

П. Ю. Кныш, В. В. Лобода

Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИРОВАННОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

Пропонується точний аналітичний підхід до дослідження плоскої деформації п'єзоматеріалу з включенням у вигляді електродованої тріщини. Застосовано чисельний аналіз, заснований на методі скінчених елементів. Проведено порівняння аналітичних та чисельних результатів. Отримано їх добрий збіг, що підтверджує адекватність запропонованих підходів і можливість їх використання при розв'язанні інших задач.

Ключові слова: п'єзоматеріали, включення, електродована тріщина.

Предлагается точный аналитический подход к исследованию плоской деформации пьезоматериала с включением в виде электродированной трещины. Применен численный анализ, основанный на методе конечных элементов. Проведено сравнение аналитических и численных результатов. Установлено их хорошее совпадение, что подтверждает адекватность предложенных подходов и возможность их использования при решении других задач.

Ключевые слова: пьезоматериалы, включения, электродированная трещина.

Exact analytical approach for plain strain investigation of piezomaterial with electroded crack as an inclusion was proposed. Also numerical analysis based on finite element method was used. Analytical and numerical results were compared. Good coincidence was obtained, that confirms adequacy of considered approaches and possibility of its usage to solve other problems.

Key words: piezomaterials, inclusions, electroded crack.

Введение. Опыт показывает, что причиной выхода из строя пьезоустройств зачастую служат различные включения (трещины, электроды и другие концентраторы напряжений), что обуславливает активное использование методов механики разрушения для расчета таких устройств. При этом, большой класс задач для включений в областях достаточно простых конфигураций в пьезоэлектрических материалах хорошо изучен и используется, например, в [2; 7; 8; 9].

Тем не менее, существует ряд задач, которые изучены недостаточно. Трудности в их решении связаны со сложной конфигурацией рассматриваемой области, наличием нестандартных граничных условий и др. Такие задачи требуют разработки новых подходов и методов, поскольку не могут быть решены в рамках классических схем. В частности, к таким задачам относится рассмотренная в данной работе задача об электродированной трещине. Для ее решения разработан подход, который, может быть использован и при решении других задач выбранного класса.

Описание класса задач. На рис. 1 схематично представлен класс задач, решение которых может базироваться на подходе, изложенном ниже.

Рассматривается плоское деформирование бесконечного пространства, составленного в общем случае из двух пьезоматериалов, сцепленных по плоскости, называемой интерфейсом.

Деформирование пространства происходит в осях x_1, x_3 . Вдоль конечного отрезка интерфейса располагается включение. Заданы граничные электромеханические условия на включении, а также на бесконечности. Требуется определить электромеханические факторы вдоль интерфейса.

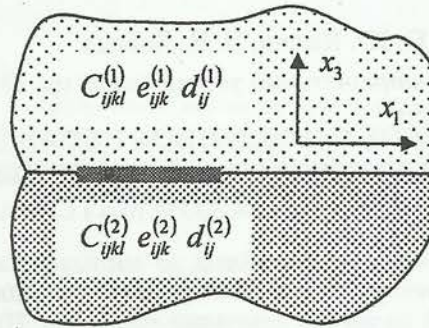


Рис. 1. Биматериальное пьезоэлектрическое пространство с включением на интерфейсе

Построение базисных соотношений. Запишем замкнутую систему линейной теории пьезоэлектричества в случае равновесия, при отсутствии массовых сил и свободных зарядов в прямоугольной декартовой системе координат x_i :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0, \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{ijkl} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{ijk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & e_{ijk} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & d_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь u_i , ε_{ij} , σ_{ij} – поля перемещений, деформаций и напряжений соответственно; φ , E_i , D_i – поля электрического потенциала, электрической напряженности и электрической индукции соответственно; C_{ijkl} , e_{ijk} , d_{ij} – ненулевые в общем случае (обозначены точками) элементы матриц упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств соответственно.

Подставляя выражения (2), (3) в уравнения равновесия (1), получаем систему уравнений относительно компонент вектора перемещений и электрического потенциала

$$\frac{\partial^2 (C_{ijkl} u_k + e_{lij} \varphi)}{\partial x_l \partial x_i} = 0. \quad (4)$$

Поскольку рассматривается плоская деформация области, то электро-механические поля не будут зависеть от координаты x_2 . Используем в этом случае следующее представление:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}f(z), \quad (5)$$

где $\mathbf{V} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi]^T$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T$ – вектор некоторых комплексных чисел, а f – некоторая комплекснозначная функция аргумента $z = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$

(причем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, а $\xi_3 = p$ – некоторый комплексный параметр). Далее, верхний индекс « T » – операция транспонирования.

Используя представление (5), можно переписать уравнения (4) в виде

$$(C_{ijkl}a_k + e_{ij}a_4)\xi_j\xi_i = 0. \quad (6)$$

Или с учетом введенных обозначений в следующей форме

$$[Q + p(R + R^T) + p^2T]a = 0. \quad (7)$$

Соотношения (7) – это однородная линейная система относительно компонент вектора a . В нее входят матрицы 4×4 (Q , R , T), которые формируются на основании матриц C_{ijkl} , e_{ijk} , d_{ij} . Система (7) будет иметь ненулевое решение только в случае вырожденности своей матрицы

$$\det[Q + p(R + R^T) + p^2T] = 0. \quad (8)$$

Уравнение 8-го порядка (8) обладает тем свойством, что все его корни комплексно-сопряженные. Обозначим через p_i те из них, мнимая часть которых положительна. Каждому p_i соответствует решение системы (7) – вектор a_i . Тогда на основании (5) имеет место равенство

$$V = Af(z) + \overline{A}f(\bar{z}), \quad (9)$$

где A – матрица 4×4 , составленная из столбцов векторов a_i ; $-A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$, $f(z) = [f_1(z_1) \ f_2(z_2) \ f_3(z_3) \ f_4(z_4)]^T$ – вектор из некоторых комплекснозначных функций аргументов $z_i = x_1 + p_i x_3$. В (9) и далее верхняя черточка означает комплексное сопряжение.

