

## Бібліографічні посилання

1. Абрамович Г. Н. К расчету воздушного сопротивления поезда на открытой трассе и в тоннеле / Г. Н. Абрамович // Тр. ЦАГИ. – Вып. № 400. – 1939. – 32 с.
2. Кравец Е. В. Гидродинамика течения между прямоугольными призмами, расположенными тандемом над экраном: дисс. на соиск. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Кравец Елена Владимировна. – Днепропетровск, 2009. – 229 с.
3. Кравец Е. В. Структура вихребразования при обтекании вязким несжимаемым потоком прямоугольных призм, расположенных тандемом над экраном, с открытым межторцовым пространством / Е. В. Кравец // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: «Механіка». – 2011. – Вып. 15, т. 1. – С. 43–53.
4. Романенко Г. А. Исследования по аэродинамике скоростных поездов / Г. А. Романенко // Науч. труды НИИ механики МГУ. Исследования по аэродинамике. – Вып. 4, 1969. – С. 74–86.
5. Романенко Г. А. Исследования аэродинамического сопротивления скоростных поездов / Г. А. Романенко, Е. И. Сюзюмова // Науч. труды НИИ механики МГУ. Некоторые вопросы экспериментальной аэродинамики. – Вып. 24, 1973. – С. 110–118.
6. Скоростной и высокоскоростной железнодорожный транспорт. В прошлом, настоящем и будущем. К 150-летию железнодорожной магистрали Санкт-Петербург–Москва. – Т. 1. – СПб., 2001. – 320 с. – Т. 2. – СПб., 2003. – 448 с.
7. Худяков Г. Е. Обоснование выбора внешней геометрической формы скоростных поездов / Г. Е. Худяков // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1988. – Вып. № 3666. – 79 с.

Надійшла до редколегії 12.12.2011.

УДК 532.5

Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, В. Г. Решняк

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

### РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ СЛОЖНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Узагальнено комбінований метод граничних елементів і дискретних вихорів для розрахунку течій навколо складних гідродинамічних конфігурацій. Концепція локалізованих об'єктів розглядається як природне узагальнення методу дискретних вихорів. Показано, що розгляд дискретних диполів разом із дискретними вихорами може поліпшити ефективність обчислювального алгоритму.

Ключові слова: течія в області складної форми, метод граничних елементів, метод дискретних вихорів, диполь, локалізація.

Комбинируемый метод граничных элементов и дискретных вихрей обобщен для расчета обтекания сложных гидродинамических конфигураций. Концепция локализованных объектов рассматривается как естественное обобщение метода дискретных вихрей. Показано, что введение в рассмотрение дискретных диполей наряду с дискретными вихрями может улучшить эффективность вычислительного алгоритма.

Ключевые слова: течение в области сложной формы, метод граничных элементов, метод дискретных вихрей, диполь, локализация.

The combined boundary elements and discrete vortex method is generalized for calculation of fluid flows near complex configurations. The localized object conception is natural generalization of discrete vortex method. It is shown that introduction of discrete dipoles together with discrete vortices can improve an effectiveness of computational

algorithm. The proposed approach is illustrated by several examples of numerical calculations.

**Key words:** complex domain flow, boundary element method, discrete vortex method, dipole, localization.

**Введение.** Развитие авиационной и ракетно-космической техники, многочисленные промышленные технологии, использующие гидро- или аэродинамические процессы, стимулируют постоянный интерес к гидродинамике сложных конфигураций. Задачи обтекания таких конфигураций, как правило, относят к задачам о течениях около неудобообтекаемых тел или к задачам гидродинамического взаимодействия. Сложность таких задач заключается не только в сложной форме области решения, но и в сложности гидродинамических процессов, которые наблюдаются в таких течениях. Классическая гидродинамика, равно как и аэродинамика, классифицирует течения как внешние и внутренние. Если первые из них преимущественно рассчитывались в рамках модели идеальной жидкости или теории вязко-невязкого взаимодействия (за редким исключением), внутренние же течения рассчитывались исключительно на основе уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса в зависимости от определяющих параметров. Для сложных конфигураций подобная классификация оказывается неудачной, так как в потоке одновременно могут присутствовать эффекты, присущие как одному, так и другому типу течений.

Наличие в течениях эффектов, имеющих существенно разные геометрические масштабы, приводит к значительным вычислительным сложностям при расчете традиционными численными методами конечных разностей и конечных элементов. Поэтому, для решения задач о течениях в сложных гидродинамических конфигурациях необходимо разрабатывать специальные численные подходы. В основу подобных подходов могут быть положены всевозможные комбинации существующих численных методов. Одним из принципов, положенных в основу рассматриваемых численных подходов является сегментация (декомпозиция) области течения, при этом для каждой подобласти выполняются специфические расщепления по физическим процессам. К сожалению, при всей привлекательности идея сегментации не может полностью решить рассматриваемую вычислительную проблему. Действительно, границы подобластей, как правило, неизвестны, то есть, сама сегментация представляет собой достаточно сложную, а иногда и трудноразрешимую проблему.

Альтернативным представляется подход, основанный на интегральном представлении поля течения. Интегральные представления с двухточечными ядрами слабо чувствительны к геометрическим размерам области, форме области и масштабам подобластей, в которых локализованы специфические эффекты, зато методы вычислительной теории потенциала чувствительны к размерам областей неоднородности дифференциальных уравнений. К сожалению, проблема эффективности метода граничных элементов остается неразрешимой в рамках указанного универсального подхода, поэтому приходится разрабатывать упрощенные схемы расчета, в том числе области постоянной завихренности, устойчивые вихревые структуры, например, вихри Хилла, дискретные особенности – вихри, источники, диполи. Полный анализ эволюции и взаимодействия таких объектов заменяется сценариями взаимодействия и эволюции, что также сокращает время счета. Более развернутый анализ таких попыток будет дан ниже, здесь же ограничимся выводом о том, что для решения задач гидро- и аэродинамики в областях сложной геометрической формы при наличии разнообразных гидродинамических эффектов необходима разработка специальных численных подходов, и одной из наиболее перспективных парадигм для развития таких подходов является вычислительная теория потенциала.

**Актуальность тематики исследования, ее связь с основными научно-техническими задачами.** Развитие авиационной и ракетно-космической техники, создание новых технологий в энергетике, металлургической и химической промышленности характеризуется постоянным усложнением гидродинамических и аэродинамических компоновок. Поскольку такие компоновки с трудом поддаются экспериментальному исследованию, а традиционные методы инженерного расчета для них, очевидно, неприменимы, единственным действенным подходом исследования подобных объектов является численное моделирование. Таким образом, прогресс в указанных областях, в значительной степени, зависит от уровня развития соответствующих средств численного моделирования. Однако и численные исследования рассматриваемых объектов сталкиваются с многочисленными трудностями, вызванными как сложностью объектов исследования, так и несовершенством и недостаточной эффективностью численных алгоритмов. Поэтому течения в сложных гидроаэродинамических компоновках следует рассчитывать в рамках упрощенных математических моделей при помощи специализированных численных методов. Разработка упомянутых моделей и методов оказывается принципиально необходимой для исследований гидро- и аэродинамики сложных компоновок, что и определяет актуальность данного исследования для развития гидроаэродинамики в целом. Указанные расчетные методики должны служить основой для совершенствования существующих и разработке новых авиационных и ракетно-космических систем, совершенствованию и развитию технологий в энергетике, металлургической и химической промышленности, которые относятся к важнейшим задачам развития современной техники.

