го дослідження даної задачі. Отримані результати використані при розробці ряду практичних рекомендацій щодо проектування та експлуатації КГФ.

Бібліографічні посилання

1. **Башкатов А. Д.** Прогрессивные технологии сооружения скважин / А. Д. Башкатов. – М., 2003. – 554 с. ил.

2. **Дреус А. Ю.** Математическое моделирование тепловых процессов в гравийных фильтрах гидрогеологических скважин / А. Ю. Дреус, А. А. Кожевников, Е. Е. Лысенко, А. К. Судаков // ДАН України. Серія: «Науки про Землю». – 2010. – № 9. – С. 98 – 102.

3. **Дреус А. Ю.** Математическая модель и алгоритм расчета тепловлагопереноса в промерзающей крупнодисперсной среде / А. Ю. Дреус, Е. Е. Лысенко // Системні технології. – 2011. – № 2(73). – С. 72 – 77.

4. **Кожевников А. О.** Классификация способов создания гравийных фильтров / А. О. Кожевников, А. К. Судаков // Науковий вісник НГУ. – 2010. – № 9 – 10. – С. 70 – 74.

5. **Кожевников А. О.** Технологія виготовлення блочного кріогенно-гравійного фільтра бурових свердловин / А. О. Кожевников, А. К. Судаков, О. Ф. Камишацький, О. А. Лексиков, Д. А. Судакова // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: «Гірничо-геологічна». – 2010. – Вип. 14 (181). – С. 83 – 86.

6. **Лыков А. В.** Теория сушки / А. В. Лыков. – М., 1968. – 472 с.

7. **Нерсесова З. А.** Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры / З. А. Нерсесова // ДАН СССР. – 1950. – Т. 75, № 6. – С. 845 – 846.

8. **Никитенко Н. И.** Динамика процессов тепломассопереноса, фазовых превращений и усадки при обезвоживании коллоидных капиллярно-пористых материалов / Н. И. Никитенко, Ю. Ф. Снежкин, Н. Н. Сороковая // Промышленная теплотехника. – 2003. – Т. 25, № 3. – С. 56 – 66.

9. **Пермяков П. П.** Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах / П.П. Пермяков. – Новосибирск, 1989. – 86 с.

10. **Приходько А. А.** «Численное моделирование процессов фазовых переходов пористых сред на основе решения задачи Стефана и метода эффективной теплоемкости» / А. А. Приходько, С. В. Алексеенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: «Механика». – 2001. –Вып. 5, Т. 1. – С. 117 – 125.

Надійшла до редколегії 10.01.2012.

УДК 536.24

Е. О. Дидинская, Д. В. Евдокимов, А. А. Кочубей
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕЛАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

На основі методу граничних елементів запропоновано новий, більш економний чисельний алгоритм розрахунку температурних полів у тілах з включеннями. Проаналізовано граничні випадки співвідношень властивостей основного середовища та матеріалів включень. Запропоновані підходи можуть бути застосовані у широкому колі теплових розрахунків.

Ключові слова: метод граничних елементів, включення, температура, метод малого параметра.

На основе метода граничных элементов предложен новый, более экономный численный алгоритм расчета температурных полей в телах с включениями. Проанализированы предельные случаи соотношений свойств основной среды и матери-

алов включений. Предложенные подходы могут быть использованы в широком кругу тепловых расчетов.

Ключевые слова: метод граничных элементов, включение, температура, метод малого параметра.

The new more economic numerical algorithm for calculation of temperature fields in bodies with inclusions is proposed on the base of the boundary element method. The limiting cases of relations between properties of the maim media and materials of the inclusions are considered. The proposed approaches can be used in wide field of thermal calculations.

Key words: boundary element method, inclusion, temperature, small parameter method.

Введение. Развитие современных численных методов, в том числе и альтернативных, вместе с прогрессом вычислительной техники дало возможность прямого численного решения задач, которые еще недавно таким подходам не поддавались. Среди них хотелось бы выделить задачи, сформулированные в областях сложной геометрической формы. Однако простое прямое применение традиционных численных методов, даже с учетом существенно возросшей производительности вычислительной техники, как правило, не может обеспечить столь существенный прогресс в численном решении задач. Поэтому помимо совершенствования вычислительной техники необходимо еще совершенствовать и численные методы.