Уравнения (2), (3) с использованием (9) дают:

$$t = Bf'(z) + \overline{B}f'(\bar{z}), \quad (10)$$

где $t = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ D_3]^T$, а $f'(z) = \left[\frac{\partial f_1(z_1)}{\partial z_1} \ \frac{\partial f_2(z_2)}{\partial z_2} \ \frac{\partial f_3(z_3)}{\partial z_3} \ \frac{\partial f_4(z_4)}{\partial z_4} \right]^T$.

На основании уравнений (9), (10) построим следующие представления:

$$L = Mf'(z) + \overline{M}f'(\bar{z}), \quad (11)$$

$$K = Nf'(z) + \overline{N}f'(\bar{z}), \quad (12)$$

где $K = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33} \ E_1]^T$, $L = \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \ D_3 \right]^T$, а матрицы M , N имеют вид

$$M = [a_{1j} \ a_{2j} \ a_{3j} \ b_{4j}]_{j=1,2,3,4}^T, \quad N = [b_{1j} \ b_{2j} \ b_{3j} \ a_{4j}]_{j=1,2,3,4}^T.$$

Предположим теперь, что рассматриваемая область состоит из двух полуплоскостей $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$. Тогда для каждой полуплоскости имеем:

$$L^{(m)} = M^{(m)}f^{(m)}(z) + \overline{M}^{(m)}\overline{f}^{(m)}(\bar{z}), \quad (11')$$

$$K^{(m)} = N^{(m)}f^{(m)}(z) + \overline{N}^{(m)}\overline{f}^{(m)}(\bar{z}), \quad (12')$$

где верхний индекс m принимает значения 1 и 2 для верхней и нижней полуплоскостей соответственно.

Полагая, что $K^{(1)}(x_1, 0) = K^{(2)}(x_1, 0)$ на всем интерфейсе, что характерно для рассматриваемого класса задач, и, учитывая, что на интерфейсе $z = x_1$, на основании (12') имеем

$$N^{(1)}f^{(1)}(x_1) - \bar{N}^{(2)}\bar{f}^{(2)}(x_1) = N^{(2)}f^{(2)}(x_1) - \bar{N}^{(1)}\bar{f}^{(1)}(x_1). \quad (13)$$

Можно считать, что левая часть (13) есть граничное значение некоторой аналитической в верхней полуплоскости вектор-функции. Также в правой части – граничное значение некоторой другой аналитической в нижней полуплоскости вектор-функции. Поэтому из (13) следует, что существует вектор-функция $C(z)$, которая продолжает обе указанные вектор-функции на всю плоскость. Не уменьшая общности, будем полагать, что граничные условия на бесконечности ограничены. Это означает ограниченность $C(z)$ на бесконечности. Т. е. $C(z)$ является аналитической во всей плоскости и во всей же плоскости ограниченной. Значит, согласно теореме Лиувилля, она является постоянной и равной некоторой постоянной вектор-функции C . Тогда:

$$N^{(1)}f^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)}\bar{f}^{(2)}(z) = C, \quad x_3 > 0, \quad (14)$$

$$N^{(2)}f^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)}\bar{f}^{(1)}(z) = C, \quad x_3 < 0. \quad (15)$$

Ввиду произвольности вектор-функции f' , положим $C = 0$. Тогда на основании (14), (15) будем иметь

$$\bar{f}^{(2)}(z) = (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}f^{(1)}(z), \quad x_3 > 0, \quad (16)$$

$$\bar{f}^{(1)}(z) = (\bar{N}^{(1)})^{-1} N^{(2)}f^{(2)}(z), \quad x_3 < 0. \quad (17)$$

Введем обозначение $[[L(x_1)]] = \mu^+(x_1) - \mu^-(x_1)$ – скачок некоторой функции на интерфейсе, где $\mu^\pm(x_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} [\mu(x_1 \pm i\varepsilon)]$. Тогда, с учетом (16), (17), имеем

$$[[L(x_1)]] = Df^{(1)}(x_1) + \bar{D}\bar{f}^{(1)}(x_1), \quad K^{(1)}(x_1) = N^{(1)}f^{(1)}(x_1) + \bar{N}^{(1)}\bar{f}^{(1)}(x_1), \quad (18)$$

где

$$D = M^{(1)} - \bar{M}^{(2)} (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)}. \quad (19)$$

Вводя вектор-функцию

$$W(z) = \begin{cases} Df^{(1)}(z), & x_3 > 0 \\ -\bar{D}\bar{f}^{(1)}(z), & x_3 < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

получаем

$$[[L(x_1)]] = W^+(x_1) - W^-(x_1), \quad (21)$$

$$K^{(1)}(x_1) = SW^+(x_1) - \bar{S}W^-(x_1), \quad (22)$$

где $S = N^{(1)}D^{-1}$.

Выражения (21), (22) представляют собой основные соотношения, которые будут использованы при реализации данного подхода. На их основании могут быть решены конкретные задачи из описанного выше класса. Ниже применим их к рассмотрению задачи об электродированной трещине.