**Обзор работ по рассматриваемой тематике и анализ современного состояния вопроса.** Поскольку расчет течений около сложных компоновок является естественным обобщением расчета течения около простых гидроаэродинамических объектов, то в качестве предыстории данного исследования можно рассматривать практически всю историю современной вычислительной гидромеханики. Понятно, что сколько-нибудь полный обзор работ по столь обширной тематике не может вместиться в ограниченные рамки настоящей статьи. К счастью, наличие фундаментальных монографий по вычислительной гидромеханике [1 – 4] избавляет от необходимости приводить подобный обзор, поэтому ограничимся только обзором обтекания сложных конфигураций. В классической гидромеханике в рамках модели потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости рассмотрено несколько задач гидродинамического взаимодействия, то есть задач о течениях в областях сложной геометрической формы, в том числе, задача о полиплане, в частности, биплане и тандеме [5], о подводном профиле [6], о глиссирующем крыле [5], о профиле над экраном [5]. Данное направление получило развитие в специализированной монографии [7]. Однако практически все аналитические решения, приведенные в перечисленных монографиях имеют чрезвычайно сложную структуру (они получены в рядах по специальным функциям, и сходимость этих рядов представляет собой достаточно сложную проблему), и применить эти решения в практических расчетах, вообще говоря, затруднительно. Поэтому, основным инструментом решения подобных задач являются численные методы. Однако и применение традиционных численных методов – метода конечных разностей и метода конечных элементов – к рассматриваемому классу задач также оказалось отнюдь не тривиальным. Для традиционных численных методов трудности возникали, прежде всего, с построением расчетной сетки – сложная форма области и возможные изменения конфигурации ее границ в ходе расчета, с одной стороны, не позволяют использовать несогласованные сетки, а, с другой стороны, делают построения согласованных сеток и расчет на них исключительно сложной задачей. В результате, в проблеме обтекания сложных конфигураций сложи-

лась несколько парадоксальная ситуация, когда было совершенно очевидно, как следует численно решать задачу, и было в наличии даже определенное программное обеспечение, но возможности вычислительной техники не позволяли получить приемлемые результаты. Расчеты, проведенные на грубых сетках, не могли обеспечить должной точности анализа «тонких» эффектов, которые возникают в такого рода задачах. Задачи обтекания сложных компоновок, например, самолета в полной компоновке, стали одним из основных объектов расчета на суперкомпьютерах, но и на этой мощной вычислительной технике удалось провести только отдельные расчеты указанного класса задач, о внедрении же массовых расчетов традиционными численными методами в инженерную практику речи нет до сих пор, хотя в этом направлении предпринимались значительные усилия [8 – 10].

В то же время, уже в начале 60-х годов XX века стала очевидной необходимость в разработке альтернативного численного метода, который превосходил бы традиционные методы по эффективности именно в областях сложной геометрической формы. Было также очевидно, что повышения эффективности такого метода можно достичь, в первую очередь, за счет упрощения математической модели, то есть, использования модели идеальной жидкости. В середине 60-х, когда большинство расчетов проводилось в рамках модели потенциального течения или, в лучшем случае, на основе уравнений Эйлера, такое ограничение казалось совершенно несущественным, хотя в настоящее время его принято считать крупным недостатком. В качестве основания альтернативного метода рассматривались разнообразные принципы: галеркинские и вариационные формулировки, теория потенциала, различные асимптотические и инженерные приближения. Хотя ни одну из таких попыток нельзя считать полностью успешной, ряд из них дал достаточно интересные и полезные результаты. По мнению авторов настоящей работы наиболее успешны попытки, основанные на теории потенциала, что было достаточно неожиданным. Действительно, теория потенциала является хорошо разработанным разделом математической физики, поэтому идея разработать численный метод, основанный на теории потенциала, возникала регулярно и также регулярно отвергалась из-за неэффективности, связанной с необходимостью решения больших систем линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей. И только с появлением в 60-е годы достаточно мощных электронно-вычислительных машин численная реализация теории потенциала оказалась возможной. Применение теории потенциала к задачам гидродинамики пошло по двум альтернативным направлениям. Первое – панельный метод, который восходит к работам Хесса [11; 12] и развит в ряде последующих работ [13 – 15]. Второе направление – предложенный С.М. Белоцерковским метод дискретных вихрей [16 – 18] (следует отметить, что подобная идея возникла и до С.М. Белоцерковского, например, Карман еще в 1926 году высказал близкую идею метода, но первая алгоритмическая реализация, безусловно, принадлежит С.М. Белоцерковскому), в США несколько позже аналогичный подход начал разрабатываться А. Чориним [19]. Однако А. Чорин позиционировал метод дискретных вихрей как средство расчета течений вязкой жидкости, в том числе и турбулентных, для чего помимо обычного детерминированного движения дискретных вихрей им приписывались еще и случайные блуждания. При всей элегантности идей А. Чорина подход, развиваемый научной школой С.М. Белоцерковского, в большей степени соответствовал потребностям аэродинамики именно потому, что ориентирован на расчет сложных компоновок. Метод дискретных вихрей был первым численным методом, позволившим рассчитать взаимодействие вихреобразований с элементами летательных аппаратов. В то же время, панельным методом были впервые рассчитаны пространственные компоновки дозвуковых летательных аппаратов, в том числе широкофюзеляжных самолетов фирмы «Боинг».

Следующим этапом развития вычислительной теории потенциала стало создание метода граничных элементов. История создания метода граничных элементов в обзорных монографиях [20; 21] трактуется по-разному, также нет однозначного мнения и о том, кто является создателем этого метода. Хотя метод граничных элементов идейно близок к панельному методу и может рассматриваться как обобщение последнего, метод граничных элементов, в первую очередь усилиями К. Бреббия, стали классифицировать как универсальный численный метод, альтернативный методам конечных разностей и конечных элементов. Развитие этого метода в научной школе К. Бреббия сопровождалось беспрецедентной в истории численных методов рекламной кампанией. Оценки тенденций развития метода граничных элементов, критика позиции К. Бреббия приведены в обзоре [22; 23], здесь же отметим только, что были предприняты значительные усилия для того, чтобы применить метод граничных элементов для расчета течений вязкой жидкости [20; 21; 24], но в этом случае пришлось ограничиться областями простой геометрической формы. По мнению авторов настоящей работы, трактовка К. Бреббия была, в значительной мере, неоправданной и задержала развитие численных методов теории потенциала для расчета сложных компоновок. Нельзя сказать, что совершенно не предпринимались попытки применить метод граничных элементов к рассматриваемому классу задач, пожалуй, дальше всех в этом плане продвинулась школа Дж. Ву [25 – 28] и школа Б. Ханга [29]. Но, несмотря на оригинальные формулировки и хорошо разработанную алгоритмическую базу, обе группы ориентировались на полные, а не упрощенные формулировки и не смогли в полной мере преодолеть проблему объемного потенциала.

