

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара***АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ШИН НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ**

Розроблено алгоритм для чисельного розрахунку напруженого стану шин низького тиску. При складанні розрахункової схеми враховано, що деформації таких шин є великими. Тому їх розрахунок виконується у декілька етапів, на кожному з яких чисельно розв'язується крайова задача для системи диференційних рівнянь з частинними похідними десятого порядку. Розв'язок системи виконується методом кінцевих різниць. Враховуючи великий об'єм розрахунків, розроблено метод приведення матриці системи до тридіагонального виду. У випадках, коли система виявляється нестійкою, для її розв'язку застосовується метод розщеплення матриці системи, який дозволяє досягти суттєвої стабілізації.

Ключові слова: шини низького тиску, напружений стан, великі деформації, алгоритм розрахунку.

Разработан алгоритм для численного расчета напряженного состояния шин низкого давления. При составлении расчетной схемы учтено, что деформации подобных шин являются большими. Поэтому их расчет осуществляется в несколько этапов, на каждом из которых численно решается краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными десятого порядка. Решение системы производится методом конечных разностей. Учитывая большой объем вычислений, разработан метод приведения матрицы системы к трехдиагональному виду. В случаях, когда система оказывается неустойчивой, для ее решения применяется метод расщепления матрицы системы, позволяющий достичь существенной стабилизации.

Ключевые слова: шины низкого давления, напряженное состояние, большие деформации, алгоритм расчета.

The algorithm for numerical calculation of a stress state of tires of low pressure is developed. At construction of calculation scheme is taken into account that deformations of tires of low pressure are big. Therefore their calculation is carried out in some stages, on each of which the boundary problem for system of the partial differential equations of the tenth order numerically is solved. The solution of system is made by finite difference method. Taking into account great volume of calculations, the method of transformation of a matrix of system to a three-diagonal kind is developed also. In cases when the system appears unstable, for its solution the method of splitting of a matrix of the system is applied, allowing achieving essential stabilization.

Key words: tires of low pressure, state of stress, big deformations, algorithm of calculation.

Введение. В настоящее время достаточно широкое применение находят автомобильные и тракторные шины низкого давления. Основное преимущество их состоит в том, что они позволяют существенно снизить удельное давление на грунт, поэтому их использование при проведении сельскохозяйственных работ предпочтительно. Для того чтобы отмеченное преимущество шин низкого давления проявилось в полной мере, они должны быть достаточно эластичными. В то же время, они должны воспринимать довольно высокие технологические нагрузки, то есть быть достаточно прочными. Поэтому, расчеты на прочность такого рода шин имеют существенное значение.

Принципиально шины низкого давления, как и любые шины, по своей форме близки к тороидальным оболочкам, для которых расчеты на прочность разработаны в определенной мере. Однако методики таких расчетов опираются

на теорію малих деформацій. Деформації же шин низкого тиску достатньо великі, і тому спроби розрахуку таких шин з допомогою методів теорії малих деформацій приводять до появи значущих похибок.

Постановка задачі. В даній роботі для розрахуку на міцність шин низкого тиску використовується теорія великих деформацій, принципиальні основи якої викладені в [1]. Пріжде всього, введемо для тора тороїдальну систему координат. Для цього зведемо площину, що проходить через центральну вісь тора, з площиною xOy . Радіус центральної осі тора відносно його центра позначимо через R . Кут θ буде описувати обертання відносно осі z в напрямку проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку позитивної осі z , і буде відраховуватися від площини xOz , починаючи від позитивного напрямку осі x . Перетином середньої окружності тора площиною, що проходить через вісь z і утворює кут θ з площиною xOz , є окружність радіуса r з центром P , що належить центральній осі тора. Кут φ в цьому перетині відраховується від площини xOy проти годинникової стрілки, якщо дивитися в бік збільшення кута θ , починаючи від негативного напрямку координатної прямої, паралельної осі z і що проходить через точку P . Обидва кути змінюються в межах $(0, 2\pi)$. Величини r , θ і φ утворюють, очевидно, ортогональну криволинійну систему координат і пов'язані з декартовими координатами x , y , і z наступними рівняннями:

$$x = (R + r \sin\varphi) \cos\theta; \quad y = (R + r \sin\varphi) \sin\theta; \quad z = -r \cos\varphi. \quad (1)$$

Із рівнянь (1) випливає, що коефіцієнти Ляме в такій системі координат рівні:

$$H_r = 1; \quad H_\varphi = A = r; \quad H_\theta = B = R + r \sin\varphi, \quad (2)$$

а радіуси кривизни координатних ліній рівні:

$$R_\varphi = r; \quad R_\theta = (R + r \sin\varphi)(\sin\varphi)^{-1}. \quad (3)$$

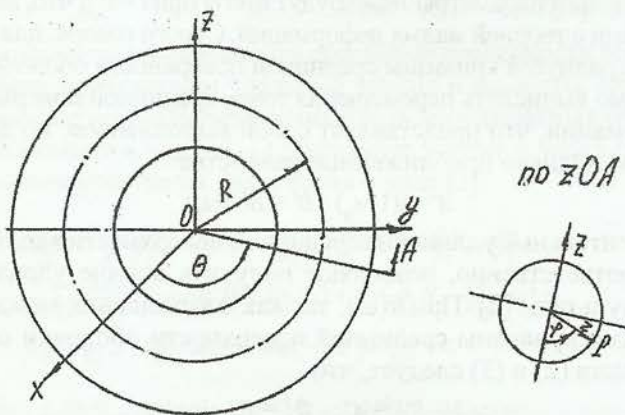


Рис. 1. Тороїдальна система координат

Основна ідея запропонованого методу полягає в тому, що розрахунок напружено-деформованого стану оболонки здійснюється ступінчато. Якщо потрібно вивчити поведінку оболонки на інтервалі часу $[t_0, T]$, то цей інтервал розбивається на кінцеве число N підінтервалів довжиною dt кожен. Оболонка в межах такого підінтервалу навантажується тільки N^{-1} частиною навантаження. Тому на кожному з підінтервалів переміщення і відносні деформації можна вважати малими і для їх обчислення користуватися теорією малих деформацій.

Пусть срединная поверхность оболочки при $t = t_0$ до есть в момент начала нагружения, занимает проектное положение, уравнение которого имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \theta), \quad (4)$$

а перемещение точек срединной поверхности определяется вектором

$$\mathbf{p}(\varphi, \theta) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_n, \quad (5)$$

где орты касательных к координатным линиям и орт нормали к срединной поверхности определяются соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}; \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2. \quad (6)$$

Тогда уравнение срединной поверхности оболочки после деформирования будет иметь вид

$$\mathbf{r}'(\varphi, \theta) = \mathbf{r}(\varphi, \theta) + \mathbf{p}(\varphi, \theta). \quad (7)$$

В соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява радиусы-векторы точек, расположенных на расстоянии ζ от срединной поверхности соответственно до и после деформирования определяются соотношениями:

$$\mathbf{r}(\zeta) = \mathbf{r}(\varphi, \theta) + \zeta \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{r}'(\zeta) = \mathbf{r}'(\varphi, \theta) + \zeta \mathbf{e}_n'. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи означают, что соответствующие величины рассматриваются после деформации.

Таким образом, при нагружении оболочка на первом интервале (t_0, t_1) , $(t_0 - t_1 = dt)$, будет деформирована. Параметры Ляме и радиусы кривизны ее срединной поверхности при $t = t_0$ и $t = t_1$, естественно, будут иметь различные значения. Основное предложение состоит в том, чтобы заменить непрерывные функции параметров Ляме и радиусов кривизны срединной поверхности оболочки кусочно-постоянными функциями. Это позволяет на каждом подинтервале длиной dt использовать обычные уравнения теории малых деформаций оболочки. Иными словами, на интервале $[t_{n-1}, t_n]$ радиусы кривизны и параметры Ляме будут взяты при $t = t_{n-1}$, что, впрочем, и требуется в соответствии с теорией малых деформаций. Строго говоря, для вычисления параметров Ляме и радиусов кривизны срединной поверхности оболочки после деформации необходимо вычислить перемещения точек срединной поверхности в результате этой деформации, что представляет собой выполнимую, но довольно трудоемкую операцию. Однако приближенные равенства:

$$A' = A(1 + \varepsilon_\varphi); \quad B' = B(1 + \varepsilon_\theta), \quad (9)$$