Постановка задачі об електродированній тріщині. Розглянемо плоске стання п'єзоелектричного простору в осях x_1x_3 . Напрявлення поляризації – додатне напрямлення осі x_3 . Вдоль інтерфейса розміщено включення, представляюче собою тріщину, на берегах якої розміщені тонкі (без спротивлення деформаціям) накладкі з другого матеріалу (рис. 2). В стані електропровідного матеріалу вони представляють собою електроди, в протилежному стані – тонкі шари діелектрика, в яких може підтримуватися електричне поле.

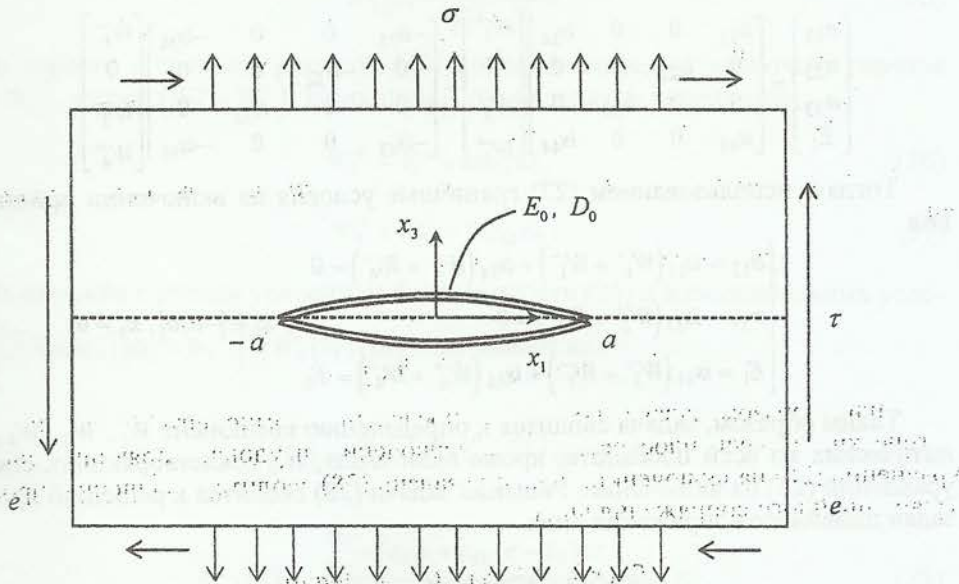


Рис. 2. Постановка задачі об електродированній тріщині

Накладки свободні від механічних навантажень і на кожній з них задано значення електричної напруженості $E_1^{\pm} = E_0$. На включенні задано значення повного електричного заряду D_0 . Якщо накладка представляє собою електрод, то $E_0 = 0$. Оскільки стані провідних накладок більш важливий для практики, то в подальшому накладку будемо називати електродом, підразумеваючи, що на його місці може знаходитися діелектрик з ненульовим значенням E_0 . Таким образом, граничні умови на включенні мають вигляд:

$$\sigma_{33}^{\pm} = 0, \sigma_{13}^{\pm} = 0, E_1^{\pm} = E_0, q = D_0, (x_1 \in [-a, a]). \quad (23)$$

В загальному стані також задані ненульові електромеханічні умови на нескінченності:

$$\sigma_{13}^{\infty} = \tau, E_1^{\infty} = e, \sigma_{33}^{\infty} = \sigma. \quad (24)$$

Розшукуються поля σ_{13} , σ_{33} , E_1 на інтерфейсі, а також розкриття тріщини і скачок компоненти D_3 електричної індукції на включенні.

Рішення задачі об електродированній тріщині. Показано, що в стані матеріалів класу симетрії 6 mm, до яких відносяться промислові кераміки, з поляризацією вдоль осі x_3 , матриця S має структуру

$$S = \begin{bmatrix} is_{11} & 0 & 0 & is_{14} \\ 0 & is_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & is_{33} & 0 \\ is_{41} & 0 & 0 & is_{44} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

де s_{ij} – дійсні числа.

Введем также матрицу Q вида

$$Q = (S - \bar{S})^{-1} = \begin{bmatrix} iq_{11} & 0 & 0 & iq_{14} \\ 0 & iq_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq_{33} & 0 \\ iq_{41} & 0 & 0 & iq_{44} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

причем, q_{ij} – также действительны.

Перепишем соотношение (22) в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \\ E_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & 0 & 0 & is_{14} \\ 0 & is_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & is_{33} & 0 \\ is_{41} & 0 & 0 & is_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^+ \\ 0 \\ W_3^+ \\ W_4^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -is_{11} & 0 & 0 & -is_{14} \\ 0 & -is_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -is_{33} & 0 \\ -is_{41} & 0 & 0 & -is_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^- \\ 0 \\ W_3^- \\ W_4^- \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Тогда с использованием (27) граничные условия на включении принимают вид

$$\begin{cases} \sigma_{13} = is_{11}(W_1^+ + W_1^-) + is_{14}(W_4^+ + W_4^-) = 0 \\ \sigma_{33} = is_{33}(W_3^+ + W_3^-) = 0 \\ E_1 = is_{41}(W_1^+ + W_1^-) + is_{44}(W_4^+ + W_4^-) = E_0 \end{cases}, \quad x_1 \in [-a, a], \quad x_3 = 0. \quad (28)$$

Таким образом, задача сводится к определению компонент W_1, W_3, W_4 , аналитических во всей плоскости, кроме включения, и удовлетворяющих системе уравнений (28) на включении. Решение задачи (28) сводится к решению простых задач линейного сопряжения вида

$$F^+(x_1) + F^-(x_1) = C, \quad x_1 \in [-a, a], \quad (29)$$

где F – функция, аналитическая во всей плоскости x_1, x_3 за исключением отрезка $x_1 \in [-a, a], x_3 = 0$, а C – определенная комплексная константа.