Проблема объемного потенциала, столь остро стоящая в методе граничных элементов, в значительной степени разрешена в методе дискретных вихрей благодаря специфической дискретной аппроксимации поля завихренности. Несмотря на то, что методы граничных элементов и дискретных вихрей известны достаточно давно, а идея комбинированного метода совершенно очевидна, попытка развить такой метод предпринята относительно недавно [30; 31]. Комбинированный метод наряду с эффективностью метода граничных элементов в моделировании границ области течения обладает всеми возможностями метода дискретных вихрей в вопросах эффективного расчета эволюции поля завихренности внутри области течения. Особенно интересны возможности метода граничных элементов с интегрированием по реальной границе (без граничноэлементной аппроксимации границы области решения) [32; 33], который позволяет произвести достаточно точный расчет поля течения в непосредственной близости от границы области решения, на уровне точности, практически недостижимом для других численных методов.

Основным недостатком метода дискретных вихрей традиционно считается некорректная аппроксимация поля скоростей вблизи дискретного вихря. Для преодоления указанного недостатка предложены многочисленные схемы регуляризации [16 – 18] большинство из которых, к сожалению, лишено физического смысла и не имеет ничего общего с реальными полями течения (их единственным преимуществом является регулярное поле скоростей в отличие от сингулярного поля скоростей, присущего аппроксимации дискретными вихрями). С целью повышения эффективности и адекватности расчетов схемы регуляризации были обобщены введением понятия сценария [34]. При разработке сценариев, а в основу их разработки могут быть положены как теоретические соображения, так и численный расчет, учитывается намного больше факторов, чем при разработке схем регуляризации и, тем самым, лучше обеспечивается физическая адекватность. В то время, как схема регуляризации предполагает понижение сингулярности, в сценариях возможно и повышение порядка сингулярности; например, замена близкорасположенных вихрей разного знака комбинацией вихря и вихревого диполя.

**Цель работы.** Основываясь на вышеизложенном, её можно сформулировать как разработку в рамках вычислительной теории потенциала на основе комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей методики расчета течений жидкости и газа при достаточно больших числах Рейнольдса и достаточно малых числах Маха в многосвязных областях сложной геометрической формы, соответствующих обтеканию сложных компоновок и внутренним течениям в сложных гидродинамических и аэродинамических системах. Для достижения указанной цели необходимо не только разработать соответствующие алгоритмы, но и сформулировать и численно решить достаточно полный набор модельных задач, на основании решения которых возможна разработка сценариев.

**Постановка задачи.** Как и в предыдущих работах авторов [30; 31], сформулируем задачу о течении несжимаемой жидкости в терминах «функция тока – завихренность»:

$$\Delta \bar{\psi} = -\bar{\omega}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{\omega} \times \bar{V}) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\omega}, \quad (2)$$

где  $\bar{\psi}$  – функция тока;  $\bar{\omega}$  – завихренность;  $\bar{V} = \text{rot} \bar{\psi}$  – скорость жидкости;  $t$  – время;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса. Отметим, что уравнения (1) и (2) записаны, вообще говоря, для пространственного случая, когда функция тока – вектор, в плоском же случае уравнения (1), (2) заметно упрощаются, в частности, функция тока является скаляром и, соответственно, уравнение (1) – скалярным, уравнение (2) также упрощается. В случае использования модели идеальной жидкости уравнение (1) сохраняется, а уравнение (2) следует заменить на

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{\omega} \times \bar{V}) = 0. \quad (3)$$

В дальнейшем будет рассматриваться случай плоского течения (пространственный случай требует специальной алгоритмической разработки из-за специфической формы граничных условий, хотя, в принципе, изложенный ниже подход справедлив и для пространственного случая). Граничные условия сформулируем для плоского случая: условие прилипания на твердых стенках и заданная скорость на входных границах:

$$V|_{\Gamma} = V_S, \quad (4)$$

Спроектировав условие (4) на нормаль и касательную, получим:

$$V_n|_{\Gamma} = V_{Sn}, \quad (5)$$

$$V_{\tau}|_{\Gamma} = V_{S\tau}. \quad (6)$$

Условие (5) справедливо и для случая идеальной жидкости. Так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma} = V_{S\tau}|_{\Gamma}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\Gamma} = V_{Sn}|_{\Gamma}, \quad (8)$$

то получим

$$\psi|_{\Gamma} = \psi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} V_n(\tau)|_{\Gamma} d\tau. \quad (9)$$

Если твердая стенка неподвижна ( $V_{Sn}|_{\Gamma} = 0$ ), то  $\psi = \text{const}$ , если скорость жидкости постоянна, например, на входной границе, то функция тока на этой границе изменяется линейно. Величина  $\psi_0$ , входящая в соотношение (9), представля-

ет собой аддитивную постоянную, с точностью до которой определяется функция тока, интегрирование в (9) производится вдоль кривой  $\Gamma$  от точки с внутренней координатой  $\tau_0$  до точки с внутренней координатой  $\tau$ . В вычислительной гидромеханике вязкой жидкости обычно стараются переформулировать одно из условий (7), (9) для завихренности  $\omega$ , но в данной работе это делаться не будет.

**Интегральная формулировка задачи.** Рассмотрим, в первую очередь, интегральный аналог уравнения (1) [30; 31]

$$\begin{aligned} \chi(x_0, y_0)\psi(x_0, y_0) = & \int_{\Gamma} \varphi(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n} dS - \\ & - \int_{\Gamma} \psi(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y, x_0, y_0)}{\partial n} dS + \iint_D \omega(x, y) \varphi(x, y, x_0, y_0) dx dy, \end{aligned} \quad (10)$$

где, как и в [30; 31]

$$\chi(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & (x_0, y_0) \in D, \\ 1/2, & (x_0, y_0) \in \Gamma, \\ 0, & (x_0, y_0) \notin D, (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases} \quad (11)$$

$\varphi$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad (12)$$

впрочем, вместо фундаментального решения в уравнении (10) могут быть использованы и соответствующие функции Грина.

В упомянутых работах [30; 31] для построения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей была использована следующая аппроксимация поля завихренности

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (13)$$

благодаря которой интегральное соотношение (10) существенно упрощалось:

$$\begin{aligned} \chi(x_0, y_0)\psi(x_0, y_0) = & \int_{\Gamma} \varphi(x, y, x_0, y_0) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n} dS - \\ & - \int_{\Gamma} \psi(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y, x_0, y_0)}{\partial n} dS + \sum_{i=1}^M \omega_i \varphi(x_i, y_i, x_0, y_0). \end{aligned} \quad (14)$$

В тех же работах [30; 31] было указано на возможность дополнения интегральных соотношений (14) системой дискретных диполей или другими дискретными сингулярностями. В настоящей работе для построения численного алгоритма используем подход, предложенный в [22; 23], в соответствии с которым поле завихренности представляется как совокупность взаимодействующих независимых вихревых объектов, тогда

$$\iint_D \omega(x, y) \varphi(x, y, x_0, y_0) dx dy = \sum_{i=1}^M \int_{D_i} \omega_i(x, y) \varphi(x, y, x_0, y_0) dx dy, \quad (15)$$