где ε_φ и ε_θ – относительные удлинения срединной поверхности вдоль координатных линий φ и θ соответственно, позволяют получить вполне удовлетворительные по точности результаты [2]. При этом, так как соотношения между параметрами Ляме и радиусами кривизны срединной поверхности оболочки сохраняются, из сравнения равенств (2) и (3) следует, что

$$R_\varphi' = A'; \quad R_\theta' = B'(\sin\varphi)^{-1}. \quad (10)$$

Следовательно, структура оболочки представляется переменной. Деформирование оболочки на каждом подинтервале начинается с формы, которой оболочка достигла в результате деформирования ее на предыдущем этапе. На каждом подинтервале вычисляются напряжения и деформации оболочки с помощью уравнений теории малых деформаций. Эти вычисленные напряжения и деформации являются лишь приращениями $\Delta\sigma(\varphi, \theta, t)$ и $\Delta\varepsilon(\varphi, \theta, t)$ полных напряжений $\sigma(\varphi, \theta, t)$ и деформаций $\varepsilon(\varphi, \theta, t)$. С помощью приращений относительных деформаций по формулам (9) и (10) вычисляются новые значения параметров Ляме и радиусов кривизны срединной поверхности оболочки, и при этих значениях указанных величин вычисляются приращения напряжений и деформаций оболоч-

ки на наступному етапі. Слід підкреслити, що при вичисленнях по формулам (9) і (10) параметри без штриха відповідають їх значенням на попередньому етапі, а со штрихом – на наступному етапі. Таким образом, повні відносительні деформації і напруження в оболочці можуть бути визначені відповідно по формулам:

$$\varepsilon(\varphi, \theta, t) = \varepsilon(\varphi, \theta, t_0) + \sum_{n=1}^N \Delta \varepsilon(\varphi, \theta, t_n); \quad \sigma(\varphi, \theta, t) = \sigma(\varphi, \theta, t_0) + \sum_{n=1}^N \Delta \sigma(\varphi, \theta, t_n). \quad (11)$$

Уравнения состояния оболочки. При расчете напряженно-деформированного состояния оболочки на каждом из подинтервалов dt наиболее целесообразно использовать уравнения неразрывности срединной поверхности оболочки вместе с уравнениями динамического равновесия. Уравнения неразрывности срединной поверхности в общем случае имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B \chi_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 \chi_{12}}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} \chi_\xi - \frac{1}{R_\xi} \left(\frac{\partial B \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{2A} \frac{\partial A^2 \varepsilon_\eta}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} \varepsilon_\xi \right) + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left(\frac{\partial A \varepsilon_\xi}{\partial \eta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2B} \frac{\partial B^2 \varepsilon_\eta}{\partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \varepsilon_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{A}{R_\xi} \frac{\varepsilon_\eta}{2} + \frac{A}{R_{\xi\eta}} \varepsilon_\xi \right) + \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R_\eta} \frac{\varepsilon_\eta}{2} + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \varepsilon_\eta \right) = 0; \\ & \frac{\partial A \chi_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 \chi_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \chi_\eta - \frac{1}{R_\eta} \left(\frac{\partial A \varepsilon_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{2B} \frac{\partial B^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \varepsilon_\eta \right) + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left(\frac{\partial B \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2A} \frac{\partial A^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \xi} \varepsilon_\xi \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{R_\eta} \frac{\varepsilon_\eta}{2} + \frac{B}{R_{\xi\eta}} \varepsilon_\eta \right) + \frac{\partial B}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_\xi} \frac{\varepsilon_\eta}{2} + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \varepsilon_\xi \right) = 0; \\ & \frac{\chi_\eta}{R_\xi} + \frac{2\chi_{12}}{R_\xi R_\eta} + \frac{\chi_\xi}{R_\eta} + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial B \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{2A} \frac{\partial A^2 \varepsilon_\eta}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} \varepsilon_\xi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial A \varepsilon_\xi}{\partial \eta} - \frac{1}{2B} \frac{\partial B^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \varepsilon_\eta \right) \right] - \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left[\left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R_\eta} \right) \frac{\varepsilon_\eta}{2} + \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta}{R_{\xi\eta}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь ε_ξ и ε_η – относительные удлинения срединной поверхности вдоль координатных линий ξ и η соответственно, $\varepsilon_{\xi\eta}$ – сдвиг срединной поверхности, χ_ξ и χ_η – относительные деформации изгиба срединной поверхности, χ_{12} – относительная деформация кручения срединной поверхности, радиусы кривизны определяются из следующих выражений:

$$\frac{1}{R_\xi} = -n \frac{\partial^2 r}{A^2 \partial \xi^2}; \quad \frac{1}{R_\eta} = -n \frac{\partial^2 r}{B^2 \partial \eta^2}; \quad \frac{1}{R_{\xi\eta}} = n \frac{\partial^2 r}{AB \partial \xi \partial \eta}. \quad (13)$$

Уравнения динамического равновесия срединной поверхности оболочки удобно использовать в виде, содержащем удельные усилия и моменты. Обозначая через N_ξ и N_η растягивающие нормальные усилия вдоль координатных осей, через M_ξ и M_η – изгибающие моменты, через T – сдвигающее усилие и через H – скручивающий момент, запишем уравнения равновесия в виде [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B N_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} N_\eta + \frac{1}{R_\xi} \left(\frac{\partial B M_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} M_\eta \right) - \\ & - \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left(\frac{\partial A M_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} M_\xi \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{A}{R_\xi} H - \frac{A}{R_{\xi\eta}} M_\eta \right) + \\ & + \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R_\eta} H - \frac{1}{R_{\xi\eta}} M_\xi \right) + AB q_\xi - AB \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{\partial A N_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} N_\xi + \frac{1}{R_\eta} \left(\frac{\partial A M_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} M_\xi \right) - \\ & - \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left(\frac{\partial B M_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} M_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{R_\eta} H - \frac{B}{R_{\xi\eta}} M_\xi \right) + \\ & + \frac{\partial B}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_\xi} H - \frac{1}{R_{\xi\eta}} M_\eta \right) + AB q_\eta - AB \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{N_\xi}{R_\xi} - \frac{2T}{R_\xi R_\eta} + \frac{N_\eta}{R_\eta} - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial B M_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} M_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial A M_\eta}{\partial \eta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} M_\xi \right) \right] + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left[- \left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R_\eta} \right) H + \frac{M_\xi + M_\eta}{R_{\xi\eta}} \right] - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n, \end{aligned} \quad (14)$$

где γ – удельный вес материала оболочки, h – ее толщина, g – ускорение силы тяжести, q_ξ, q_η, q_n – проекции вектора распределенной по поверхности оболочки нагрузки на направления соответственно e_1, e_2, e_n .

Системы уравнений (12) и (14) образуют полную систему уравнений динамического состояния оболочки. Однако неудобство использования такой системы состоит в том, что в уравнениях (12) используются относительные деформации, а в уравнениях (14) – усилия и моменты. Используя закон Гука и гипотезу Кирхгофа-Лява, можно выразить относительные деформации через усилия и моменты следующим образом[3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{Eh} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}); \varepsilon_{\eta} = \frac{1}{Eh} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}); \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} T \\ \chi_{\xi} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{\xi} - \mu M_{\eta}); \chi_{\eta} = \frac{12}{Eh^3} (M_{\eta} - \mu M_{\xi}); \chi_{12} = \frac{12(1+\mu)}{Eh^3} H. \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановки выражений (15) в уравнения (12) и сокращения на $(Eh)^{-1}$ получим уравнения неразрывности срединной поверхности оболочки, выраженные через удельные усилия и моменты:

$$\begin{aligned} & \frac{12}{h^2} \left(\frac{\partial BM_{\eta}}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial BM_{\xi}}{\partial \xi} \right) - \frac{12(1+\mu)}{h^2 A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \eta} - \frac{12}{h^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} (M_{\xi} - \mu M_{\eta}) - \\ & - \frac{1}{R_{\xi}} \left[\frac{\partial BN_{\eta}}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial BN_{\xi}}{\partial \xi} - \frac{1+\mu}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}) \right] + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left[\frac{\partial AN_{\xi}}{\partial \eta} - \right. \\ & - \mu \frac{\partial AN_{\eta}}{\partial \eta} - \frac{1+\mu}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \eta} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}) \left. \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1+\mu) \frac{A}{R_{\xi}} T + \right. \\ & \left. + \frac{A}{R_{\xi\eta}} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}) \right] + \frac{\partial A}{\partial \eta} \left[\frac{1+\mu}{R_{\eta}} T + \frac{1}{R_{\xi\eta}} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}) \right] = 0; \\ & \frac{12}{h^2} \left(\frac{\partial AM_{\xi}}{\partial \eta} - \mu \frac{\partial ABM_{\eta}}{\partial \eta} \right) - \frac{12(1+\mu)}{h^2 B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \xi} - \frac{12}{h^2} \frac{\partial A}{\partial \eta} (M_{\eta} - \mu M_{\xi}) - \\ & - \frac{1}{R_{\eta}} \left[\frac{\partial AN_{\xi}}{\partial \eta} - \mu \frac{\partial AN_{\eta}}{\partial \eta} - \frac{1+\mu}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}) \right] + \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left[\frac{\partial BN_{\xi}}{\partial \xi} - \right. \\ & - \mu \frac{\partial BN_{\eta}}{\partial \xi} - \frac{1+\mu}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \xi} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}) \left. \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1+\mu) \frac{B}{R_{\eta}} T + \right. \\ & \left. + \frac{B}{R_{\xi\eta}} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}) \right] + \frac{\partial B}{\partial \xi} \left[\frac{1+\mu}{R_{\xi}} T + \frac{1}{R_{\xi\eta}} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}) \right] = 0; \quad (16) \\ & \frac{12}{h^2 R_{\xi}} (M_{\eta} - \mu M_{\xi}) + \frac{24(1+\mu)}{h^2 R_{\xi\eta}} H + \frac{12}{h^2 R_{\eta}} (M_{\xi} - \mu M_{\eta}) + \\ & + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial BN_{\eta}}{\partial \xi} - \mu \frac{\partial BN_{\xi}}{\partial \xi} - \frac{1+\mu}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \eta} - \frac{\partial B}{\partial \xi} (N_{\xi} - \mu N_{\eta}) \right) - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{B} \left(\frac{\partial AN_{\xi}}{\partial \eta} - \mu \frac{\partial AN_{\eta}}{\partial \eta} - \frac{1+\mu}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \xi} - \frac{\partial A}{\partial \eta} (N_{\eta} - \mu N_{\xi}) \right) \left. \right] - \\ & - \frac{1}{R_{\xi\eta}} \left[\left(\frac{1}{R_{\xi}} + \frac{1}{R_{\eta}} \right) (1+\mu) T + \frac{1-\mu}{R_{\xi\eta}} (N_{\xi} + N_{\eta}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (16) совместно с уравнениями (14) составляют полную систему уравнений динамического состояния оболочки в усилиях и моментах. В этих уравнениях переменная ξ соответствует углу φ , а переменная η – углу θ .

Краевые условия задачи. Определимся, прежде всего, с областью, в которой необходимо отыскивать решение задачи. Ось x будет направлена от оси вращения шины вертикально вверх, угол θ изменяется от 0 до 2π . При этом, так как крутящий момент создает асимметрию в нагружении шины вдоль координатной линии θ , приходится рассматривать всю область изменения θ $[0, 2\pi)$. Так как в поперечном направлении шина нагружена симметрично относительно плоскости xOy , достаточно рассматривать лишь половину оболочки с изменением угла φ в пределах от нуля до π . Здесь предполагается, что покрышка шины находится в контакте с ободом колеса при $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ и $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Поэтому, с учетом отмеченной симметрии, достаточно рассмотреть относящуюся собственно к покрышке область изменения угла φ в пределах от нуля до $\frac{1}{2}\pi$, обеспечив условия непрерывной сшивки решений при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Рассмотрим краевые условия на ободе колеса. Если осевая нагрузка на колесо равна P , то на каждый рант покрышки действует нагрузка $\frac{1}{2}P$, распределенная по всему ранту, находящемуся ниже оси колеса, то есть с углами θ от $\frac{1}{2}\pi$ до $3\pi/2$. Закон распределения этой нагрузки по ранту будет иметь вид

$$F(\theta) = -\frac{P}{4} \cos \theta, \quad (17)$$

что обеспечивает равновесие шины. Так как нагрузка $F(\theta)$ действует под углом к касательным к координатным линиям φ и θ , получаем, что проекции нагрузки $F(\theta)$ на эти касательные с учетом (17) соответственно будут равны:

$$N_\varphi = \frac{P}{4} \cos^2 \theta; \quad N_\theta = -\frac{P}{2} \sin 2\theta. \quad (18)$$

В месте контакта шины с дорожным покрытием возникает площадка контакта G , очертания которой и характер распределения давления на шину в ее пределах $q_n^1(y, z)$ определяются из решения контактной задачи [4]. С учетом внутреннего давления шины $q_n^0(y, z)$ получаем, что радиальное давление на шину будет определяться выражением

$$q(\varphi, \theta) = \begin{cases} qn^0 + qn^1(\varphi, \theta), & (\varphi, \theta) \in G; \\ qn^0, & (\varphi, \theta) \notin G. \end{cases} \quad (19)$$

Крутящий момент $M_{кр}$, создаваемый двигателем, от обода колеса в шину передается через рант шины. Учитывая, что рантов два, получаем, что касательное усилие на единицу длины борта шины составляет

$$T = \frac{M_{кр}}{4\pi Rb}. \quad (20)$$

Приложение к шине крутящего момента приводит к тому, что вследствие наличия сцепления колеса с грунтом, колесо начинает катиться по грунту. Распределение сил трения колеса о грунт зависит от размеров площадки контакта колеса с грунтом и распределения давления q_n^1 на этой площадке. Максимальная сила трения, которая может возникнуть при заданном давлении q_n^1 будет равна

$$Q_{\max} = \int_G f q_n^1(\varphi, \theta) dG, \quad (21)$$

где f – коэффициент трения между колесом и грунтом. Следует учитывать, что в нормальных условиях крутящий момент на колесе таков, что фактически возникающая сила трения $Q < Q_{\max}$. С учетом этих соображений получаем, что удельное давление вдоль оси θ , возникающее вследствие действия силы трения, будет равно

$$q_\theta(\varphi, \theta) = \begin{cases} f q_n^1(\varphi, \theta), & (\varphi, \theta) \in G; \\ 0, & (\varphi, \theta) \notin G. \end{cases} \quad (22)$$

Естественно полагать, что при всех φ и θ

$$q_\varphi = 0. \quad (23)$$

Так как в приведенном анализе учтены все внешние воздействия на шину, краевые значения остальных удельных усилий и моментов принимаются равными нулю.

Преобразование уравнений состояния. Как уже отмечалось, системы уравнений (14) и (16) представляют в совокупности полную систему из шести дифференциальных уравнений динамического состояния оболочки относительно

шести искомым величин N_φ , N_θ , M_φ , M_θ , T , H . Это система восьмого порядка относительно пространственных переменных и шестого порядка – относительно времени. Следует учесть, что указанная система является системой с сильно заполненной матрицей, что иллюстрируется таблицей 1; в которой знак «+» означает вхождение соответствующего элемента в систему, а знак минус – отсутствие этого элемента в уравнении.

Таблица 1

Вхождение силовых факторов в систему уравнений

№ уравнения	N_φ	N_θ	M_φ	M_θ	T	H
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	-	+
4	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	-

Такая полнота матрицы существенно усложняет процесс решения этой системы. Кроме того, как будет показано ниже, наличие в этой системе смешанных производных усложняет выбор рациональной разностной схемы, обеспечивающей необходимую симметрию относительно переменных φ и θ . Однако, учитывая специфические особенности системы уравнений (14) и (16), путем введения четырех дополнительных переменных U , U_θ , V , V_θ можно представить эту систему в виде десяти уравнений первого порядка относительно пространственных переменных:

$$\frac{\partial B M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \varphi} M_\theta = A U \varphi;$$

$$\frac{\partial A M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial \theta} M_\varphi = B U_\theta;$$

$$\frac{\partial B N_\theta}{\partial \varphi} - \mu \frac{\partial B N_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1+\mu}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \varphi} (N_\varphi - \mu N_\theta) = A V \varphi;$$

$$\frac{\partial A N_\varphi}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial A N_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1+\mu}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial \theta} (N_\theta - \mu N_\varphi) = B V_\theta;$$

$$\frac{\partial B N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{A} \frac{\partial A^2 T}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \varphi} N_\theta + \frac{A}{R_\varphi} U \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{R_\varphi} H \right) + \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{H}{R_\theta} +$$

$$+ A B q_\varphi - A B \gamma_g h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial A N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B^2 T}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial \theta} N_\varphi + \frac{B}{R_\theta} U_\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B}{R_\theta} H \right) + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{H}{R_\varphi} +$$

$$+ A B q_\theta - A B \gamma_g h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial U \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - A B \frac{\partial N_\varphi}{R_\varphi} - A B \frac{\partial N_\theta}{R_\theta} + A B q_n - A B \gamma_g h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{12}{h^2} \left[\frac{\partial B M_\theta}{\partial \varphi} - \mu \frac{\partial B M_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1+\mu}{A} \frac{\partial A^2 H}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \varphi} (M_\varphi - \mu M_\theta) \right] -$$

$$- \frac{A}{R_\varphi} V \varphi + (1+\mu) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{R_\varphi} T \right) + \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{T}{R_\theta} \right] = 0;$$

$$\frac{12}{h^2} \left[\frac{\partial A M_\varphi}{\partial \theta} - \mu \frac{\partial A M_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1+\mu}{B} \frac{\partial B^2 H}{\partial \varphi} - \frac{\partial A}{\partial \theta} (M_\theta - \mu M_\varphi) \right] - \frac{B}{R_\theta} V_\theta +$$

$$+ (1+\mu) \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B}{R_\theta} T \right) + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{T}{R_\varphi} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial V \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{12}{h^2} \left[\frac{1}{R_\varphi} (M_\theta - \mu M_\varphi) + \frac{1}{R_\theta} (M_\varphi - \mu M_\theta) \right] = 0. \quad (24)$$

