Выводы. На основе асимптотического метода разработаны аналитические соотношения для расчета аэродинамических коэффициентов плоских и осесимметричных тел при струйном, кавитационном и отрывном обтекании. Предложенные соотношения удовлетворительно согласуются с расчетными и опытными данными других авторов в широких диапазонах изменения определяющих параметров.

Библиографические ссылки

1. **Гогиш Л. В.** Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчетные модели / Л. В. Гогиш, Г. Ю. Степанов. – М., 1990. – 384 с.

2. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. – М., 1979. – 536 с.

3. **Девнин С. И.** Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: Справочник / С. И. Девнин. – Л., 1983. – 320 с.

4. **Красноперов Е. В.** Экспериментальная аэродинамика / Е. В. Красноперов. – М., 1935. – 192 с.

Надійшла до редколегії 03.04.2012.

УДК 532.593

Е. В. Козлова

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Розглядається задача про хвильові рухи стисливого шару рідини, обмеженого зверху вільною поверхнею та знизу донною поверхнею, яка підлягає деяким нестаціонарним збуренням. Робиться спроба за допомогою інтегральної формули Кірхгоффа отримати граничні інтегральні рівняння, пристосовані для розв'язання крайової задачі.

Ключові слова: хвильові рухи шару рідини, урахування стисливості рідини, метод Кірхгоффа, метод граничних інтегральних рівнянь.

Рассматривается задача о волновых движениях сжимаемого слоя жидкости, ограниченного сверху свободной поверхностью, а снизу донной поверхностью, которая подвержена некоторым нестационарным возмущениям. Делается попытка при помощи интегральной формулы Кирхгоффа получить граничные интегральные уравнения, пригодные для решения краевой задачи.

Ключевые слова: волновые движения слоя жидкости, учёт сжимаемости жидкости, метод Кирхгоффа, метод граничных интегральных уравнений.

The problem of wave motions of a compressible fluid layer bounded by the upper free surface and the below benthic surface, which is exposed some a nonstationary perturbations. An attempt is made using the integral Kirhhoff's formula to get a boundary integral equations which are suitable for the solution.

Key words: wave motion of a fluid layer, accounting of fluid compressibility, Kirchhoff's method, method of boundary integral equations.

Введение. В гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости в задачах обтекания тел неограниченной или ограниченной жидкостью получил широкое распространение метод граничных интегральных уравнений, основанный на применении к таким задачам интегральных тождеств Грина [1 – 3]. Он же применялся и к задачам со свободной границей, но широкого распространения не получил. Заметим, что метод граничных интегральных уравнений, уже ставший классическим, основан, в первую очередь, на том факте, что течения несжимаемой идеальной жидкости описываются уравнением Лапласа.

В данной работе на примере рассмотрения задачи о волновом движении жидкого слоя сделана попытка получить аналоги указанных граничных интегральных уравнений в предположении, что рассматриваемый слой жидкости является слабо сжимаемым, и описывается вместо уравнения Лапласа линейным волновым уравнением для потенциала возмущений $\varphi(x, y, z, t)$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 . \qquad (1)$$

Постановка задачи. Для определённости рассмотрим пространственный слой жидкости, предполагающийся сжимаемым, волновые движения в котором удовлетворяют уравнению (1).

В невозмущённом состоянии слой имеет постоянную толщину h и ограничен горизонтальными плоскостями $z = 0$ и $z = h$. Волновые движения в слое индуцируются подвижками донной поверхности, которые первоначально можно мыслить себе заданными.

Здесь для простоты мы будем рассматривать случай так называемых бесконечно малых волн, то есть будем использовать упрощённую модель волнового движения жидкости Коши-Пуассона [4]. Как известно, в этом случае для возвышения свободной поверхности $\zeta(x, y, t)$ над исходным уровнем $z = h$ имеем уравнение

$$\zeta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\bigg|_{z=h} , \qquad (2)$$

следующее из динамического условия и имеющее один и тот же вид как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости, и условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=h} , \qquad (3)$$

являющееся следствием линеаризации кинематического условия на свободной поверхности. Комбинация условий (2) и (3) даёт условие на свободной поверхности в терминах потенциала:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=h} = 0 . \qquad (4)$$

На донной поверхности, если учитывать приложение рассматриваемой задачи к исследованию возникновения сейсмических морских волн [5; 6], будем считать заданным закон подвижек морского дна

$$z = \Delta(x, y, t) ,$$

и, в силу условия непроницаемости, в рамках теории Коши-Пуассона, заданной вертикальную составляющую скорости движения

$$(\upsilon_z)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\partial\Delta}{\partial t} = f(x, y, t) . \qquad (5)$$