где области  $D_i$ , вообще говоря, могут не полностью покрывать область  $D$  и пересекаться друг с другом. Относительно распределения завихренности внутри объекта могут быть сделаны самые разнообразные предположения, включая представление (13) или предположение  $\omega_i = const$ . Отметим, что интенсивности дискретных вихрей в (13), вообще говоря, могут зависеть от времени, но физическая природа такой зависимости остается неясной, поэтому, как правило, принимают  $\partial \omega_i / \partial t = 0$ , а зависимость функции тока от времени в (14) реализуется через возможную не-

стационарность граничных условий и изменения координат дискретных вихрей  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ . В случае представления (15) ситуация принципиально иная, здесь вихревые объекты во многом подобны вихревым частицам из одноименного метода и могут не только перемещаться, но и эволюционировать. Сам принцип выбора вихревого объекта должен предполагать максимальную устойчивость этого вихреобразования (дискретный вихрь, например, обладает абсолютной устойчивостью – он не эволюционирует вообще), что налагает определенное ограничение на его эволюцию. Очевидной идеей предполагаемого подхода является расщепление движения объекта и его эволюции как физических процессов. Движение объекта опишем традиционными уравнениями:

$$\dot{x}_i = u(x_i, y_i), \dot{y}_i = v(x_i, y_i), i = \overline{1, M}, \quad (16)$$

где  $u$  и  $v$  – компоненты вектора скорости, определяемые из (10) путем параметрического дифференцирования по формулам:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y_0}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x_0}. \quad (17)$$

Уравнения (16) должны быть дополнены соответствующими начальными условиями. При использовании аппроксимации (13) выбор точки  $(x_i, y_i)$  оказывается очевиден и однозначен, однако при использовании представления (15) очевидно только, что  $(x_i, y_i) \in D_i$ . Если область  $D_i$  достаточно мала, то выбор внутри нее точки  $(x_i, y_i)$ , которую будем называть центром  $i$ -го объекта, не оказывает существенного влияния на решение задачи. В классическом методе дискретных вихрей предполагается, что вихрь не индуцирует скорость в точке, где он в данный момент находится. Естественно было бы распространить это предположение на аппроксимацию (15), (строго говоря, подобное условие является необязательным для регулярных и интегрируемых распределений завихренности в (15), но оно является важным моментом расщепления и значительно упрощает алгоритм). Тогда следует выбрать положение точки  $(x_i, y_i)$  как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = \int_{D_i} \omega_i(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, y, x_i, y_i) dx dy, \\ 0 = \int_{D_i} \omega_i(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(x, y, x_i, y_i) dx dy. \end{cases} \quad (18)$$

В случае знакопостоянной функции  $\omega_i$  из физических соображений очевидно, что уравнение (18) имеет хотя бы одно решение  $(x_i, y_i) \in D_i$ , в случае же знакопеременной функции этого утверждать нельзя. Если вблизи объекта не находится других объектов, то он движется согласно уравнению (11), то есть, как дискретный вихрь. Но в тоже время объект эволюционирует. Эволюцию объекта опишем так называемыми сценариями эволюции – расчетными схемами, позволяющими определить его эволюцию в предположении, что другие объекты на него не действуют.

Когда объекты находятся на малых расстояниях друг от друга, следует применять сценарии взаимодействия. Подход, основанный на понятии сценария, позволяет не проводить расчет эволюции или взаимодействия многократно, а просчитать их только один раз для каждого типа объекта.

Рассмотрим примеры простых объектов. Возьмем точку  $(x_0, y_0)$  достаточно далеко от объекта  $D_i$  и разложим подынтегральную функцию в ряд в окрестности точки  $(x_i, y_i)$ , удержав члены вплоть до первого порядка малости.



Тогда:

$$\begin{aligned}
 \int_{D_i} \omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0) dx dy &= \int_{D_i} \{\omega_i(x_i, y_i) \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} [\omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0)] \Big|_{(x, y) = (x_i, y_i)} (x - x_i) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} [\omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0)] \Big|_{(x, y) = (x_i, y_i)} (y - y_i)\} dx dy = \\
 &= \omega_i(x_i, y_i) S_i \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) + \frac{\partial \omega_i(x_i, y_i)}{\partial x_i} \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) \int_{D_i} (x - x_i) dx dy + \\
 &+ \frac{\partial \omega_i(x_i, y_i)}{\partial y_i} \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) \int_{D_i} (y - y_i) dx dy + \\
 &+ \omega_i(x_i, y_i) \frac{\partial \phi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial x_i} \int_{D_i} (x - x_i) dx dy + \\
 &+ \omega_i(x_i, y_i) \frac{\partial \phi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial y_i} \int_{D_i} (y - y_i) dx dy,
 \end{aligned} \quad (19)$$

где  $S_i$  – площадь объекта  $D_i$ .

Первый член в правой части соотношений (19) полностью соответствует классической аппроксимации метода дискретных вихрей (13) (если под  $\omega_i$  в (14) понимать  $\omega_i(x_i, y_i) S_i$ ), второй и третий члены отражают вихревой эффект, вызванный неравномерным распределением завихренности, четвертый и пятый члены представляют собой диполи, которые имеют место при любом ненулевом распределении завихренности. Конечно, поскольку геометрические размеры объекта  $D_i$ , вообще говоря, малы, то первый член намного больше остальных. Из интегральных соотношений очевидно, что для использования дискретно-вихревой аппроксимации в расчетах дальнего поля в (14) следует выбрать в качестве интенсивности вихря суммарную завихренность

$$\omega_i = \int_{D_i} \omega_i(x, y) dx dy, \quad (20)$$

то есть, первые три члена в (19) следует заменить одним дискретным вихрем интенсивности (20). С другой стороны, если

$$\begin{aligned}
 x_i &= \frac{1}{S_i} \int_{D_i} x dx dy, \\
 y_i &= \frac{1}{S_i} \int_{D_i} y dx dy,
 \end{aligned} \quad (21)$$

то последние четыре члена в (19) обнуляются, и в (19) остается только первый член, соответствующий дискретному вихрю. Чтобы обеспечить согласование этого подхода и интенсивности, представленной равенством (20), следует выбрать точку  $(x_i, y_i)$  так, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению

$$\omega_i(x_i, y_i) = \frac{1}{S_i} \int_{D_i} \omega_i(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Соответствие условий определения точки  $(x_i, y_i)$  (18), (21), (22) можно обеспечить только для ограниченного числа простейших распределений завихренности

ти, обладающих высокой степенью симметрии (круглая область постоянной завихренности, круглая область с центральносимметричным распределением завихренности, вихревое кольцо). В общем же случае только малость объекта  $D_i$ , а соответственно и малые различия в положениях точки  $(x_i, y_i)$ , определяемых по разным критериям, обеспечивает корректность подхода. Отметим, что, если пренебречь проблемой выбора точки  $(x_i, y_i)$ , то основной вывод, сделанный из представления (19), может быть получен намного проще, для этого достаточно разложить в окрестности точки  $(x_i, y_i)$  только фундаментальное решение, тогда:

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \omega_i(x, y) \varphi(x, y, x_0, y_0) dx dy &= \varphi(x_i, y_i, x_0, y_0) \int_{D_i} \omega_i(x, y) dx dy + \\ &+ \frac{\partial \varphi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial x_i} \int_{D_i} \omega_i(x, y) (x - x_i) dx dy + \\ &+ \frac{\partial \varphi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial y_i} \int_{D_i} \omega_i(x, y) (y - y_i) dx dy, \end{aligned} \quad (23)$$

откуда очевидно следуют все сделанные выше выводы относительно структуры интегрального представления.