Среди задач теплопроводности, одной из наиболее распространенных, является проблема определения стационарного или квазистационарного поля температур в области сложной геометрической формы с включениями, то есть, кусочно-неоднородными свойствами среды. Вычислительная сложность таких задач не вызывает ни малейшего сомнения.

В то же время, они исключительно актуальны как для разработки промышленных технологий, так и для исследования тепловых процессов в окружающей среде.

Традиционно наиболее гибким и мощным средством решения линейных краевых задач в областях сложной геометрической формы считается метод граничных элементов, который предполагает решение рассматриваемой задачи только на границе области решения, то есть, не требует дискретизации области решения и построения внутренней сетки. Однако метод граничных элементов требует решения больших систем линейных алгебраических уравнений с полностью заполненными матрицами, что означает очень высокие требования к памяти компьютера и его быстродействию, и это особенно сильно проявляется в задачах, решаемых в областях сложной геометрической формы. Поэтому желательна разработка таких алгоритмов метода граничных элементов, в которых размеры матрицы были бы минимальны.

Цель работы. Основываясь на вышесказанном, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: разработка эффективных алгоритмов метода граничных элементов для определения стационарных температурных полей в областях с включениями из иных материалов.

Современное состояние проблемы. Стационарные (квазистационарные) задачи теории теплопроводности [1 – 4] хорошо известны и относительно просты с математической точки зрения. В нелинейном случае эти задачи легко линеаризуются, поэтому далее будем рассматривать только линейные задачи.

Классический метод граничных элементов описан в монографиях [5; 6], в частности, там подробно описано решение линейных эллиптических задач и сопряженных задач. Наличие указанных обзорных монографий избавляет от необходимости приводить здесь подробный обзор литературы по граничным элементам.

Постановка задачи. Пусть в однородной изотропной области D, ограниченной снаружи кусочно-гладкой границей Γ, а изнутри – кусочно-гладкими замкнутыми границами Γ_i, определено стационарное температурное поле T, а в областях D_i с границами Γ_i стационарные температурные поля T_i. Тогда сформулируем задачу следующим образом:

$$\Delta T = 0, \tag{1}$$

$$\Delta T_i = 0, \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$T\big|_{\Gamma^I} = T_a, \tag{3}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma^{II}} = q_a, \tag{4}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma^{III}} = \alpha\left(T\big|_{\Gamma^{III}} - T_a\right), \tag{5}$$

где $\Gamma^I U\ \Gamma^{II} U\ \Gamma^{III} = \Gamma$; Δ – оператор Лапласа; λ – теплопроводность; α – коэффициент теплоотдачи; T_a, q_a – заданные величины. На границах Γ_i поставим условия сопряжения (условия четвертого рода):

$$T\big|_{\Gamma_i} = T_i\big|_{\Gamma_i}, \tag{6}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i}, \tag{7}$$

где i изменяется от 1 до N – числа включений.

Метод решения. Следуя общему алгоритму метода граничных элементов, перейдем от уравнений (1) и (2) к их граничноинтегральным аналогам:

$$\begin{aligned} C(X_0)T(X_0) = &\int_\Gamma \varphi_0(X, X_0)\frac{\partial T(X)}{\partial n} dS(X) - \\ &- \int_\Gamma T(X)\frac{\partial \varphi_0(X, X_0)}{\partial n} dS(X) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_i} \varphi_0(X, X_0)\frac{\partial T(X)}{\partial n} dS(X) - \right. \\ &\left. - \int_{\Gamma_i} T(X)\frac{\partial \varphi_0(X, X_0)}{\partial n} dS(X)\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} C_i(X_0)T_i(X_0) = &\int_{\Gamma_i} \varphi_0(X, X_0)\frac{\partial T_i(X)}{\partial n} dS(X) - \\ &- \int_{\Gamma_i} T_i(X)\frac{\partial \varphi_0(X, X_0)}{\partial n} dS(X), \end{aligned} \tag{9}$$

где X – точка источника; X_0 – точка наблюдения,

$$C(X_0) = \begin{cases} 1, & X_0 \in D, \\ \frac{1}{2}, & X_0 \in \Gamma, \\ 0, & X_0 \notin D, X_0 \notin \Gamma, \end{cases} \tag{10}$$

C_i определяется аналогично для областей D_i с границами Γ_i; если на границах есть угловые точки, то значение C в этой точке отличается от $1/2$ [5; 6], φ_0 –

фундаментальное решение уравнения Лапласа, определенное в плоском случае как:

$$\varphi_0(x,x_0,y,y_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,, \qquad (11)$$

и в пространственном случае

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\,, \qquad (12)$$

(x,y) и (x,y,z) – координаты точки источника; (x_0,y_0) и (x_0,y_0,z_0) – координаты точки наблюдения.