Вообще, при использовании численной процедуры, граничные условия (3) и (2) используются как уравнения, позволяющие определить значение ζ и φ на свободной поверхности через промежуток времени Δt, если эти функции известны в какой-то момент t; именно, из (3) находим приращение функции ζ за промежуток Δt

$$\zeta(x, y, t + \Delta t) - \zeta(x, y, t) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=h} \Delta t , \qquad (6)$$

а из (2) – изменение потенциала на свободной поверхности

$$\varphi(x, y, h, t + \Delta t) = \varphi(x, y, h, t) - g\zeta(x, y, h, t)\,\Delta t\,. \tag{7}$$

Таким образом, при использовании численной процедуры можно считать, что в каждый момент времени известно уравнение свободной поверхности и значение на ней потенциала. Для возможности перехода численной процедуры на следующий временной шаг, как следует из (6), необходимо уметь определять в каждый момент времени значение $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ на свободной поверхности.

Покажем, как, используя формулу Грина, можно получить граничные интегральные уравнения, обеспечивающие определение значения неизвестной $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ на свободной поверхности и заодно – значение потенциала φ на донной поверхности.

Граничные интегральные уравнения задачи. В основу получения граничных интегральных уравнений задачи положена интегральная формула Кирхгоффа [1], которая представляет собой тождество Грина для волнового уравнения в трёхмерном пространстве. Эта формула имеет вид

$$\varphi(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\} dS_M\,, \tag{8}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка наблюдения находящаяся внутри слоя жидкости; r – расстояние от точки наблюдения M_0 до текущей точки M на границе интегрирования. Квадратные скобки, окружающие функции в формуле Кирхгоффа, означают, что функция вычисляется с учётом запаздывания распространения сигнала от точки M до точки M_0, то есть соответствующие функции вычисляются при $t = t_0 - \dfrac{r}{a}$, где t_0 – момент наблюдения. В формуле (8) поверхность S, вообще говоря, замкнутая, и состоит из невозмущённой поверхности дна $z = 0$, невозмущённой поверхности $z = h$ и, если рассматривается бесконечно протяжённый слой, то из условной замыкающей цилиндрической поверхности достаточно большого радиуса R. Можно показать, что при определённых предположениях, влияние этой условной цилиндрической поверхности в формуле (8) при $R \to \infty$ становится ничтожным, так что можно считать, что в выражении (8) поверхность интегрирования S состоит из двух бесконечных плоскостей $z = 0$ и $z = h$.

Запишем формулу Кирхгоффа в виде

$$\varphi(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - [\varphi]\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\} dS_M\,, \tag{9}$$

где $\dfrac{\partial r}{\partial n} = \cos\theta$ и θ – угол между внешней нормалью к элементу поверхности и вектором $\vec{r}_{M_0M}$, исходящем из точки наблюдения M_0 в текущую точку интегрирования поверхности M.

Нетрудно показать, что если устремить точку M_0 к поверхности S изнутри слоя, то, аналогично случаю несжимаемой жидкости, получим следующий результат

$$\lim_{M_0 \to S}\iint\limits_S [\varphi]\frac{\cos\theta}{r^2}\,dS = 2\pi\varphi(M_0, t_0) + \iint\limits_S [\varphi]\frac{\cos\varphi}{r_{M_0M}^2}\,dS\,, \tag{10}$$

где последний интеграл, в котором точка M_0 уже лежит на поверхности интегрирования S, является сходящимся несобственным интегралом.

Таким образом, переходя в формуле Кирхгоффа (9) к пределу $M_0 \to S$, получим следующее тождество, связывающее граничные значения функций φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$:

$$\varphi(M_0,t_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]+\left(\frac{[\varphi]}{r^2}+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right)\cos\theta\right\}dS\,. \tag{11}$$

Рассмотрим возможную численную процедуру расчёта эволюции движения жидкости с помощью соотношения (11). Пусть в какой-то момент времени t_0 (и во все предыдущие моменты $0<t<t_0$) известны функции

$$\varphi\big|_{t_0}=\varphi^0\,,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t_0}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^0,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{t_0}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^0,\ \zeta\big|_{t_0}=\zeta^0 \tag{12}$$

на всей границе области S и, тем самым, в силу уравнения (9), известные во всей рассматриваемой области. Выберем временной шаг Δt и попытаемся рассчитать функции:

$$\varphi\big|_{t_0+\Delta t}=\varphi^1\,,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t_0+\Delta t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^1,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{t_0+\Delta t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^1,\ \zeta\big|_{t_0+\Delta t}=\zeta^1\,. \tag{13}$$

Во-первых, из условия (3) можно в первом приближении найти новое положение свободной границы при $t_0+\Delta t$

$$\zeta^1=\zeta\left(x_0,y_0,h,t_0+\Delta t\right)=\zeta^0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^0_{z=h}\Delta t\,, \tag{14}$$