Как в (19), так и в (23) дипольный эффект представляет собой величину следующего порядка малости и вызван распределением завихренности по области  $D_i$ , при этом дипольный эффект, вообще говоря, устраним. Однако при существенных градиентах завихренности (например, когда на относительно малом расстоянии находятся вихреобразования разных знаков) избежать появления диполей не удастся. В качестве примера такой ситуации рассмотрим классический пограничный слой.

Введем в пограничном слое продольную  $l$  и поперечную  $\eta$  координаты, обозначив продольную скорость через  $u$  [35]. Легко показать, что

$$\omega(\eta, l) = \frac{\partial u(\eta, l)}{\partial \eta}. \quad (24)$$

Очевидно, что

$$\int \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = u(\delta) = \omega(l), \quad (25)$$

где  $\delta$  – координата внешней границы пограничного слоя,  $\omega(l)$  – с точностью до знака проинтегрированная в поперечном направлении вихревая интенсивность пограничного слоя. Рассмотрим вклад пограничного слоя в общую структуру функции тока, по аналогии с (23) разложив в ряд Тейлора только фундаментальное решение в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0) dx dy &= \int_{l_{1i}}^{l_{2i}} \int_0^\delta \frac{\partial u(\eta, l)}{\partial \eta} \left[ \phi(\eta, l, x_0, y_0) \Big|_{\eta=0} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \phi(\eta, l, x_0, y_0)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \eta \right] d\eta dl = \\ &= \int_{l_{1i}}^{l_{2i}} \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) \omega(l) dl + \int_{l_{1i}}^{l_{2i}} \frac{\partial \phi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial \eta} \int_0^\delta \frac{\partial u(\eta, l)}{\partial \eta} \eta d\eta dl, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $l_{1i}, l_{2i}$  – продольные координаты концов  $i$ -го участка пограничного слоя.

Преобразуем последний интеграл в (26) по формулам интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \frac{\partial u(\eta, l)}{\partial \eta} \eta d\eta &= u\eta \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} u d\eta = u(\delta)\delta - \int_0^{\delta} u d\eta = \\ &= \int_0^{\delta} (u(\delta) - u) d\eta = u(\delta) \int_0^{\delta} \frac{u(\delta) - u}{u(\delta)} d\eta = h(l)\omega(l), \end{aligned} \quad (27)$$

где величина  $h$  – хорошо известная в теории пограничного слоя толщина вытеснения, откуда

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0) dx dy &= \int_{l_i}^{l_{2i}} \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) \omega(l) dl + \\ &+ \int_{l_i}^{l_{2i}} \frac{\partial \phi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial \eta} \omega(l) h(l) dl. \end{aligned} \quad (28)$$

В правой части (28) первый член представляет собой влияние вихревой пелены на функцию тока, а второй – аналогичное влияние дипольной пелены. Поскольку толщина вытеснения  $h$  имеет порядок толщины пограничного слоя  $\delta$ , то есть, достаточно мала, то второй член правой части (28) вдали от пелены имеет более высокий порядок малости, чем первый, а если учесть еще и более быстрое затухание влияния диполя, то вдали от пелены влиянием дипольной ее составляющей часто можно пренебречь, чего нельзя утверждать для точек, лежащих достаточно близко к пелене.

Рассмотрим след за удобообтекаемым телом. Такой след образуется при слиянии двух пограничных слоев, плавно сходящихся с нижней и верхней поверхности достаточно тонкого тела, обтекаемого под достаточно малым углом атаки. По аналогии с (28) после несложных преобразований получим

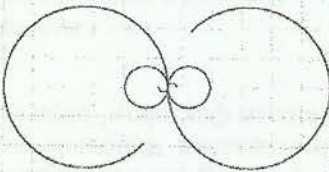
$$\begin{aligned} \int_{D_i} \omega_i(x, y) \phi(x, y, x_0, y_0) dx dy &= \int_{l_i}^{l_{2i}} \phi(x_i, y_i, x_0, y_0) (\omega_1(l) + \omega_2(l)) dl + \\ &+ \int_{l_i}^{l_{2i}} \frac{\partial \phi(x_i, y_i, x_0, y_0)}{\partial \eta} (\omega_1(l) h_1(l) - \omega_2(l) h_2(l)) dl, \end{aligned} \quad (29)$$

где индексы «1» и «2» указывают на принадлежность к одному из сходящихся пограничных слоев. Рассмотрим представление (29) подробнее. Поскольку  $\omega_1$  и  $\omega_2$  имеют разные знаки, что очевидно из физических соображений, а величины их достаточно близки друг к другу, что следует из предположений о тонкости тела и малом угле атаки, сделанных выше, то интенсивность вихревой пелены может оказаться малой в сравнении с интенсивностью дипольной пелены. Рассмотрим предельный случай симметричного профиля под нулевым углом атаки. В этом случае интенсивность вихревой пелены равна 0, а дипольная пелена может иметь достаточно существенную интенсивность. Как известно, в процессе движения вихревая пелена сворачивается в спираль [16 – 19], в то же время дипольная пелена сворачивается в кольцо. Таким образом, в следе существует два механизма неустойчивости, и второй (дипольный) механизм неустойчивости объясняет неустойчивость следа в последнем рассматриваемом случае, когда первый механизм неустойчивости не действует.

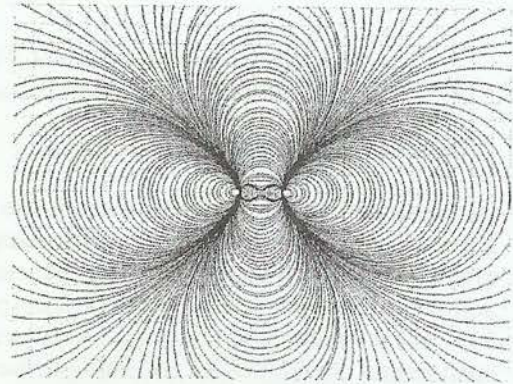
**Анализ полученных результатов.** Как отмечалось выше, настоящая работа продолжает цикл работ авторов, в которых развивается понятие локализованного объекта. Основным предметом рассмотрения данной работы были вихревые и

дипольные эффекты, а также их взаимодействие и влияние на структуру течения. Удалось показать, что дипольные эффекты могут возникнуть при аппроксимации поля завихренности в вычислительной теории потенциала как результат учета распределения завихренности по площади (объему) объекта. На приведенных ниже примерах показано, когда дипольные эффекты существенны, а когда нет.