На основании [3] решение задачи (29) имеет вид

$$F(z) = \frac{c_0 + c_1 z}{\sqrt{(z-a)(z+a)}} + \frac{C}{2}, \quad (30)$$

где c_0, c_1 – комплексные константы, подлежащие определению. Они определяются из условий на бесконечности, а также из конкретных физических свойств (условия однозначности перемещений, теорема Гаусса для электрической индукции). Эти свойства обычно записываются в виде

$$\int_{-a}^a [[F(x_1)]] dx_1 = g, \quad (31)$$

где g – некоторая вполне определенная константа. При этом показано [3], что условие (31) будет выполнено, если коэффициент при z^{-1} в разложении $F(z)$ на бесконечности равен g .

Запишем разложение $F(z)$ на бесконечности в виде

$$F(z) = c_1 + \frac{C}{2} + \frac{c_0}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (32)$$

Отсюда из (32) и условий на бесконечности, находим

$$c_0 = \frac{ig}{2\pi}, \quad c_1 = F^\infty - \frac{C}{2}, \quad (33)$$

причем F^∞ – значение функции $F(z)$ на бесконечности.

Вернемся к рассмотрению системы (28). Второе уравнение представляет собой отдельную задачу сопряжения, решение которой на основании описанного выше анализа и с учетом условия однозначности перемещений

$$\int_{-a}^a [[W_3(x_1)]] dx_1 = 0 \quad (34)$$

имеет вид

$$W_3(z) = \frac{iq_{33}z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sigma. \quad (35)$$

Из первого и третьего равенств (28) можно поочередно исключить сначала $(W_1^+ + W_1^-)$, потом $(W_4^+ + W_4^-)$. Приходим к таким задачам сопряжения:

$$W_1^+ + W_1^- = 2iq_{14}E_0, \quad (36)$$

$$W_4^+ + W_4^- = 2iq_{44}E_0. \quad (37)$$

Их решения с учетом условий на бесконечности (24) и дополнительных условий $\int_{-a}^a [[W_1(x_1)]] dx_1 = 0$, $\int_{-a}^a [[W_4(x_1)]] dx_1 = D_0$ имеют вид

$$W_1(z) = i \frac{q_{11}\tau + q_{14}(e - E_0)}{\sqrt{z^2 - a^2}} z + iq_{14}E_0, \quad (38)$$

$$W_4(z) = i \frac{\frac{D_0}{2\pi} + (q_{41}\tau + q_{44}(e - E_0))z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + iq_{44}E_0. \quad (39)$$

На основании найденных W_1 , W_3 , W_4 получим искомые поля электромеханических факторов вдоль интерфейса. Определим сначала взаимное перемещение берегов трещины вдоль x_3 (раскрытие трещины). Из (21) следует, что на включении $\left[\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \right] = W_3^+ - W_3^-$. Используя (35) и интегрируя по x_1 , в конечном итоге получаем

$$[[u_3]] = \frac{\sigma}{s_{33}} \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (40)$$

Выпишем σ_{13} , σ_{33} , E_1 на интерфейсе (вне включения):

$$\sigma_{13} = -\frac{s_{14} \frac{D_0}{\pi} - \tau x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad \sigma_{33} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \sigma, \quad E_1 = E_0 - \frac{s_{44} \frac{D_0}{\pi} + x_1(E_0 - e)}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}. \quad (41)$$

Величина скачка электрической индукции $[[D_3]]$ на включении имеет вид

$$[[D_3]] = \frac{D_0 + 2(q_{41}\tau + q_{44}(e - E_0))x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}. \quad (42)$$

Важное значение имеет не только величина суммарного заряда на включении, но и закон его распределения по берегам трещины. На основании (11') имеем

$$L^{(1)}(x_1, +0) = M^{(1)}F^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{M}^{(1)}\bar{F}^{(1)}(x_1 - i0), \quad (43)$$

$$\mathbf{L}^{(2)}(x_1, -0) = \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (44)$$

Из (20) следует:

$$\mathbf{f}^{(1)}(x_1 + i0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^+, \quad (45)$$

$$\bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1 - i0) = -\bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}^-. \quad (46)$$

Тогда на основании (16), (17), а также (45), (46) имеем:

$$\mathbf{f}^{(2)}(x_1 - i0) = -\left(\mathbf{N}^{(2)}\right)^{-1} \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}^-, \quad (47)$$

$$\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1 + i0) = \left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^+. \quad (48)$$

Наконец, перепишем (43), (44) с учетом (45–48)

$$\mathbf{L}^{(1)}(x_1, +0) = \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^+ - \bar{\mathbf{M}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}^-, \quad (49)$$

$$\mathbf{L}^{(2)}(x_1, -0) = \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)}\right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^+ - \mathbf{M}^{(2)} \left(\mathbf{N}^{(2)}\right)^{-1} \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{W}^-. \quad (50)$$

Таким образом, мы определили граничные значения векторов $\mathbf{L}^{(1)}$, $\mathbf{L}^{(2)}$ на интерфейсе, а значит и на включении. Четвертая компонента вектора \mathbf{L} – компонента D_3 электрической индукции. Поэтому, зная $\mathbf{L}^{(1)}(x_1, +0)$, $\mathbf{L}^{(2)}(x_1, -0)$ на включении, мы знаем и D_3^+ , D_3^- на нем. Обозначим через ρ^+ , ρ^- плотности распределения заряда по верхнему и нижнему берегам трещины соответственно. В электростатике доказан факт, что на поверхности проводника вектор электрической индукции направлен по нормали к поверхности, а его величина равна плотности заряда в данной точке поверхности. Поэтому:

$$\rho^+(x_1) = D_3^+(x_1), \quad |x_1| < a, \quad (51)$$

$$\rho^-(x_1) = -D_3^-(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (52)$$

Таким образом, нахождение распределений ρ^+ , ρ^- на включении сводится к использованию формул (49), (50).