Полученная система граничных интегральных уравнений (8), (9) с граничными условиями (3) – (7) может быть решена методом граничных элементов [5; 6], однако такая процедура будет излишне громоздкой, учитывая необходимость численной реализации условий сопряжения (6), (7). Поэтому применим здесь следующий специальный прием: вычтем из уравнения (8) уравнение (9), в результате получим

$$\begin{aligned} C(X_0)T(X_0)-\sum_{i=1}^{N}C_i(X_0)T_i(X_0) &= \\ =\int_{\Gamma}\varphi_0(X,X_0)\frac{\partial T(X)}{\partial n}dS(X) &- \\ -\int_{\Gamma}T(X)\frac{\partial\varphi(X,X_0)}{\partial n}dS(X) &+ \\ +\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_i}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\frac{\partial T(X)}{\partial n}\varphi_0(X,X_0)dS(X)&, \end{aligned} \qquad (13)$$

где значение левой части уравнения (13) равно: $1/2\,T(X_0)$ при $X_0\in\Gamma$; $T(X_0)$ при $X_0\in D$; 0 при $X_0\in\Gamma_i$; $-T_i(X_0)$ при $X_0\in D_i$. Основное достоинство граничного интегрального уравнения (13) заключается в том, что на границах Γ_1 вместо четырех неизвестных T, $\frac{\partial T}{\partial n}$, T_i, $\frac{\partial T_i}{\partial n}$, связанных уравнениями (8), (9) и граничными условиями (6), (7), остается одна неизвестная функция $\frac{\partial T}{\partial n}$, что, конечно, упрощает задачу. Следует отметить, что система (3) – (9) является более общей и гибкой в использовании, чем полученная система (3) – (5), (13), но экономичность последней заставляет прибегать к ее использованию.

Асимптотический анализ предельных случаев. Рассмотрим некоторые предельные случаи, требующие специального внимания. Пусть $\lambda_i\to 0$, тогда $\frac{\lambda_i}{\lambda}=\varepsilon$ является малым параметром. Применим метод малого параметра, согласно которому решение будем отыскивать в виде

$$T = T^0+\varepsilon T^1+\varepsilon^2T^2+\ldots\,. \qquad (14)$$

Тогда нулевое приближение T^0 удовлетворяет задаче (3) – (5), (8) с дополнительным условием

$$\left.\frac{\partial T^0}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 0\,. \qquad (15)$$

После решения этой задачи по найденной температуре $\left.T_i^0\right|_{\Gamma_i}$, легко определить $\left.\frac{\partial T_i^0}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}$, решая задачу (6), (9). Полученное значение $\left.\frac{\partial T_i^0}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}$ подставим в (7)

$$\frac{\partial T^1}{\partial n} = \frac{\partial T_i^0}{\partial n}\,, \qquad (16)$$

и вновь решим задачу вида (3) – (5), (8), (16). И так далее. При достаточно малых ε метод сходится за 2 – 3 итерации.

Следующий случай: $\lambda_i \to \lambda$. Тогда в качестве малого параметра можно использовать $\varepsilon = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_i}$. Решение вновь отыскиваем в виде (14), с той лишь разницей, что в данном случае ε прямо входит в уравнение (13), и соответствующий итерационный процесс можно строить на основе этого уравнения.

Наконец, при $\lambda_i >> \lambda$ малый параметр $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{\lambda_i}$ также входит в уравнение (13), и структура итерационного процесса подобна предыдущему случаю.

Поскольку на всех шагах итерации, начиная с первого, неоднородности в правых частях граничных условий (3) – (5) обнуляются (они существенны только в нулевом приближении), итерационные процессы сходятся достаточно быстро.