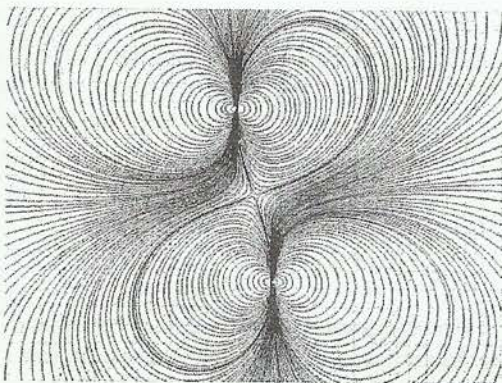
Получены результаты численного расчета эволюции ряда дипольно-вихревых структур в ограниченных и неограниченных областях различной формы. Из этих результатов, например, видно (рис. 1 – 3), что диполи с противоположно направленными осями движутся по траекториям, которые представляют из себя касающиеся окружности, причем в окрестности точки касания траекторий такая структура является неустойчивой.



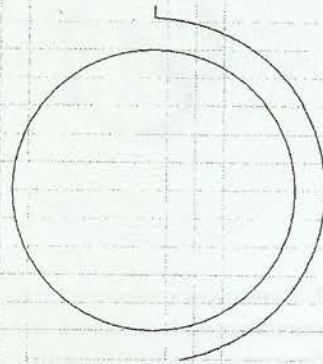
**Рис. 1.** Траектории движения двух вихревых диполей, одинаковой интенсивности, с постоянной горизонтальной осью в неограниченной области



**Рис. 2.** Линии тока течения в неограниченной области, вызванного двумя вихревыми диполями, равной интенсивности, с постоянной горизонтальной осью (соответствует рис. 1 в момент времени  $t = 0$ )



**Рис. 3.** Линии тока течения в неограниченной области, вызванного двумя вихревыми диполями, равной интенсивности, с постоянной горизонтальной осью (соответствует рис. 1 в момент времени  $t = 10$ )



**Рис. 4.** Траектория движения диполя с постоянной осью около твердой стенки

Часть проведенных расчетов посвящена анализу течения, возникающего при движении диполя около твердой стенки (рис. 4 – 6). В этом случае вблизи стенки наблюдается саморазгон диполя. Кроме того, как видно из рисунков 5 и 6, около стен-

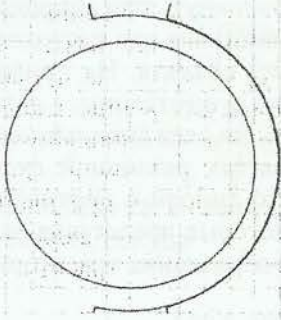


Рис. 5. Траектории движения вблизи кругового контура пары диполей с одинаково направленными осями

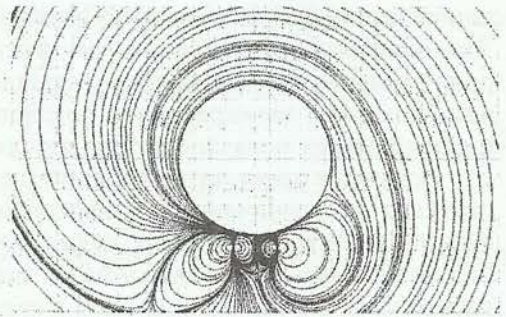


Рис. 6. Картина линий тока течения, вызванного движением возле круглой стенки двух диполей с одинаково направленными осями

ки экранный эффект является наиболее существенным фактором, оказывающим влияние на характер течения. Примеры взаимодействия дипольно-вихревых структур в замкнутой области приведены на рис. 7 – 15. Показано влияние диполей на устойчивость вихревых структур и приведены примеры устойчивых (рис. 11 – 12) и неустойчивых (рис. 7 – 10) структур. Отмечено, что наличие в потоке симметрии способствует сохранению устойчивых режимов течения. Следует также отметить, что устойчивые «как облако» конструкции (рис. 13 – 16) при наличии симметрии тоже сохраняют указанный тип устойчивости. Некоторые примеры течений в многосвязных областях изображены на рис. 17 – 22.

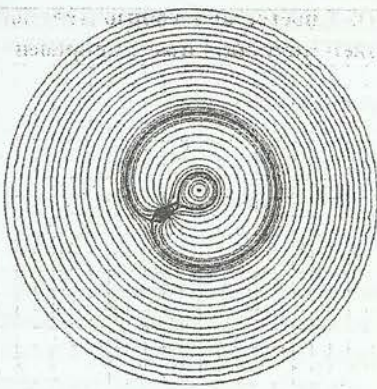


Рис. 7. Линии тока течения, вызванного наличием вихря и диполя в замкнутой области в момент времени  $t = 0$

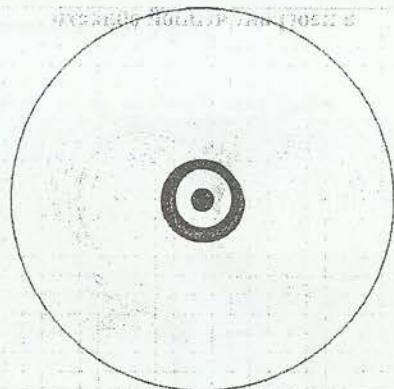


Рис. 8. Линии тока течения, вызванного наличием вихря и диполя в замкнутой области в момент времени  $t = 10$

Следует отметить, что дипольно-вихревые схемы представляют собой лишь одно из направлений разработки сценариев эволюции и взаимодействия объектов. В качестве объектов могут выступать и малые тела, и области включения иной фазы, и различные локализованные процессы в потоке, в том числе химические реакции и силовые воздействия на поток. Каждый из указанных типов объектов требует отдельного исследования; но уже полученные результаты позволяют ожидать, что рассматриваемый подход даст возможность развить высокоэффективные алгоритмы расчета широкого круга течений ньютоновских

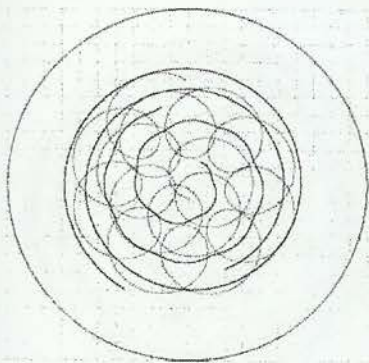


Рис. 9. Лінії тока течення, вызванного вихревою парой и диполем в круговой області  $t = 0$

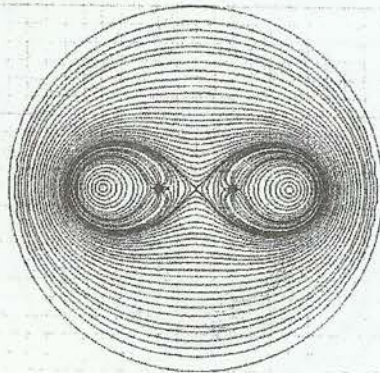


Рис. 10. Потеря устойчивости вихревой пары под действием диполя  $t = 100$

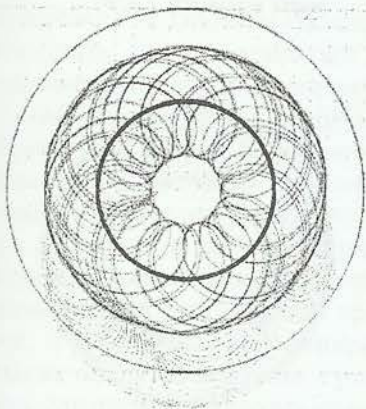


Рис. 11. Лінії тока течення, вызванного вихревою парой и двумя диполями в круговой області в момент времени  $t = 0$