Здесь первые четыре уравнения, по существу, представляют собой обозначения для новых переменных. Матрица системы (24) становится значительно более разреженной, что иллюстрируется таблицей 2.

Как будет показано ниже, использование в качестве уравнений состояния шины системы (24) вместо системы (14), (16) позволяет построить рациональную разностную схему и в весьма существенной степени сократить время вычислений и используемую оперативную память.

Таблица 2

Разрежённость матрицы системы уравнений (24)

№ уравнения	N_φ	N_θ	M_φ	M_θ	T	H	U_φ	U_θ	V_φ	V_θ
1	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+
2	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-
3	+	+	-	-	+	-	-	-	+	-
4	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
5	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-
6	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-
7	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-
8	-	-	+	+	+	+	-	-	+	-
9	-	-	+	+	+	+	-	-	-	+
10	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+

Выбор метода численного решения задачи. Анализ возможностей применения к решению систем (14), (16) или (24) вариационных методов или метода конечных элементов показывает, что в обоих случаях для аппроксимации производных приходится применять девятиточечные шаблоны, поэтому матрицы соответствующих алгебраических систем получаются весьма плотными. А это значит, что для их решения необходимо будет применять прямые методы, решая систему из $(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)l$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Здесь N_φ и N_θ — количество узлов вдоль координат φ и θ соответственно. Для решения такой системы, например, методом Гаусса требуется выполнить $O([(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)l]^3)$ арифметических операций и занять $O([(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)l]^2)$ ячеек оперативной памяти [5]. В то же время доказано, что в общем случае система линейных алгебраических уравнений в общем случае не может быть решена с помощью меньшего числа операций, чем то, которое требуется в гауссовском исключении [6].

Для получения достаточной точности вычислений величины N_φ и N_θ должны приниматься возможно большими. Поэтому трудоемкость прямого решения системы в этих случаях будет достаточно высока. Если же учесть, что в соответствии с разработанной здесь теорией больших деформаций, эту систему предстоит решать несколько раз, то становится ясным, что поиск разностной схемы, позволяющей ускорить вычисления, представляет собой актуальную задачу.

В сущности, единственным известным в настоящее время методом ускоренного решения систем линейных алгебраических уравнений является метод прогонки. Однако применение его возможно лишь тогда, когда матрица системы является не более, чем трехдиагональной. Поэтому дальнейшие поиски в направлении построения разностных схем осуществляются с точки зрения получения разностной схемы, отвечающей этому требованию. Первым шагом в решении этой проблемы является преобразование системы (14), (16) в систему (24), что позволяет перейти от пятиточечного шаблона в представлении производных к трехточечному.

Выбор рациональной разностной схемы. Особенностью расчетной схемы для шины является наличие некоторых симметрий ее нагружения. В частности,

шина нагружена симметрично относительно плоскости $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Симметрия относительно плоскости $\theta = 0$, вообще говоря, не имеет места вследствие наличия крутящего момента и неравномерности приложения сил трения на площадке контакта. Однако правомерно предположить, что вследствие наибольшей удаленности сечения $\theta = 0$ от площадки контакта в его окрестности произойдет существенное выравнивание напряжений, и эти напряжения будут квазисимметричны относительно этого сечения.

В этой связи необходимо проанализировать, какого рода разностные схемы следует использовать, чтобы обеспечить указанные виды симметрии. Для первых производных функций в узлах сетки $\varphi = \varphi_k$ можно использовать правые, левые и центральные разности.

Пусть теперь некоторая функция $u(\varphi)$ симметрична относительно точки $\varphi = \varphi_k$. Если обеспечить симметрию шагов сетки в виде

$$h_{k-1-s} = h_{k+s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

то тогда для этой функции должны выполняться одновременно следующие три равенства, получаемые из условий непрерывности и четности функции относительно точки $\varphi = \varphi_k$:

$$u(\varphi_{k-s}) = u(\varphi_{k+s}), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$\frac{\partial u(\varphi_{k-s})}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u(\varphi_{k+s})}{\partial \varphi}; \quad (27)$$

$$\frac{\partial u(\varphi_k)}{\partial \varphi} = 0. \quad (28)$$

Определим теперь, какого рода разностную схему следует избрать, чтобы условия (26), (27) и (28) выполнялись. Если избрать только правые разности, то при выполнении условий (25) и (26) условия (27) и (28) не выполняются. Аналогичный результат получается для левых разностей. Таким образом, оказывается, что использование только правых или только левых разностей не обеспечивает учета симметрии нагружения шины.

В то же время нетрудно проверить, что центральные разности обеспечивают выполнение всех трех условий (26), (27) и (28). Следует, правда, отметить, что существует еще один, точнее, два варианта разностной схемы, обеспечивающие выполнение рассматриваемой симметрии, а именно:

1. Для точек $\varphi = \varphi_{k-s}$, $s = 1, 2, \dots$, следует принять правые (левые) разности.
2. Для точек $\varphi = \varphi_{k+s}$, $s = 1, 2, \dots$, следует принять левые (правые) разности.
3. В точке $\varphi = \varphi_k$ следует принять центральную разность.

Однако следует заметить, что эти последние варианты разностных схем слишком усложняют и без того непростую задачу. Кроме того, при вычислении вторых производных здесь возникают дополнительные сложности. Поэтому, для дальнейшего анализа используется только разностная аппроксимация производных с помощью центральных разностей. Следует отметить, что к аналогичному заключению можно прийти, если рассматривать указанную симметрию функции $u(\varphi)$ относительно точки $\varphi = \varphi_k + \frac{1}{2}h_k$.

При построении систем уравнений в конечных разностях для единообразия вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(\varphi, \theta) &= N_\varphi(\varphi, \theta); & S^{(2)}(\varphi, \theta) &= N_\theta(\varphi, \theta); & S^{(3)}(\varphi, \theta) &= M_\varphi(\varphi, \theta); \\ & & & & S^{(4)}(\varphi, \theta) &= M_\theta(\varphi, \theta); \\ S^{(5)}(\varphi, \theta) &= T(\varphi, \theta); & S^{(6)}(\varphi, \theta) &= H(\varphi, \theta); & S^{(7)}(\varphi, \theta) &= U_\varphi(\varphi, \theta); & S^{(8)}(\varphi, \theta) &= U_\theta(\varphi, \theta); \\ & & S^{(9)}(\varphi, \theta) &= V_\varphi(\varphi, \theta); & S^{(10)}(\varphi, \theta) &= V_\theta(\varphi, \theta). \end{aligned} \quad (29)$$

Система (24) должна быть проинтегрирована в области $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Введем в этой области сетку, задавая на каждой координатной линии φ ($N_\varphi + 1$) узлов $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N_\varphi}$ и

