^{t_0-\frac{|y_0-h|}{a}}dt\int\limits_{x_0-\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}}^{x_0+\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}}\left\{\varphi_1\frac{a(t_0-t)(h-y_0)}{r_1^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r_1^2}}-\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1\right\}dx. \quad (17)$$

Аналогичным образом для участка границы S_2, образованной пересечением указанного конуса Маха с плоскостью $y=0$ получим:

$$\iint\limits_{S_2}\{\varphi P_n(\sigma)-\sigma P_n(\varphi)\}\,dS=\int\limits_0^{t_0-\frac{y_0}{a}}dt\int\limits_{x_0-\sqrt{a^2(t_0-t)^2-y_0^2}}^{x_0+\sqrt{a^2(t_0-t)^2-y_0^2}}\left\{\varphi_2\frac{a(t_0-t)(-y_0)}{r_2^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r_2^2}}-\sigma_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2\right\}dx, \quad (18)$$

где

$$r_2=\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2},\quad \varphi_2=\varphi(x,y,t)\big|_{y=0},\quad \sigma_2=\sigma\big|_{y=0}.$$

Таким образом, собирая полученные частные результаты, получим окончательное решение задачи по методу Вольтерра

$$\int\limits_0^{t_0}\varphi(x_0,y_0,t)\,dt=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{S_0}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2t_0^2-r^2}}\varphi_0(x,y)-l\,n\left(\frac{at_0}{r}-\sqrt{\frac{a^2t_0^2}{r^2}-1}\right)\psi_0(x,y)\right\}dx\,dy+$$

$$+\int\limits_0^{t_0-\frac{|y_0-h|}{a}}dt\int\limits_{x_0-\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}}^{x_0+\sqrt{a^2(t_0-t)^2-(y_0-h)^2}}\left\{\varphi_1\frac{a(t_0-t)(h-y_0)}{r_1^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r_1^2}}-\sigma_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1\right\}dx-$$

$$-\int\limits_0^{t_0-\frac{y_0}{a}}dt\int\limits_{x_0-\sqrt{a^2(t_0-t)^2-y_0^2}}^{x_0+\sqrt{a^2(t_0-t)^2-y_0^2}}\left\{\varphi_2\frac{a(t_0-t)(-y_0)}{r_2^2\sqrt{a^2(t_0-t)^2-r_2^2}}-\sigma_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2\right\}dx. \quad (19)$$

В формуле (19) первый интеграл правой части представляет собой результат влияния начальных условий и является известной функцией $\varphi(x_0,y_0,t_0)$, второй – результат влияния свободной границы $y=h$, а третий – влияния донной поверхности $y=0$.

Уравнение (19) служит источником получения граничного интегрального уравнения, если в нём совершить предельный переход от точки наблюдения $A(x_0,y_0,t_0)$ на границу $y_0=h$ или $y_0=0$.

Заметим, что в зависимости от положения точки $A(x_0,y_0,t_0)$, вернее, в зависимости от координат (y_0,t_0) области S_1 и S_2 могут оказаться или обе нулевыми, или, по крайней мере, одна из них может полностью отсутствовать, что свидетельствует о том, что возмущения границы в данный момент времени не оказывают влияния, рис. 3.

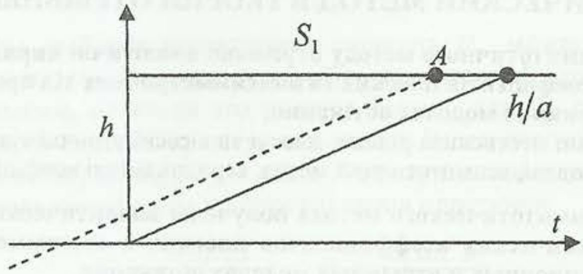

Рис. 3. Построение области влияния для точки $A(x_0, h, t_0 < h/a)$

Например, если провести через начало координат характеристику $t = \dfrac{y}{a}$ и взять точку A с координатами $y_0 = h$ и $t_0 < \dfrac{h}{a}$, то область S_2 будет полностью отсутствовать (поведение донной поверхности до данного момента t_0 ещё не будет ощущаться свободной поверхностью), и для всех таких точек A будет иметь место соотношение

$$\int_0^{t_0} \varphi(x_0, h, t)dt = \varphi(x_0, h, t_0) - \int_0^{t_0} dt \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 dx, \quad (20)$$

где $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1$ – значение нормальной компоненты скорости на свободной поверхности.

Выражение (20) связывает значение потенциала на свободной поверхности $\varphi_0(x_0, h, t)$ со значением нормальной компоненты скорости.

Аналогично можно получить выражение, связывающее (в диапазоне $t < \dfrac{h}{a}$) значение потенциала на дне и его нормальной производной.

Выводы. При помощи метода Вольтерра для задачи Коши-Пуассона для плоского слоя сжимаемой жидкости получен новый вид граничных интегральных уравнений.

Библиографические ссылки

1. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика. Ч.1 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М., 1956. – 560 с.

2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений / Л. Н. Сретенский. – М., 1977. – 816 с.

3. **Сретенский Л. Н.** Динамическая теория приливов / Л. Н. Сретенский. – М., 1987. – 472 с.

4. **Мурти Т. С.** Сейсмические морские волны цунами / Т. С. Мурти. – Ленинград, – 1981. – 412 с.

5. **Dutykh D.** Modelisation mathematique des tsunamis / D. Dutykh // These de doctorat de l'Ecole Normale superieure de Cachan. – France, 2007. – 222 p.

6. **Франк Ф.** Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть вторая / Ф. Франк, Р. Мизес. – Л.-М., 1937. – 998 с.

Надійшла до редколегії 12.03.2012.