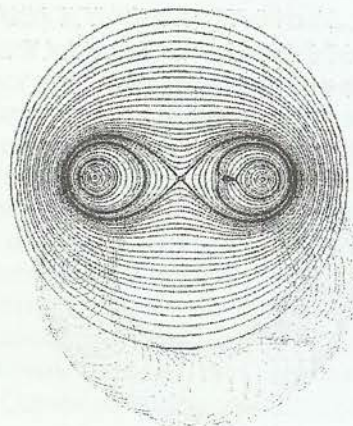


Рис. 12. Траектории движения двух диполей и двух вихрей в круге в момент времени  $t = 150$

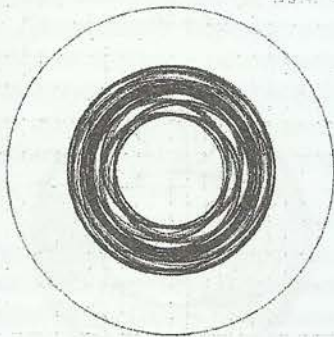


Рис. 13. Траектории движения восьми вихрей в круговой области в момент времени  $t = 90$

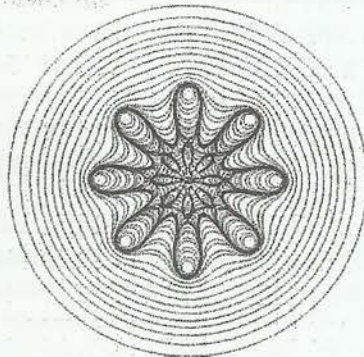


Рис. 14. Картина линий тока течення, вызванного наличием восьми диполей и восьми вихрей в круговой области в момент времени  $t = 0$

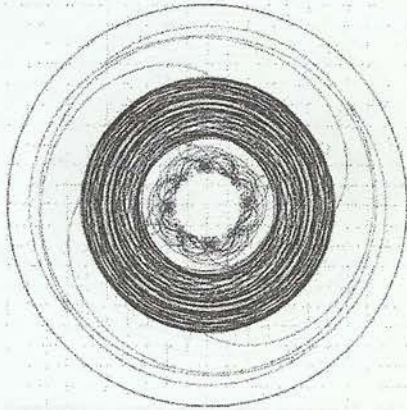


Рис. 15. Траектории движения восьми диполей и восьми вихрей в круговой области в момент времени  $t = 90$

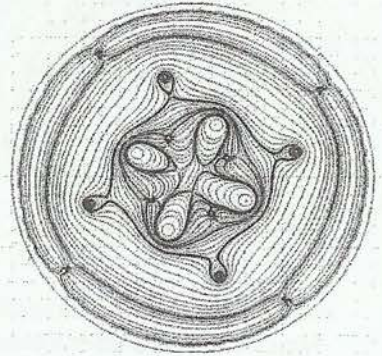


Рис. 16. Картина линий тока течения, вызванного наличием восьми диполей и восьми вихрей в круговой области в момент времени  $t = 90$

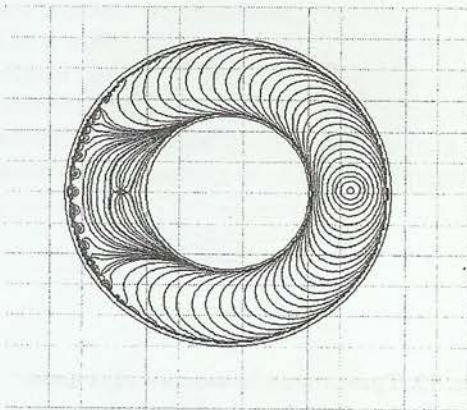


Рис. 17. Картина линий тока течения, вызванного наличием диполя и вихря в двусвязной области в момент времени  $t = 0$

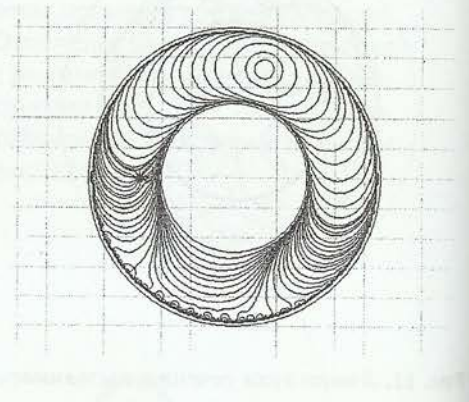


Рис. 18. Картина линий тока течения, вызванного наличием диполя и вихря в двусвязной области в момент времени  $t = 50$

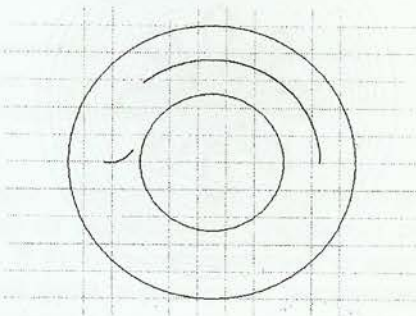


Рис. 19. Сепарация диполя на внутреннюю границу двусвязной области в поле течения, индуцируемого вихрем

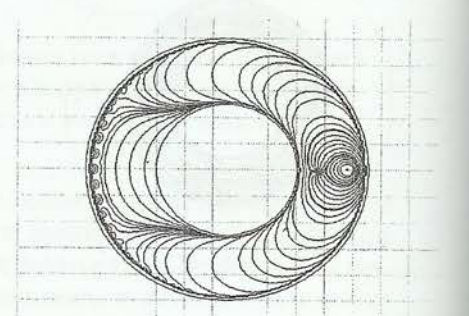


Рис. 20. Картина линий тока течения, вызванного дипольно-вихревой структурой в двусвязной области

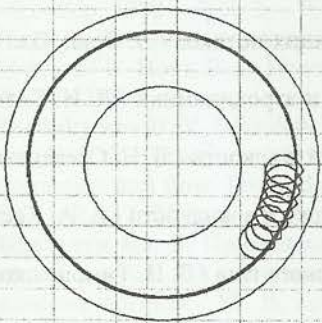


Рис. 21. Траектории движения дипольно-вихревой структуры в двусвязной области

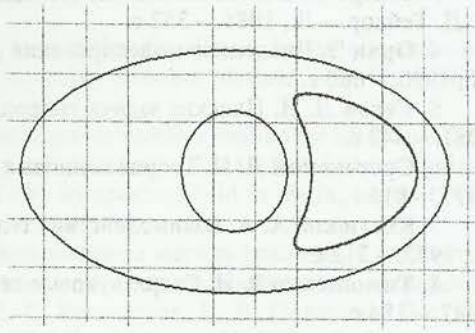


Рис. 22. Траектория движения вихря в двусвязной области

жидкостей. Несмотря на то, что разработанная на сегодняшний день библиотека сценариев еще весьма ограничена, приведенные выше расчеты также свидетельствуют о достаточно высокой эффективности предложенных алгоритмов. По мере увеличения библиотеки сценариев эффективность и точность алгоритмов должны возрастать, как и расширяться классы задач, для которых возможно эффективное решение комбинированным методом граничных элементов и дискретных вихрей.