а из условия (2) – новое значение потенциала во всех точках свободной границы:

$$\varphi^1_{z=h}=\varphi\left(x_0,y_0,h,t_0+\Delta t\right)=-g\,\zeta^1\Delta t=-g\,\Delta t\,\zeta\left(x_0,y_0,h,t_0+\Delta t\right). \tag{15}$$

Дискретизируем теперь поверхность S на N элементов площадью S_j и запишем формулу (11) в момент времени $t_0+\Delta t$ в виде

$$\varphi\left(M_{0i},t_0+\Delta t\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\iint\limits_{S_j}\left\{\frac{1}{r_{ij}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_j+\frac{[\varphi]_j}{{r_{ij}}^2}\cos\theta_{ij}+\frac{1}{ar_{ij}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_j\cos\theta_{ij}\right\}dS\,, \tag{16}$$

$i=1,2,\ldots N$, где точка M_{0i} может выбирать любое определённое значение на каждом элементе S_j; r_{ij} – расстояние от точки M_{0i} до текущей точки элемента S_j.

Обратим внимание на то, что при выбранном расположении точки M_{0i} в ячейке S_i во всех других ячейках $j\neq i$ значения подынтегральных функций вычисляются в некоторый момент времени, предыдущий по отношению к актуальному моменту $t_0+\Delta t$, то есть, по предположению, считаются известными из расчётов в предыдущей момент времени. Следовательно, при выборе участка S_i, где располагается точка M_{0i}, только этот участок содержит неизвестные функции в данный момент времени. Но, когда и точка M_{0i}, и текущая точка M находятся в пределах участка S_i, то $\theta_{ij}=\pi/2$, и, следовательно, слагаемые содержащие $[\varphi]_i$ и $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_i$ дают нулевой вклад в правую сторону выражения (16).

Таким образом, если точка наблюдения M_{0i} принадлежит участку S_i, то вклад в правую часть даёт только член, содержащий $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_i$

$$\iint\limits_{S_i}\frac{1}{r_{ij}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_i dS=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i\iint\limits_{S_i}\frac{dS}{r_{M_{0i}M}}\,, \tag{17}$$

причём значение $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i$ относится именно к актуальному времени $t_0+\Delta t$, а интегральный член вычисляется непосредственно, в зависимости от выбранного элемента S_i.

Заметим еще, что пока точка M_{0i} в выражении (11) принадлежит верхней границе, все интегралы по элементам S_{ji} принадлежащей верхней границе, будут содержать функции φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, относящиеся к предыдущим моментам времени, то есть уже известным.

Таким образом, можно утверждать, что когда точка M_{0i} принадлежит элементам верхней границы, то единственной неизвестной величиной оказывается значение $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i$, относящееся к данному актуальному моменту $t_0 + \Delta t$, которое и может быть определено из (16).

Перейдем к случаю, когда точка M_{0i} находится на нижней границе. По определению, в актуальный момент времени $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ известна на всей поверхности (и известна также во все предыдущие времена), так что величина $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_i$ в уравнении (16) оказывается известной. Далее, члены, содержащие $[\varphi]_i$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_i$, вклада в правую часть не дают из-за того, что на этом участке (если элемент S_i гладкий) $\cos\theta_{ij} = 0$, а на других участках значения $[\varphi]$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ используются с запаздыванием, то есть известны.

Таким образом, если точка наблюдения M_{0i} располагается на данной поверхности, то выражение (16) представляет собой явную функцию для определения значения φ на данной поверхности в актуальный момент времени в виде квадратур.

Выводы. Показано, что если учитывать сжимаемость жидкости, то метод граничных интегральных уравнений, основанный на использовании формулы Кирхгоффа для волнового уравнения, фактически приводит к явному методу определения неизвестных на границе функций при помощи квадратур, в противоположность методу граничных интегральных уравнений для несжимаемой жидкости, сводящему решение задачи в дискретном варианте к решению системы алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей.

Библиографические ссылки

1. **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М., 1978. – 724 с.

2. **Бенерджи П.** Метод граничных интегральных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.

3. **Бреббиа К.** Методы граничных элементов / К. Бреббиа, Ж. Телес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.

4. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений / Л. Н. Сретенский. – М., 1977. – 811 с.

5. **Мурти Т. С.** Сейсмические морские волны цунами / Т. С. Мурти. – Л.-М., 1981. – 412 с.

6. **Dutykh D.** Modelisation mathematique des tsunamis / D. Dutykh // These de doctorat de l'Ecole Normale superieure de Cachan. – France, 2007. – 222 p.

Надійшла до редколегії 12.03.2012.