Численный анализ. Полученные выше решения сравним с численными результатами. В случае хорошего согласования результатов появится уверенность и в правильности применяемого аналитического подхода, и в корректности реализации численного алгоритма.

Для численного анализа воспользуемся методом конечных элементов (МКЭ), основы которого изложены в [4; 5].

Что касается расчетной области, то мы можем использовать лишь области конечных размеров. Наша область должна быть достаточно большой по сравнению с размером включения (эмуляция бесконечности), но в то же время не превосходить разумный предел, иначе будет снижена эффективность вычислений (большое количество узлов приведет к громоздкости вычислительной задачи).

Выбрана квадратная область со стороной 1 м (длина включения при этом – 0.02 м). Ниже на рис. 3 приведен вид разбивки, используемой для численного решения.

Как показывает опыт решения подобных задач, в районе включения, а особенно в районе его концов имеет место значительная концентрация механических и электрических факторов. На удалении же от этих областей указанные факторы

ведуть себя плавно. Именно поэтому (см. рис. 3) разбивка имеет сгущения в двух направлениях: от краев области к включению и от окрестности включения к его концам. Такая разбивка эффективна с точки зрения вычислений.

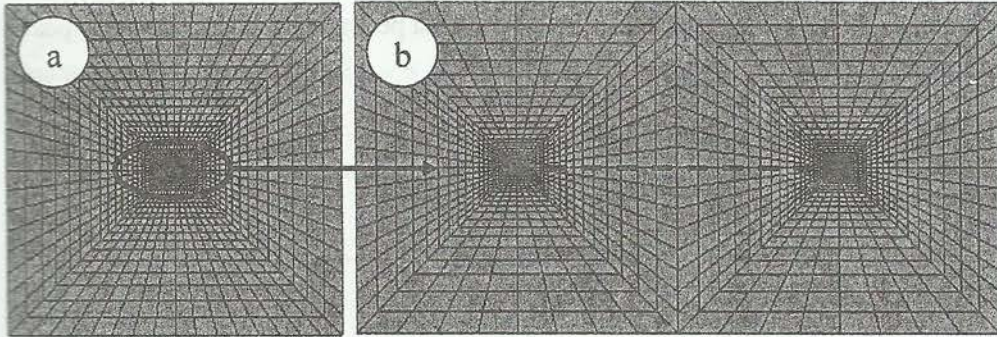


Рис. 3. Вид разбивки области (а) и окрестности включения (б), соответственно, в недеформированном состоянии

Стоит отметить, что все немеханические условия на включении полностью определяются плотностями распределенных зарядов ρ^+ , ρ^- . Что касается последних, то на основании формул (49 – 52) имеем

$$\rho^+(x_1) = \rho^-(x_1) = \frac{D_0}{2\pi} + \frac{(q_{41}\tau + q_{44}(e - E_0))x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}, \quad |x_1| < a. \quad (53)$$

Как видим, на распределения в (53) также влияют условия на бесконечности.

Условие $E_1^\infty = e$ реализуем следующим образом. Так как $E_1^\infty = -\frac{\partial\varphi^\infty}{\partial x_1}$, то $\varphi^\infty = -ex_1 + C(x_3)$, где $C(x_3)$ — произвольная функция. Положив для удобства $C(x_3) = 0$, распределим потенциал на границе области по закону $\varphi = -ex_1$.

В качестве материала выберем PZT-4. Ниже последовательно указаны матрицы материала PZT-4 (упругих, пьезоэлектрических, диэлектрических свойств соответственно) в случае, когда положительное направление x_3 — ось поляризации:

$$\begin{bmatrix} 139 & 77.8 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 77.8 & 139 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 74.3 & 74.3 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.6 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ Па}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.2 \\ 0 & 0 & -5.2 \\ 0 & 0 & 15.1 \\ 0 & 12.7 & 0 \\ 12.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

$$\begin{bmatrix} 6.46 & 0 & 0 \\ 0 & 6.46 & 0 \\ 0 & 0 & 5.62 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Из (45) следует, что в общем случае σ_{13} , E_1 и $[[D_3]]$ имеют особенности на концах включения. Однако, легко видеть, что при $\tau = \pm \frac{s_{14}D_0}{\pi a}$, $e = \pm \frac{s_{44}D_0}{\pi a}$ особенность в точке $x_1 = \pm a$ исчезает, сохраняясь при этом в точке $x_1 = \mp a$.