Помимо рассмотренной выше физической асимптотики, возможны и геометрические придельные случаи, то есть, случаи тонких включений. Если включение асимптотически тонкое, то краевые задачи для уравнения (2) вырождаются и должны быть заменены дополнительным соотношениями между скачком температуры и разрывом тепловых потоков на включении, а соответствующие интегралы по границе Γ_i в (8) также вырождаются в интегралы по незамкнутой поверхности. В случае же неасимптотически тонкого включения приходится применить геометрические асимптотические разложения. Введем во включение локальную криволинейную систему координат (ξ_i) таким образом, чтобы направление ξ_1 совпадало с нормалью к срединной поверхности включения. Как и ранее, полагаем включение гладким, то есть, коэффициенты Ляме ограниченны. Тогда температура включения удовлетворяет уравнению (в пространственном случае)

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}T\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2}T\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial \xi_3}T\right)=0, \tag{17}$$

где H_i – соответствующие коэффициенты Ляме. Тонкое включение имеет существенно различные геометрические масштабы в направлении нормали и касательной. Обозначив их через L_1 и L_2, соответственно, проведем следующее обезразмеривание:

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{L_1};\ \xi_2^* = \frac{\xi_2}{L_2};\ \xi_3^* = \frac{\xi_3}{L_3}. \tag{18}$$

Поскольку $L_1 >> L_2$, параметр $\xi = \dfrac{L_1}{L_2}$ будет малым, тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}\left(\frac{H_2^* H_3^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}T\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2^*}\left(\frac{H_1^* H_3^*}{H_2^*}\frac{\partial}{\partial \xi_2^*}T\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3^*}\left(\frac{H_1^* H_2^*}{H_3^*}\frac{\partial}{\partial \xi_3^*}T\right)\right)=0. \tag{19}$$

Согласно методу малого параметра решение будем искать в виде

$$T = T^0 + \varepsilon^2 T^1 + \varepsilon^4 T^2 + \dots, \tag{20}$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}\left(\frac{H_2^* H_3^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}T^0\right)=0, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}\left(\frac{H_1^* H_1^*}{H_1^*}\frac{\partial}{\partial \xi_1^*}T^1\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial \xi_2^*}\left(\frac{H_1^* H_3^*}{H_2^*}\frac{\partial}{\partial \xi_2^*}T^0\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_3^*}\left(\frac{H_1^* H_2^*}{H_3^*}\frac{\partial}{\partial \xi_3^*}T^0\right)\end{aligned} \tag{22}$$

и так далее. Уравнения (21), (22) и последующие являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, интегралы которых легко получаются в аналитическом виде. Определив интегралы рассматриваемых уравнений, легко можно получить связь тепловых потоков с температурами, то есть, свести случай неасимптотически тонкого включения к случаю, аналогичному асимптотически тонкому включению.

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований. Таким образом, в настоящей работе предложен основанный на методах теории потенциала подход к расчету стационарных температурных полей в телах с включениями. Данный подход малочувствителен к форме области решения, к количеству, размерам и взаимному расположению включений, что является одним из основных его преимуществ. Проведенный асимптотический анализ предельных случаев позволяет охватить предложенным подходом практически весь спектр возможных значений физических параметров.

Дальнейшие перспективы развития и использования полученных результатов совершенно очевидны – это их численная реализация и применение в прикладных теплофизических расчетах.

Библиографические ссылки

1. **Беляев Н. М.** Методы теории теплопроводности: учебник / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М., 1982. – Т. 1. – 327 с., Т. 2. – 304 с.

2. **Саломатов В. В.** Методы нелинейных процессов переноса тепла / В. В. Саломатов. Ч.1. – Томск, 1976. – 245 с., Ч.2. – Томск, 1978. – 181 с.

3. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М., 1967. – 600 с.

4. **Карслоу Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 487 с.

5. **Бенерджи П.** Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.

6. **Бреббия К.** Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.

Надійшла до редакції 28.02.2012.

УДК 532.516

В. И. Елисеев

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

МАССООБМЕН В ПАССИВИРУЮЩЕЙ ПРИЭЛЕКТРОДНОЙ ПОРИСТОЙ ПЛЕНКЕ

У рамках теорії іонообміну розглянуто задачу про осадження нейтральної компоненти (солі) на поверхні електроду при розряді акумулятора з утворенням твердої пористої плівки. Проведені розрахунки показали, що концентрації компонент у пористій плівці слабко змінюються по її ширині. При досягненні малих порізностей починають зростати градієнти як концентрацій, так і електричного потенціалу.

Ключові слова: іонообмін, осадження на поверхні електроду, тверда пориста плівка.

В рамках теории ионообмена рассмотрена задача об осаждении нейтральной компоненты (соли) на поверхности электрода при разряде аккумулятора с образованием твердой пористой пленки. Проведенные расчеты показали, что концентрации компонент в пористой пленке слабо изменяются по ее ширине. При достиже-