**Выводы.** Помимо сделанного выше вывода об эффективности методов дискретных вихрей и дискретных диполей, относящихся к группе алгоритмов, называемых методами локализованных объектов, необходимо сделать обобщающий вывод о перспективности комбинированных эйлера-лагранжевых подходов для расчета нестационарных течений в областях сложной геометрической формы. Сочетая высокую точность при моделировании основного потока (особенно при расчете методом граничных элементов), присущую эйлеровым методам, с гибкостью в моделировании подвижных материальных и кинематических объектов в потоке, присущей лагранжевым методам, они позволяют развить алгоритмы с уникальными свойствами. Одним из основных достоинств такого подхода является то, что он нечувствителен к геометрическим размерам объектов и позволяет рассчитывать разномасштабные эффекты, что практически недоступно традиционным сеточным методам.

Использование дипольно-вихревых моделей показывает, что, как и не странно это звучит, регуляризация может быть достигнута не только путем понижения порядка сингулярности, но и путем его повышения.

Дальнейшие перспективы данной работы совершенно очевидны. В теоретическом плане – расширение и уточнение библиотеки сценариев, а в области практических приложений – создание нового высокоэффективного прикладного программного обеспечения для численного решения задач промышленной гидроаэродинамики, гидроаэродинамики транспортных средств и гидротехнических сооружений.

Следует отметить, что предложенные в настоящей работе численные алгоритмы имеют намного меньше ограничений по сложности формы областей и сложности структуры течения, нежели традиционные численные алгоритмы, что делает их особенно привлекательными для сложных задач.

#### Библиографические ссылки

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М., 1991. – Т. 1. – 504 с.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. – М., 1991. – Т. 2 – 552 с.



3. **Пейре Р.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. – Л., 1986. – 352 с.
4. **Оран Э.** Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. – М., 1990. – 660 с.
5. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М., 1981. – 448 с.
6. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. – М., 1977. – 816 с.
7. **Костюков А. А.** Взаимодействие тел, движущихся в жидкости / А. А. Костюков. – Л., 1972. – 312 с.
8. **Тимошенко В. И.** Сверхзвуковые течения вязкого газа / В. И. Тимошенко. – Киев, 1987. – 184 с.
9. **Anderson J. D.** Hypersonic and high temperature gas dynamics / J. D. Anderson. – New York, 1989. – 690 p.
10. **Anderson J. D.** Modern compressible flow / J. D. Anderson. – New York, 1990. – 652 p.
11. **Hess J. L.** Calculation of potential flow about arbitrary bodies / J. L. Hess, A. M. O. Smith // Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8 (D. Kuchemman, Ed.). – London, 1967. – P. 1–138.
12. **Hess J. L.** Calculation of potential flow about bodies of revolution tuning axes perpendicular to the free stream direction / J.L. Hess // J. Aerospace Sci. 29, 726. – 1962.
13. **Morino L.** Subsonic potential aerodynamics for complex configurations: a general theory / L. Morino, C. T. Kuo // AIAA J., 1974, v.12, No.2. – P. 191–197.
14. **Johnson F. T.** A higher order panel method for general analysis and design applications in subsonic flow / F. T. Johnson, F. E. Ehlers, P. E. Rubbert // Proc. Fifth Int. Conf. Num. Meth. In Fluid Dynamics. Twente University, Enschede, Holland; Lecture Notes in Physics. Vol. 59. – Berlin and New York, 1976.
15. **Johnson F. T.** Advanced panel-type influence coefficient methods applied to subsonic flows / F. T. Johnson, P. E. Rubbert // AIAA Paper, No. 75-50, January 1975.
16. **Белоцерковский С. М.** Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей / С. М. Белоцерковский, А. С. Гиневский. – М., 1995. – 368 с.
17. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, П. М. Федоров. – М., 1988. – 309 с.
18. **Белоцерковский С. М.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М., 1985. – 256 с.
19. **Chorin A. J.** Vorticity and Turbulence / A. J. Chorin. – Berlin, New York, 1994. – 312 p.
20. **Бенерджи П.** Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.
21. **Бреббия К.** Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.
22. **Поляков Н. В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 2006. – №2/1. – С. 7–23.
23. **Поляков Н. В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 2. Нелинейные задачи / Н. В. Поляков, Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 2006. – №2/1. – С. 25–42.
24. **Onishi K.** On Non-Linear Heat Transfer Problems / K. Onishi, J. Kuroki // Dev. Boundary Element Method. Vol. 4. – Swansea, Wales, 1986. – P. 149–190.
25. **Wu J. C.** Numerical Solutions of Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations using an Integro-Differential Formulation / J. C. Wu, J. F. Thompson // Computers and Fluids. – 1973. – Vol. 1, № 1. – P. 197–215.
26. **Wu J. C.** Numerical Solution of Viscous Flow Equation using Integral Representations / J. C. Wu, M. M. Wahbah // Lecture Notes in Physics. – Berlin, 1976. – Vol. 59. – 116 p.
27. **Wu J. C.** Integral Representation Approach for Time Dependent Viscous Flow / J. C. Wu, Y. M. Rizk // Lecture Notes in Physics. – Berlin, 1978. – Vol. 90. – P. 558–564.

28. Wu J. C. Problems of General Viscous Flow / J. C. Wu // Dev. Boundary Element Method, – London, 1982. – Vol. 2. – P. 69–111.

29. Hunt B. The indirect boundary integral formulation for elliptic, hyperbolic and non-linear fluid flows / B. Hunt, B. L. Hewitt // Dev. Boundary Element Method. – Berlin, 1986. – Vol. 4. – P. 227–339.

30. Yevdokymov D. V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D. V. Yevdokymov // D. Durban and A.R.J. Pearson (Eds.) // Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17–21 March, 1997. – P. 217–230.

31. Бразалук Ю. В. Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Харьковского национального университета. Серия: «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – Вып. 1, № 590. – С. 55–60.

32. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 1999. – Вип. 2, т. 1. – С. 150–156.

33. Бевза Э. К. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Херсон, 2001. – С. 51–55.

34. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to some multiphase flows / D. V. Yevdokymov // Tenth International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems. Shresh, Israel, 30 June – 4 July 2003. – P. 50–51.

35. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М., 1974. – 712 с.

*Надійшла до редколегії 27.12.2012.*

УДК 532.5

**В. А. Катан**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

## **УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИ УДАРЕ С ВРАЩЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ОТРЫВА**

Розглянуто задачу про ударну взаємодію з відривом нестисливої рідини та горизонтальної пластини, що плаває на її вільній поверхні при наявності обертання. Поставлену задачу зведено до задачі Келдиша-Седова. Досліджено течії при різних співвідношеннях значень поступальної та кутової швидкостей.

**Ключові слова:** удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Седова.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и горизонтальной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова. Исследованы течения при различных соотношениях значений поступательной и угловой скоростей.

**Ключевые слова:** удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, задача Келдыша-Седова.

The problem of the impact of incompressible fluid and the horizontal plate on free surface is considered. The solution is received as a result by the Keldish-Sedov's problem.

**Key words:** impact of incompressible fluid and the solid of revolution on free surface, the Keldish-Sedov's problem.