на каждой координатной линии θ ($N_\theta + 1$) узлов $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N_\theta}$. Таким образом, сетка для рассматриваемой области будет содержать $(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)$ узлов. Для краткости будем обозначать $S^{(k)}(\varphi, \theta_j) = S_{ij}^{(k)}$. Если система содержит n неизвестных функций, то разностная схема для такой системы дифференциальных уравнений при данном выборе сетки будет содержать $(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)n$ неизвестных величин $S_{ij}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{0, N_\varphi}$, $j = \overline{0, N_\theta}$. Следовательно, и разностная схема должна содержать $(N_\varphi + 1)(N_\theta + 1)n$ уравнений. Во внутренних узлах сетки $i = \overline{1, N_\varphi - 1}$, $j = \overline{1, N_\theta - 1}$, $(N_\varphi - 1)(N_\theta - 1)n$ разностных уравнений получаются непосредственно из уравнений состояния (24). На грани $i = N_\varphi$ сетки также справедлива система уравнений состояния, так как для шины эта грань является внутренней. В точках (N_φ, j) этой грани имеем для любого k

$$\frac{\partial S^{(k)}(\varphi_{N_\varphi}, \theta_j)}{\partial \varphi} = \frac{S^{(k)}_{N_\varphi+1, j} - S^{(k)}_{N_\varphi, j}}{h_{\varphi N_\varphi}} + \frac{S^{(k)}_{N_\varphi, j} - S^{(k)}_{N_\varphi-1, j}}{h_{\varphi(N_\varphi-1)}}. \quad (30)$$

Здесь и в дальнейшем обозначено

$$h_{\varphi_i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i; \quad h_{\theta_j} = \theta_{j+1} - \theta_j. \quad (31)$$

Так как плоскость $\varphi = \varphi_{N_\varphi}$ является плоскостью симметрии всех искомых функций, то с учетом (25) имеем:

$$h_{\varphi, N_\varphi-1} = h_{\varphi, N_\varphi}; \quad S_{N_\varphi-1, j}^{(k)} = S_{N_\varphi+1, j}^{(k)}. \quad (32)$$

Поэтому из (30) следует для любого k

$$\frac{\partial S^{(k)}(\varphi_{N_\varphi}, \theta_j)}{\partial \varphi} = 0, \quad j = \overline{1, N_\theta - 1}. \quad (33)$$

Таким образом, на грани $\varphi = \varphi_{N_\varphi}$ из уравнений состояния получим еще $(N_\theta - 1)n$ разностных уравнений, причем, благодаря равенствам (33), эти уравнения существенно упрощаются.

Грани сетки $\theta = \theta_0 = 0$ и $\theta = \theta_{N_\theta} = 2\pi$ с точки зрения шины как конструкции представляют собой одно и то же сечение, поэтому для любых φ, k и любого порядка производной s справедливы равенства

$$S^{(k)}(\varphi, 0) = S^{(k)}(\varphi, 2\pi); \quad \frac{\partial^s S^{(k)}(\varphi, 0)}{\partial \theta^s} = \frac{\partial^s S^{(k)}(\varphi, 2\pi)}{\partial \theta^s}. \quad (34)$$

В конечно-разностном варианте первое условие (34) эквивалентно условию

$$S_{i0}^{(k)} = S_{iN_\theta}^{(k)}, \quad i = \overline{0, N_\varphi}, \quad k = \overline{1, 10}. \quad (35)$$

Поэтому равенства (35) позволяют исключить из системы разностных уравнений узлы $j = N_\theta$ при всех значениях индекса $i = \overline{1, N_\varphi}$. Следовательно, система уравнений в конечных разностях сокращается на $N_\varphi n$ уравнений. Что касается второго условия (34), то используя в нем аппроксимацию с помощью центральных разностей при $s = 1$, получаем формально с помощью формулы (27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{(k)}(\varphi, 0)}{\partial \theta} &\approx \frac{S_{i1}^{(k)} - S_{i0}^{(k)}}{2h_{\theta 0}} + \frac{S_{i0}^{(k)} - S_{i,-1}^{(k)}}{2h_{\theta, -1}}; \\ \frac{\partial S^{(k)}(\varphi, 2\pi)}{\partial \theta} &\approx \frac{S_{i, N_\theta+1}^{(k)} - S_{i, N_\theta}^{(k)}}{2h_{\theta N_\theta}} + \frac{S_{i, N_\theta}^{(k)} - S_{i, N_\theta-1}^{(k)}}{2h_{\theta, N_\theta-1}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Но, так как в силу изменения нумерации узлов при повторном обходе области отыскания решения справедливо:

$$S_{i,-1}^{(k)} = S_{i, N_\theta-1}^{(k)}; \quad S_{i, N_\theta+1}^{(k)} = S_{i1}^{(k)}; \quad h_{\theta N_\theta} = h_{\theta 0}; \quad h_{\theta, -1} = h_{\theta, N_\theta-1},$$

то равенство

$$\frac{\partial S^{(k)}(\varphi, 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial S^{(k)}(\varphi, 2\pi)}{\partial \theta}.$$

в разностном варианте при использовании центральных разностей выполняется автоматически, то есть естественно.

Наконец, в сечении $i = 0$, учитывая краевые условия (18) и (20), после введения обозначений:

$$\Phi_j^1 = \begin{cases} \frac{P}{4} \cos^2 \theta_j, & \frac{\pi}{2} \leq \theta_j \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \theta_j < \frac{\pi}{2}, \theta_j > \frac{3\pi}{2} \end{cases}; \quad \Phi_j^2 = \begin{cases} -\frac{P}{2} \sin 2\theta_j, & \frac{\pi}{2} \leq \theta_j \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \theta_j < \frac{\pi}{2}, \theta_j > \frac{3\pi}{2} \end{cases}; \quad \Phi_j^5 = \frac{M_{кр}}{4\pi Rb}$$

получим:

$$S_{0j}^{(k)} = \Phi_j^k, \quad k = 1, 2, 5; \quad j = \overline{0, N\theta - 1}. \quad (37)$$

Для остальных переменных в сечении $i = 0$ задаются «мягкие» краевые условия:

$$S_{0j}^{(k)} = S_{1j}^{(k)}, \quad k = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10; \quad j = \overline{0, N\theta - 1}. \quad (38)$$

Во внутренних узлах сетки $i = \overline{1, N\theta - 1}$, $j = \overline{1, N\theta - 1}$, $(N_\theta - 1)(N_\theta - 1)$ разностных уравнений получаются непосредственно из уравнений состояния (24) путем замены в них производных конечными разностями. Эти уравнения в конечных разностях справедливы также и при $j = N_\theta$, $i = \overline{1, N\theta - 1}$. В этом случае необходимо только учесть, что $j = N_\theta$ и $j = 0$ – это одно и то же сечение. Уравнения в конечных разностях справедливы также при $i = N_\theta$, $j = \overline{0, N\theta - 1}$ с учетом следующих особенностей. В силу симметрии геометрических параметров шины и нагрузок относительно плоскости $\varphi = \varphi_{N_\theta}$ для всех входящих в уравнения величин x справедливы равенства

$$\frac{\partial x(\varphi_{N\theta}, \theta)}{\partial \varphi} \approx \frac{x_{N\theta+1, \theta} - x_{N\theta, \theta}}{2h_{N\theta}} + \frac{x_{N\theta, \theta} - x_{N\theta-1, \theta}}{2h_{N\theta-1}} = 0.$$

Но, в силу симметрии сетки относительно плоскости $\varphi = \varphi_{N_\theta}$, $h_{N_\theta} = h_{N_\theta-1}$, поэтому $x_{N_\theta+1, \theta} = x_{N_\theta-1, \theta}$, причем $x_{N_\theta+1, \theta} = x_{N_\theta}$. Вследствие этих равенств при $i = N_\theta$ система в конечных разностях значительно упрощается.

Таким образом, в конечных разностях получена полная система из $N_\theta(N_\theta + 1)$ и уравнений с таким же количеством неизвестных, состоящая из уравнений (37), (38) и уравнений в конечных разностях.

Матрица этой системы не является трехдиагональной. Однако можно попытаться с помощью ряда преобразований представить ее в виде блочно-трехдиагональной матрицы. С этой целью введем ряд вспомогательных величин.