Рассмотрим конкретный вид внешнего воздействия, который приводит к устранению особенности σ_{13} , E_1 и $[[D_3]]$ в точке a . Выберем следующие зна-

чения внешних факторов: $D_0 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ Кл}$, $\tau = 4.71 \times 10^6 \text{ Па}$, $e = 5.232 \times 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$,
 $\sigma = 5 \times 10^6 \text{ Па}$, $E_0 = 0$. Соответствующие результаты расчетов показаны на рисунках
 4 – 9 кривыми 1, которые соответствуют аналитическому решению, и 4 – численному.
 Кроме того, на этих рисунках кривыми 2 показаны результаты аналитического реше-
 ния для $D_0 = 0$, $\tau = 4.71 \times 10^6 \text{ Па}$, $e = 5.232 \times 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, $\sigma = 2.5 \times 10^6 \text{ Па}$, $E_0 = 0$, а кривыми
 3 – для $D_0 = 1.57 \times 10^{-4} \text{ Кл}$, $\tau = 4.71 \times 10^6 \text{ Па}$, $e = 5.232 \times 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, $\sigma = 1.25 \times 10^6 \text{ Па}$. В
 последних двух случаях σ_{13} , E_1 и $[[D_3]]$ сингулярны в окрестности обеих вер-
 шин трещины.