Прежде всего, введем вспомогательные N_θ -мерные векторы-столбцы:

$$S_i^{(k)} = \{S^{(k)}_{i0}, S^{(k)}_{i1}, S^{(k)}_{i2}, \dots, S^{(k)}_{i, N_\theta - 2}, S^{(k)}_{i, N_\theta - 1}\}, \quad k = \overline{1, 10};$$

$$\Phi^{(k)} = \{\Phi_0^{(k)}, \Phi_1^{(k)}, \Phi_2^{(k)}, \dots, \Phi_{N_\theta + 2}^{(k)}, \Phi_{N_\theta - 1}^{(k)}\}, \quad k = 1, 2, 5,$$

а также векторы-столбцы такой же размерности $q_{i\varphi AB}$, $q_{i\theta AB}$ и $q_{i\theta AB}$ с компонентами соответственно $q_{i\varphi AB}(l) = A_{il} B_{il} \varphi_{il}$, $q_{i\theta AB}(l) = A_{il} B_{il} \theta_{il}$, $q_{i\theta AB}(l) = A_{il} B_{il} \theta_{il}$, $l = \overline{0, N_\theta}$, m -мерный вектор-столбец θ^m со всеми компонентами равными нулю и единичную матрицу E^m размером $m \times m$. Тогда система уравнений (37), (38) может быть записана в виде:

$$A_0 Y_1 + B_0 Y_0 = F_0, \quad (39)$$

где векторы-столбцы Y_1 и F_0 имеют вид:

$$Y_1 = \{S^{(1)}_i, S^{(2)}_i, S^{(3)}_i, S^{(4)}_i, S^{(5)}_i, S^{(6)}_i, S^{(7)}_i, S^{(8)}_i, S^{(9)}_i, S^{(10)}_i\}; \quad (40)$$

$$F_0 = \{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \theta^{N_\theta}, \theta^{N_\theta}, \Phi^{(5)}, \theta^{N_\theta}, \theta^{N_\theta}, \theta^{N_\theta}, \theta^{N_\theta}, \theta^{N_\theta}\},$$

матрица $B_0 = E^{N_0 \times n}$, матрица A_0 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta & \theta N \theta \\ \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & \theta N \theta & -E N \theta \end{pmatrix}$$

В аналогичном виде представим уравнения в конечных разностях, отдельно для каждого значения индекса $i = \overline{1, N_\theta}$:

$$A_i Y_{i+1} + B_i Y_i + C_i Y_{i-1} = F_i. \quad (41)$$

Для того чтобы записать матрицы A_i , B_i и C_i , а также вектор-столбец F_i в компактном виде, введем следующие обозначения:

$$\Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h \varphi_i - 1} - \frac{1}{h \varphi_i} \right); \quad \Delta \theta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h \theta_i - 1} - \frac{1}{h \theta_i} \right);$$

$$P^A \theta_{ij} = \frac{A_{i,j+1}}{2h \theta_j} + \Delta \theta_i A_{ij} - \frac{A_{i,j-1}}{2h \theta_{j-1}};$$

$$Q^B \varphi_{ij} = \frac{B_{i+1,j}}{2h \varphi_i} + \Delta \varphi_i B_{ij} - \frac{B_{i-1,j}}{2h \varphi_{i-1}};$$

$$Q^B 1 \varphi_{ij} = \frac{B_{i+1,j}}{2h \varphi_i} + (1 + \mu) \Delta \varphi_i B_{ij} - \frac{B_{i-1,j}}{2h \varphi_{i-1}};$$

$$Q^B \mu \varphi_{ij} = \frac{\mu B_{i+1,j}}{2h \varphi_i} + (1 + \mu) \Delta \varphi_i B_{ij} - \frac{\mu B_{i-1,j}}{2h \varphi_{i-1}};$$

$$Q^B R \varphi_{ij} = \frac{B_{i+1,j}}{2R \varphi_{ij} h \varphi_i} + \left(\frac{B_{ij}}{R \varphi_{ij}} + 1 \right) \Delta \varphi_i - \frac{B_{i-1,j}}{2R \varphi_{ij} h \varphi_{i-1}}.$$

Введем также матрицы $B_{\varphi_{i+}}$, $B_{\varphi_{i-}}$, $C_{\varphi_{i+}}$, $C_{\varphi_{i-}}$ размером $N_\theta \times N_\theta$ с элементами соответственно:

$$B_{\varphi_{i+}}(l, s) = \frac{B_{i+1,l}}{2h \varphi_i} \delta^l_s; \quad B_{\varphi_{i-}}(l, s) = \frac{B_{i-1,l}}{2h \varphi_{i-1}} \delta^l_s; \quad C_{\varphi_{i+}}(l, s) = \frac{B_{i+1,l}}{2B_{il} h \varphi_i} \delta^l_s;$$

$$C_{\varphi_{i-}}(l, s) = \frac{B_{i-1,l}}{2B_{il} h \varphi_{i-1}} \delta^l_s, \quad l, s = \overline{0, N_\theta - 1}; \quad (42)$$

δ^l_s – символ Кронекера. Введем дополнительно следующие диагональные матрицы $B_{\varphi_{i+}}^A$, $B_{\varphi_{i+}}^B$, $Q_{1\varphi_i}$, $Q_{\mu\varphi_i}$, $Q_{R\varphi_i}$ размером $N_\theta \times N_\theta$ с элементами:

$$\begin{aligned} B_{\varphi_i}(l, s) &= B_{il} \Delta \varphi_i \delta^l_s; & Q_{\varphi_i}(l, s) &= Q^B \varphi_{il} \Delta \varphi_i \delta^l_s; & A^A_i(l, s) &= A_{il} \delta^l_s; \\ B^B_i(l, s) &= B_{il} \delta^l_s; & Q_{1\varphi_i}(l, s) &= Q^B 1 \varphi_{il} \delta^l_s; & Q_{\mu\varphi_i}(l, s) &= Q^B \mu \varphi_{il} \delta^l_s; \\ Q_{R\varphi_i}(l, s) &= Q^B R \varphi_{il} \delta^l_s, & l, s &= \overline{0, N_\theta - 1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Введем также матрицу $P_{\theta i}$ с элементами

$$P_{\theta i}(l, s) = P^A_{\theta i l} \delta^l s$$

для всех пар индексов, кроме двух следующих значений:

$$P_{\theta i}(0, 0) = \frac{A_{i1} - A_{i, N_{\theta} - 1}}{2h_{\theta 0}};$$

$$P_{\theta i}(0, H_{\theta}) = \frac{A_{i0}}{2h_{\theta 0}} + \frac{A_{i, N_{\theta} - 1}}{2} \left(\frac{1}{h_{\theta N_{\theta} - 2}} - \frac{1}{h_{\theta 0}} \right) - \frac{A_{i, N_{\theta} - 2}}{2h_{\theta N_{\theta} - 2}} \quad (44)$$

Введем дополнительно шесть следующих матриц размером $N_{\theta} \times N_{\theta}$:

а) Матрицу J_{2i} с элементами первой строки

$$J_{2i}(0, s) = \frac{A^2_{i1}}{2A_{i0}h_{\theta 0}} \delta^0 s - 1 + A_{i0}\Delta\theta\delta^0 s - \frac{A^2_{i, N_{\theta} - 1}}{2A_{i0}h_{\theta 0}} \delta^0 s - (N_{\theta} - 1); \quad (45)$$

с элементами строк от 1 до $N_{\theta} - 2$

$$J_{2i}(l, s) = \frac{A^2_{i, l-1}}{2A_{i0}h_{\theta l}} \delta^l s - 1 + A_{i l} \Delta\theta l \delta^l s - \frac{A^2_{i, l-1}}{2A_{i0}h_{\theta l-1}} \delta^l s + 1; \quad (46)$$

и с элементами $(N_{\theta} - 1)$ -й строки

$$J_{2i}(N_{\theta} - 1, s) = \frac{A^2_{i0}}{2A_{i, N_{\theta} - 1}h_{\theta 0}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + (N_{\theta} + 1) + \\ + A_{i, N_{\theta} - 1} \Delta\theta, N_{\theta} - 1 \delta^{N_{\theta} - 1} s - \frac{A^2_{i, N_{\theta} - 2}}{2A_{i, N_{\theta} - 1}h_{\theta, N_{\theta} - 2}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + 1. \quad (47)$$

б) Матрицу J_i с элементами первой строки

$$J_i(0, s) = \frac{A_{i1}}{2h_{\theta 0}} \delta^0 s - 1 + A_{i0}\Delta\theta\delta^0 s - \frac{A_{i, N_{\theta} - 1}}{2h_{\theta 0}} \delta^0 s - (N_{\theta} - 1); \quad (48)$$

с элементами строк от 1 до $N_{\theta} - 2$

$$J_i(l, s) = \frac{A_{i, l+1}}{2h_{\theta l}} \delta^l s - 1 + A_{i l} \Delta\theta l \delta^l s - \frac{A_{i, l-1}}{2h_{\theta l-1}} \delta^l s + 1; \quad (49)$$

и с элементами $(N_{\theta} - 1)$ -й строки

$$J_i(N_{\theta} - 1, s) = \frac{A_{i0}}{2h_{\theta 0}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + (N_{\theta} + 1) + A_{i, N_{\theta} - 1} \Delta\theta, N_{\theta} - 1 \delta^{N_{\theta} - 1} s - \\ - \frac{A_{i, N_{\theta} - 2}}{2h_{\theta, N_{\theta} - 2}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + 1. \quad (50)$$