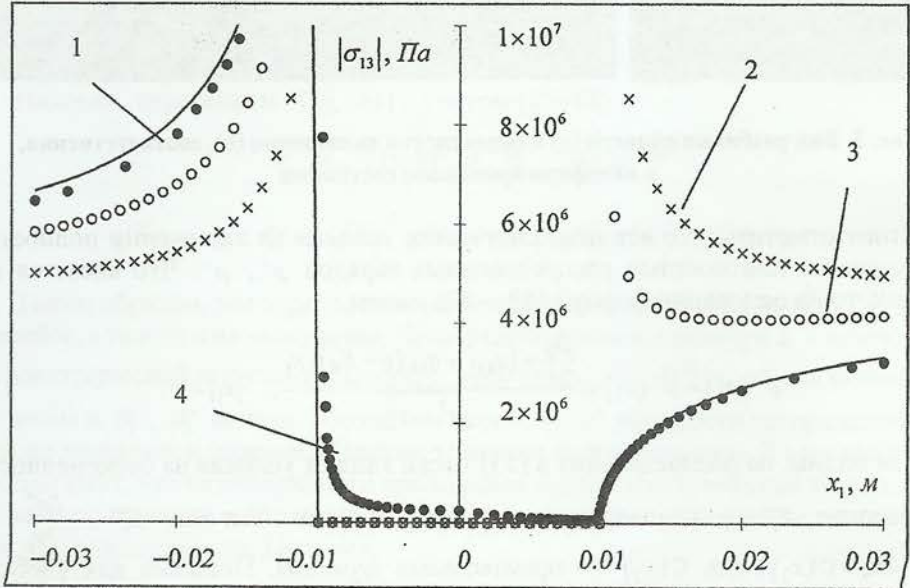


Рис. 4. Распределение $|\sigma_{13}|$ по участку $x_1 \in [-3a, 3a]$ интерфейса

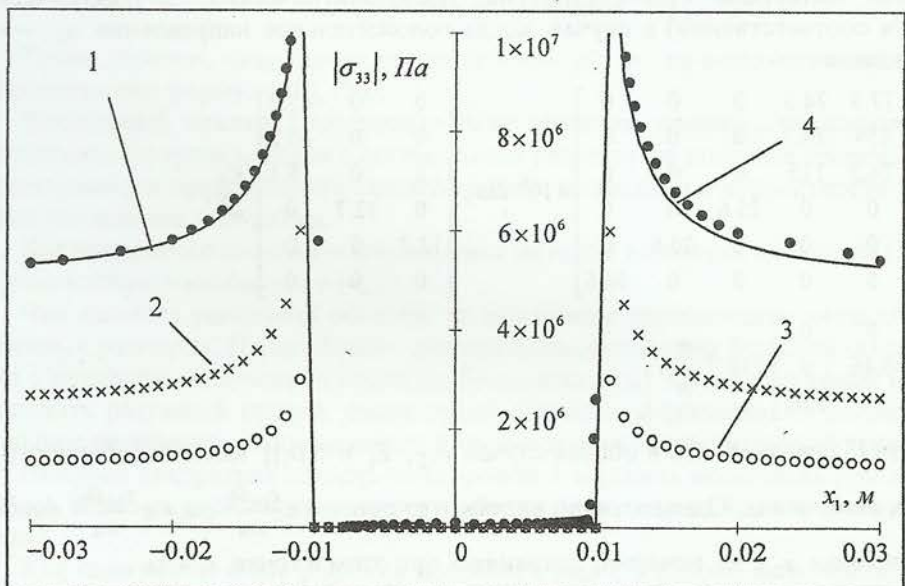


Рис. 5. Распределение $|\sigma_{33}|$ по участку $x_1 \in [-3a, 3a]$ интерфейса

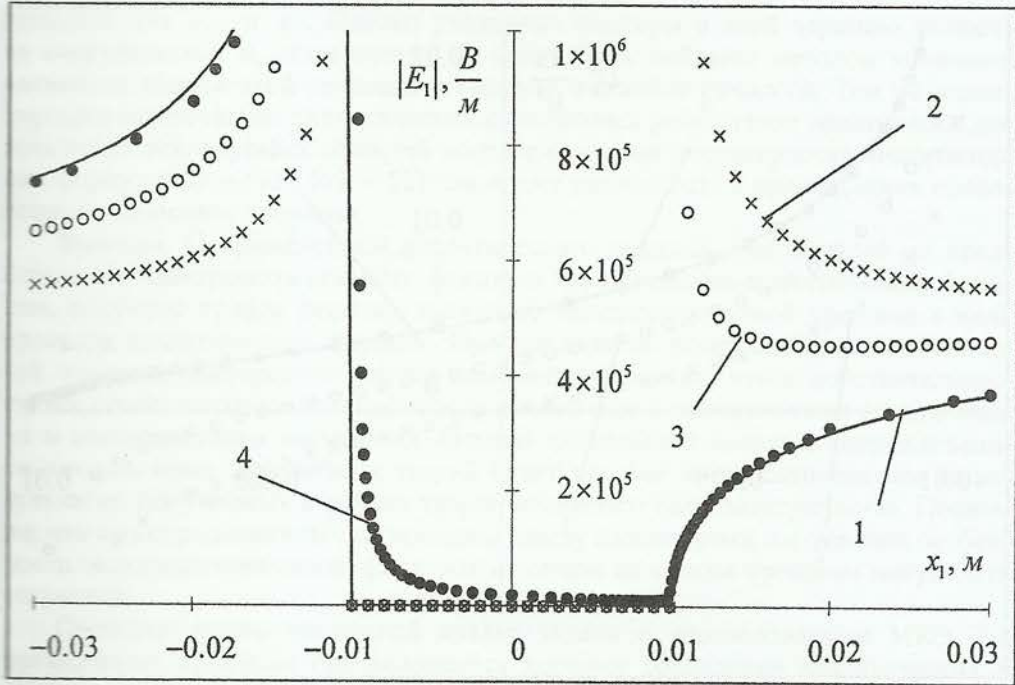


Рис. 6. Распределение $|E_1|$ по участку $x_1 \in [-3a, 3a]$ интерфейса

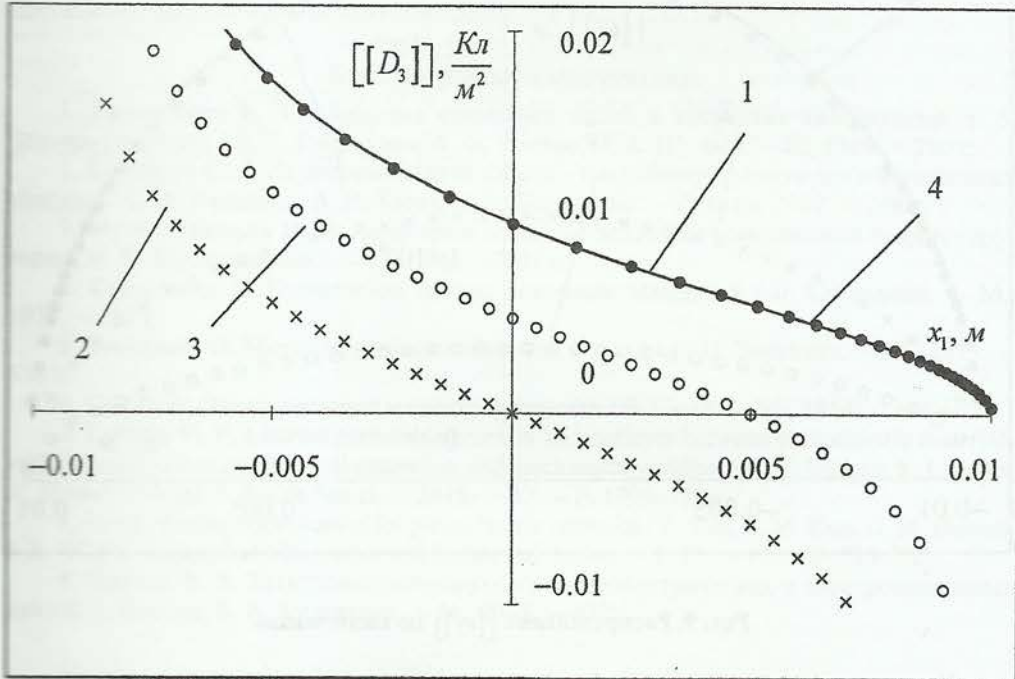


Рис. 7. Распределение $[D_3]$ по включению

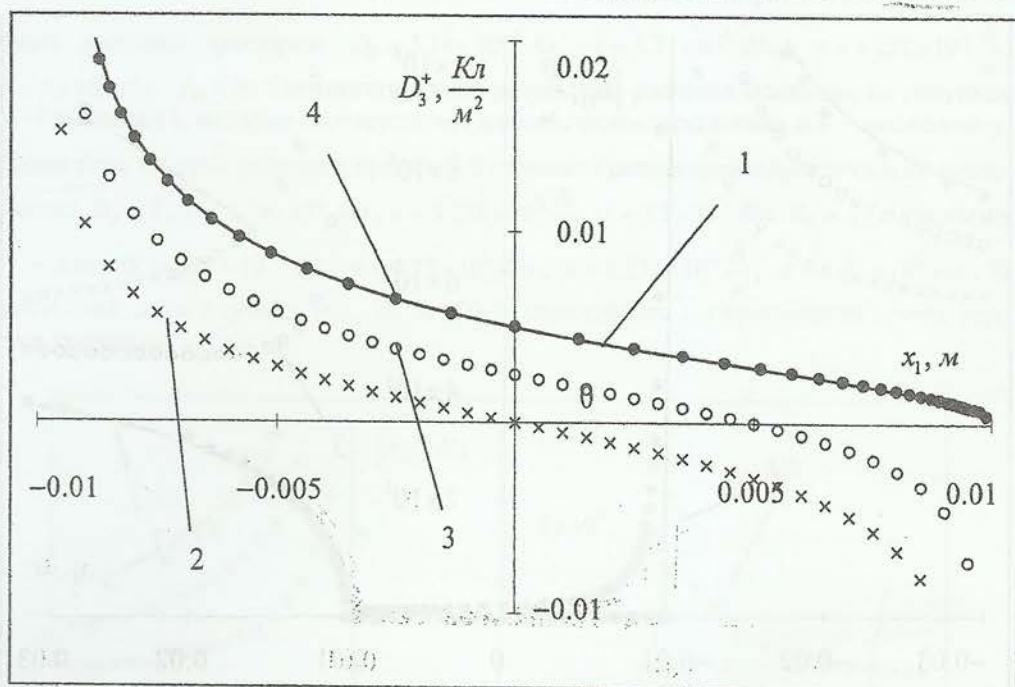


Рис. 8. Распределение D_3^+ по включению

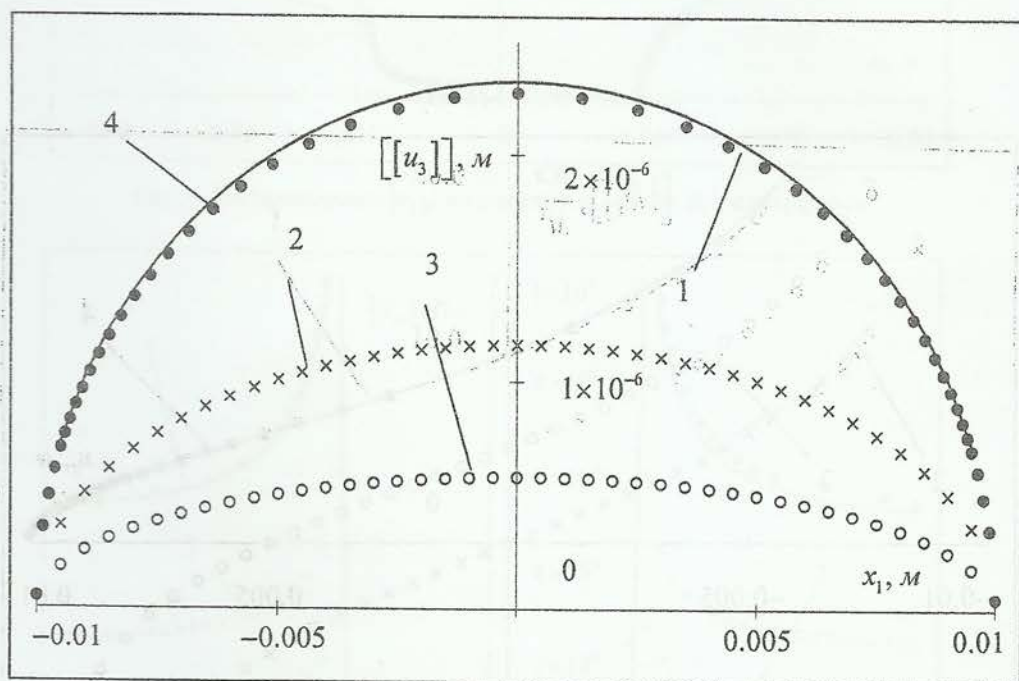


Рис. 9. Распределение $[u_3]$ по включению

Из анализа полученных графиков следует хорошее совпадение результатов аналитического решения с соответствующими данными конечно-элементного анализа. Некоторое различие наблюдается только в окрестности левой вершины

трещины для σ_{13} и E_1 . Однако указанные факторы в этой вершине являются сингулярными и, естественно, не могут быть найдены методом конечных элементов вблизи этой вершины с высокой степенью точности. Тем не менее, хорошее согласование аналитических и численных результатов практически для всех точек исследуемых областей подтверждает как достоверность аналитических формул (40) – (42), (49 – 52), так и дает уверенность в правильности проведенного численного анализа.

Выводы. С применением аналитического подхода, основанного на представлении электромеханических факторов через кусочно-аналитические функции, получено точное решение задачи об электродированной трещине в виде простых аналитических формул. Прослеживается возникновение особенностей искоемых факторов на концах включения. Понятно, что в действительности эти особенности не реализуются, а вместо них возникают зоны пластичности и электрического насыщения. Однако дальнейший анализ с использованием тех или иных нелинейных теорий будет так или иначе базироваться на результатах, полученных в рамках теории линейного пьезоэлектричества. Показано, что при определенном соотношении между параметрами нагружения особенности электромеханических факторов на одном из концов трещины могут быть устранены.

Проведен также численный анализ задачи с использованием МКЭ. На приведенных графиках прослеживается хорошее совпадение аналитических и численных результатов. Заметны лишь незначительные расхождения вблизи особой точки – конца трещины. Результаты сравнения аналитического решения с соответствующими расчетами методом конечных элементов подтверждают адекватность обоих методов и говорят о том, что примененный аналитический подход может успешно использоваться в расчетах конструкционных элементов при условии, что размеры включения являются достаточно незначительными по сравнению с размерами рассматриваемой области. В противном случае, целесообразно применение МКЭ, который, как показал анализ, позволяет получить результаты с достаточно высокой степенью точности.

Библиографические ссылки

1. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций, т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К., 1989. – 280 с.
2. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк, 2007. – 268 с.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966. – 707 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М., 1979. – 392 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М., 1975. – 538 с.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика / В. Смайт – М., 1954. – 606 с.
7. Loboda V. V. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding / V. V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // Int. J. Solids Struct. – 2010. – 47. – P. 1795–1806.
8. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuó, D. M. Barnett, J. R. Willis // Journal of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – 40. – P. 739–765.
9. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М., 1988. – 472 с.

Надійшла до редколегії 01.12.2011.