с) Матрицу $J_{\mu i}$ с элементами первой строки

$$J_{\mu i}(0, s) = \frac{A_{i1}}{2h_{\theta 0}} \delta^0 s - 1 + \left[\frac{\mu A_{i1}}{2h_{\theta 0}} + (1 + \mu) A_{i0} \Delta\theta - \frac{\mu A_{i, N_{\theta} - 1}}{2h_{\theta 0}} \right] \delta^0 s - \\ - \frac{A_{i, N_{\theta} - 1}}{2h_{\theta 0}} \delta^0 s - (N_{\theta} - 1); \quad (51)$$

с элементами строк от 1 до $N_{\theta} - 2$

$$J_{\mu i}(l, s) = \frac{A_{i, l+1}}{2h_{\theta l}} \delta^l s - 1 + \left[\frac{\mu A_{i, l+1}}{2h_{\theta l}} + (1 + \mu) A_{i l} \Delta\theta - \frac{\mu A_{i, l-1}}{2h_{\theta, l-1}} \right] \delta^l s - \\ - \frac{A_{i, l-1}}{2h_{\theta, l-1}} \delta^l s + 1; \quad (52)$$

и с элементами $(N_{\theta} - 1)$ -й строки

$$J_{\mu i}(N_{\theta} - 1, s) = \frac{A_{i, N_{\theta} - 1}}{2h_{\theta 0}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + (N_{\theta} - 1) + \left[\frac{\mu A_{i, 0}}{2h_{\theta 0}} + \right. \\ \left. + (1 + \mu) A_{i, N_{\theta} - 1} \Delta\theta, N_{\theta} - 1 - \frac{\mu A_{i, N_{\theta} - 2}}{2h_{\theta, N_{\theta} - 2}} \right] \delta^{N_{\theta} - 1} s - \frac{A_{i, N_{\theta} - 2}}{2h_{\theta, N_{\theta} - 2}} \delta^{N_{\theta} - 1} s + 1. \quad (53)$$

d) Матрицу J_{ii} с элементами первой строки

$$J_{ii}(0, s) = \mu \frac{A_{i1}}{2h\theta_0} \delta^0 S - 1 + \left[\frac{A_{i1}}{2h\theta_0} + (1 + \mu) A_{i0} \Delta\theta_0 - \frac{A_{i, N\theta-1}}{2h\theta_0} \right] \delta^0 S - \mu \frac{A_{i, N\theta-1}}{2h\theta_0} \delta^0 S - (N\theta - 1); \quad (54)$$

с элементами строк от 1 до $N_\theta - 2$

$$J_{ii}(l, s) = \mu \frac{A_{i, l+1}}{2h\theta l} \delta^l S - 1 + \left[\frac{A_{i, l+1}}{2h\theta l} + (1 + \mu) A_{il} \Delta\theta l - \frac{A_{i, l-1}}{2h\theta, l-1} \right] \delta^l S - \mu \frac{A_{i, l-1}}{2h\theta, l-1} \delta^l S + 1; \quad (55)$$

и с элементами $(N_\theta - 1)$ -й строки

$$J_{ii}(N\theta - 1, s) = \mu \frac{A_{i, N\theta-1}}{2h\theta_0} \delta^{N\theta-1} S + (N\theta - 1) + \left[\frac{A_{i, 0}}{2h\theta_0} + (1 + \mu) A_{i, N\theta-1} \Delta\theta, N\theta-1 - \frac{A_{i, N\theta-2}}{2h\theta, N\theta-2} \right] \delta^{N\theta-1} S - \mu \frac{A_{i, N\theta-2}}{2h\theta, N\theta-2} \delta^{N\theta-1} S + 1. \quad (56)$$

e) Матрицу J_{Ri} с элементами первой строки

$$J_{Ri}(0, s) = \frac{1}{2h\theta_0} \delta^0 S - 1 + \left[\frac{A_{i0}}{2R\theta_{i0}h\theta_0} + \left(\frac{A_{i0}}{R\theta_{i0}} + 1 \right) \Delta\theta_0 - \frac{A_{i, N\theta-1}}{2R\theta_{i0}h\theta, N\theta-1} \right] \delta^0 S - \frac{1}{2h\theta_0} \delta^0 S - (N\theta - 1); \quad (57)$$

с элементами строк от 1 до $N_\theta - 2$

$$J_{Ri}(l, s) = \frac{1}{2h\theta, l} \delta^l S - 1 + \left[\frac{A_{i, l+1}}{2R\theta_{il}h\theta l} + \left(\frac{A_{il}}{R\theta_{il}} + 1 \right) \Delta\theta l - \frac{A_{i, l-1}}{2R\theta_{il}h\theta, l-1} \right] \delta^l S - \frac{1}{2h\theta, l-1} \delta^l S + 1; \quad (58)$$

и с элементами $(N_\theta - 1)$ -й строки

$$J_{Ri}(N\theta - 1, s) = \frac{1}{2h\theta_0} \delta^{N\theta-1} S + N\theta - 1 + \left[\frac{A_{i0}}{2R\theta_{i, N\theta-1}h\theta_0} + \left(\frac{A_{i, N\theta-1}}{R\theta_{i, N\theta-1}} + 1 \right) \Delta\theta, N\theta-1 - \frac{A_{i, N\theta-2}}{2R\theta_{i, N\theta-1}h\theta, N\theta-2} \right] \delta^{N\theta-1} S - \frac{1}{2h\theta, N\theta-2} \delta^{N\theta-1} S + 1. \quad (59)$$

f) Матрицу H_{ii} с элементами первой строки

$$H_{ii}(0, s) = \frac{1}{2h\theta_0} \delta^0 S - 1 + \Delta\theta_0 \delta^0 S - \frac{1}{2h\theta_0} \delta^0 S - (N\theta - 1); \quad (60)$$

и с элементами строк от 1 до $N_\theta - 2$

$$H_{ii}(l, s) = \frac{1}{2h\theta l} \delta^l S - 1 + \Delta\theta l \delta^l S - \frac{1}{2h\theta, l-1} \delta^l S + 1; \quad (61)$$

и с элементами $(N_\theta - 1)$ -й строки

$$H_{ii}(N\theta - 1, s) = \frac{1}{2h\theta l} \delta^{N\theta-1} S + (N\theta - 1) + \Delta\theta l \delta^{N\theta-1} S - \frac{1}{2h\theta, N\theta-2} \delta^{N\theta-1} S + 1; \quad (62)$$

Если для сокращения записей дополнительно ввести обозначения

$$D_{i1+} = -(1 + \mu) C_{\phi i +}; \quad D_{i1-} = (1 + \mu) C_{\phi i -}; \quad D_{i2+} = \frac{12}{h^2} B_{\phi i +}; \quad D_{i2-} = \frac{12}{h^2} B_{\phi i -};$$

$$D_{i3+} = -\frac{12(1 + \mu)}{h^2} C_{\phi i +}; \quad D_{i3-} = \frac{12(1 + \mu)}{h^2} C_{\phi i -}; \quad D_{i\mu 0} = \frac{1 + \mu}{2h_{\phi i}} E^{N\theta};$$

$$D_{i\mu 1} = -\frac{1 + \mu}{2h_{\phi i-1}} E^{N\theta}; \quad D_{iE0} = \frac{1}{2h_{\phi i}} E^{N\theta}; \quad D_{iE-} = -\frac{1}{2h_{\phi i-1}} E^{N\theta},$$

то матриці A_i , B_i и C_i , а также векторы-столбцы F_i могут быть записаны в следующем виде:

$$A_i = \begin{pmatrix} \theta N\theta & \theta N\theta & B_{\varphi i+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & C_{\varphi i+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ -\mu B_{\varphi i+} & B_{\varphi i+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{i1+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ B_{\varphi i+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & C_{\varphi i+} & D_{iE0} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{iE0} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & -\mu D_{i2+} & D_{i2+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{i\mu 0} & D_{i3+} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{iE0} & \theta N\theta \end{pmatrix}; \quad (63)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \theta N\theta & \theta N\theta & B_{\varphi i} & -Q_{\varphi i} \theta N\theta & J_{2i} & -A_{Ai} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & -P_{\theta i} & J_i \theta N\theta & B_{\varphi i} & \theta N\theta & -B_{Bi} & \theta N\theta & \theta N\theta \\ -Q_{1\varphi i} & Q_{\mu\varphi i} & \theta N\theta & \theta N\theta & K_{2i} & \theta N\theta & \theta N\theta & -A_{Ai} & \theta N\theta \\ J_{\mu i} & -J_{1i} & \theta N\theta & \theta N\theta & K_{3i} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & -B_{Bi} \\ B_{\varphi i} & -Q_{\varphi i} & \theta N\theta & \theta N\theta & J_{2i} & J_{Ri} & E^{N\theta} & \theta N\theta & \theta N\theta \\ -P_{\theta i} & J_i & \theta N\theta & \theta N\theta & B_{\varphi i} & Q_{R\varphi i} & \theta N\theta & E^{N\theta} & \theta N\theta \\ -B_{Bi} & -A_{Ai} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & K_{1i} & H_{hi} & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & K_{4i} & K_{5i} & K_{6i} & K_{9i} & \theta N\theta & \theta N\theta & E^{N\theta} \\ \theta N\theta & \theta N\theta & K_{7i} & K_{8i} & K_{Ri} & K_{\varphi i} & \theta N\theta & \theta N\theta & -E^{N\theta} \\ \theta N\theta & \theta N\theta & K_{Bi} & K_{Ai} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & K_{1i} & -H_{hi} \end{pmatrix}; \quad (64)$$

$$C_i = \begin{pmatrix} \theta N\theta & \theta N\theta & -B_{\varphi i-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & -C_{\varphi i-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \mu B_{\varphi i-} & -B_{\varphi i-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{i1-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ -B_{\varphi i-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & -C_{\varphi i-} & D_{iE-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{iE-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \mu D_{i2-} & -D_{i2-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{i\mu 1} & D_{i3-} & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta \\ \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & \theta N\theta & D_{iE-} & \theta N\theta \end{pmatrix}; \quad (65)$$

$$F_i = \{\theta_1 N\theta, \theta_1 N\theta, \theta_1 N\theta, \theta_1 N\theta, -q_{i\varphi AB}, -q_{i\theta AB}, -q_{inAB}, \theta_1 N\theta, \theta_1 N\theta, \theta_1 N\theta\}. \quad (66)$$

Здесь

$$K_{1i} = \Delta \varphi_i E^{N_0}; \quad K_{2i} = -(1 + \mu) J_{2i}; \quad K_{4i} = -\frac{12}{h^2} Q_{1\varphi_i}; \quad K_{5i} = \frac{12}{h^2} Q_{\mu\varphi_i}; \quad K_{6i} = (1 + \mu) J_{Ri};$$

$$K_{7i} = \frac{12}{h^2} J_{\mu i}; \quad K_{8i} = -\frac{12}{h^2} J_{1i}; \quad K_{9i} = -\frac{12(1+\mu)}{h^2} J_{2i}; \quad K_{\varphi_i} = -\frac{12(1+\mu)}{h^2} B_{\varphi_i};$$

$$K_{Bi} = \frac{12}{h^2} (-\mu B^B_i + A^A_i); \quad K_{Ai} = \frac{12}{h^2} (B^B_i + \mu A^A_i); \quad K_{Ri} = (1 + \mu) Q_{R\varphi_i}$$

Произведя в уравнениях (39) и (41) соответствующую перегруппировку слагаемых, можно эти уравнения объединить в одно уравнение

$$AY = F; \quad (67)$$

где векторы-столбцы Y и F размерности $N_a = N_0 n (N_\varphi - 1)$ и матрица A размером $N_a \times N_a$ выглядят следующим образом:

$$Y = \{Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_\varphi-1}, Y_{N_\varphi}\}; \quad F = \{F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N_\varphi-1}, F_{N_\varphi}\};$$

$$A = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \dots & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} \\ C_1 & B_1 & A_1 & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \dots & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} \\ \theta^{N_a} & C_2 & B_2 & A_2 & \theta^{N_a} & \dots & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} \\ \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & C_3 & B_3 & A_3 & \dots & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \dots & CN_{\varphi-2} & BN_{\varphi-2} & AN_{\varphi-2} & \theta^{N_a} \\ \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \dots & CN_{\varphi-1} & BN_{\varphi-1} & AN_{\varphi-1} & \theta^{N_a} \\ \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & \dots & \theta^{N_a} & \theta^{N_a} & CN_{\varphi} & BN_{\varphi} \end{pmatrix} \quad (68)$$

Вследствие того, что с помощью проделанных преобразований удалось привести матрицу A к блочно трехдиагональному виду, появилась возможность использовать декомпозицию данной задачи, применив метод матричной прогонки по следующему алгоритму.

1. Вычислить прогоночную матрицу α_0 и прогоночный вектор-столбец β_0 по следующим формулам:

$$\alpha_0 = -B_0^{-1} A_0; \quad \beta_0 = B_0^{-1} F_0. \quad (69)$$

2. В цикле по i от 1 до $N_\varphi - 1$ вычислить прогоночные матрицы $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\varphi-1}$ и прогоночные векторы $\beta_1, \dots, \beta_{N_\varphi-1}$ по формулам:

$$\alpha_i = -[B_i + C_i \alpha_{i-1}]^{-1} A_i; \quad \beta_i = [B_i + C_i \alpha_{i-1}]^{-1} [F_i - C_i \beta_{i-1}]. \quad (70)$$

3. Вычислить по формуле

$$Y_{N_\varphi} = B^{-1}_{N_\varphi} F_{N_\varphi}. \quad (71)$$

4. В цикле по i от $N_\varphi - 1$ до 0 с шагом (-1) вычислить $Y_{N_\varphi-1}, \dots, Y_0$ по формуле

$$Y_i = \alpha_i Y_{i+1} + \beta_i. \quad (72)$$

Данный алгоритм требует вычисления $N_\varphi + 1$ обратных матриц размером $N_\varphi n \times N_\varphi n$. Так как трудоемкость вычисления обратной матрицы фактически эквивалентна трудоемкости решения системы методом Гаусса, то для вычисления этих матриц требуется $O((N_\varphi n)^3 (N_\varphi + 1))$ арифметических операций. В частности, так как число уравнений в системе $n = 10$, принимая $N_0 = 20$, $N_\varphi + 1 = 11$, получаем $O((N_\varphi n)^3 (N_\varphi + 1)) = O(88 \times 10^6)$. В то же время, если решать систему прямыми мето-

дами число арифметических операций составит $O([N_{\theta}n(N_{\theta}+1)]^3) = O(106,48 \times 10^8)$, то есть быстрейшее от применения метода матричной прогонки возрастает более чем в 120 раз.

Выводы. Таким образом, построен эффективный алгоритм для расчета напряженного состояния в шинах при больших деформациях. На основании изложенного здесь алгоритма составлен пакет программ на алгоритмическом языке C++. Пакет разработан в интерактивном режиме и предусматривает ввод необходимых исходных данных для конкретных шин, включая их физические параметры и геометрические формы. Имеется возможность изменять параметры сетки и требуемую точность вычислений, включая число интервалов деления по времени. Конечная информация выдается в нескольких видах, в частности, позволяет вычислять распределение напряжений по толщине шины. Программа применяется для прочностного расчета нескольких разновидностей шин низкого давления и больших габаритных размеров. В частности, с помощью данного пакета программ выяснена причина волнообразного выпучивания боковых поверхностей шин и разработаны меры по устранению этого нежелательного явления.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В. А. Математическая модель системы с переменной структурой для больших деформаций гибких оболочек / В. А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: «Математика». – 2000. – Вип. 5. – С. 119–122.
2. Огибалов П. М. Оболочки и пластины / П. М. Огибалов. – М., 1969. – 695 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Том 1. – М., 1968. – 831 с.
4. Кваша Э. Н. Контактные задачи анизотропных слоистых оболочек / Э. Н. Кваша // Теоретические основы гражданского строительства. – Днепропетровск, 1994. – С. 195 – 199.
5. Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М., 1986. – 288 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1977. – 656 с.

Надійшла до редколегії 13.12.2011.

УДК 532.516

Д. А. Редчиц

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «ТРАНСМАГ»

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРЕПРОЦЕССОРА ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

На базі багатоблокових пересічних структурованих сіток, що перетинаються, розроблено автоматизований препроцесор для розв'язання задач обчислювальної гідродинаміки. Багатоблокові обчислювальні технології дозволяють проводити чисельне моделювання стаціонарних і нестаціонарних, ламінарних і турбулентних течій нестисливої рідини навколо рухомих і нерухомих тіл складної геометрії. Розроблений алгоритм має можливість легкого розпаралелювання на багатоядерних системах.

Ключові слова: гідродинаміка, багато блокові обчислювальні технології, автоматизований препроцесор.