

28. Wu J. C. Problems of General Viscous Flow / J. C. Wu // Dev. Boundary Element Method, – London, 1982. – Vol. 2. – P. 69–111.

29. Hunt B. The indirect boundary integral formulation for elliptic, hyperbolic and non-linear fluid flows / B. Hunt, B. L. Hewitt // Dev. Boundary Element Method. – Berlin, 1986. – Vol. 4. – P. 227–339.

30. Yevdokymov D. V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D. V. Yevdokymov // D. Durban and A.R.J. Pearson (Eds.) // Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17–21 March, 1997. – P. 217–230.

31. Бразалук Ю. В. Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Харьковского национального университета. Серия: «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – Вып. 1, № 590. – С. 55–60.

32. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 1999. – Вип. 2, т. 1. – С. 150–156.

33. Бевза Э. К. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики / Э. К. Бевза, Д. В. Евдокимов // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Херсон, 2001. – С. 51–55.

34. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to some multiphase flows / D. V. Yevdokymov // Tenth International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems. Shores, Israel, 30 June – 4 July 2003. – P. 50–51.

35. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М., 1974. – 712 с.

*Надійшла до редколегії 27.12.2012.*

УДК 532.5

**В. А. Катан**

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

## **УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПРИ УДАРЕ С ВРАЩЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ОТРЫВА**

Розглянуто задачу про ударну взаємодію з відривом нестисливої рідини та горизонтальної пластини, що плаває на її вільній поверхні при наявності обертання. Поставлену задачу зведено до задачі Келдиша-Седова. Досліджено течії при різних співвідношеннях значень поступальної та кутової швидкостей.

**Ключові слова:** удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Седова.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и горизонтальной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова. Исследованы течения при различных соотношениях значений поступательной и угловой скоростей.

**Ключевые слова:** удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, задача Келдыша-Седова.

The problem of the impact of incompressible fluid and the horizontal plate on free surface is considered. The solution is received as a result by the Keldish-Sedov's problem.

**Key words:** impact of incompressible fluid and the solid of revolution on free surface, the Keldish-Sedov's problem.





Учитывая это условие, приходим к условию для компоненты скорости  $v_x$ :

$$v_x = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{Ox} = 0.$$

Перейдем в комплексную плоскость  $xOy$   $z = x + iy$  и введем функцию

$$\Omega = i \frac{dw}{dz} = v_y + iv_x,$$

для которой будем иметь задачу Келдыша-Седова в верхней полуплоскости  $\text{Im } z \geq 0$  (рис. 2). На границе  $CB$  задана ее действительная часть

$$\text{Re } \Omega|_{CB} = V_0 + \omega_z x,$$

или

$$\text{Re } \Omega|_{CB} = \text{Re}(V_0 + \omega_z z),$$

а на границах  $A_{-\infty}D$ ,  $DC$ ,  $BA_{+\infty}$  известна ее мнимая часть, а именно:

$$\text{Im } \Omega|_{A_{-\infty}D} = 0, \text{Im } \Omega|_{DC} = 0, \text{Im } \Omega|_{BA_{+\infty}} = 0.$$

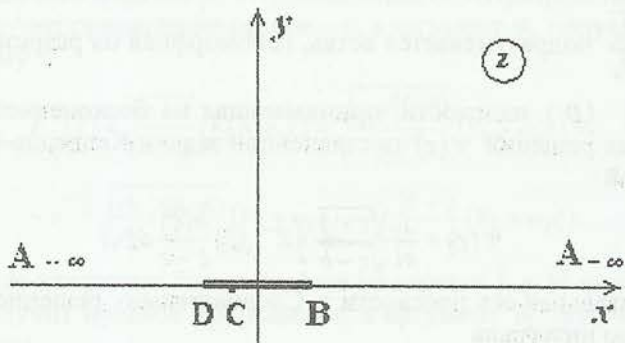


Рис. 2. К постановке смешанной задачи Келдыша-Седова для полуплоскости

При этом точка границы зоны отрыва (точка  $C$ ) имеет абсциссу  $-q$ , которая подлежит определению, а точки  $B$  и  $D$  – соответственно  $b$  и  $-b$ .

**Решение задачи Келдыша-Седова.** Следуя Мусхелишвили [5], составим функцию граничных условий

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D', \\ ig(\xi), & \xi \in D'', \end{cases}$$

где

$$f(\xi) = V_0 + \omega_z \xi, \quad z = \xi \in [-q, b] \quad (D')$$

и

$$g(\xi) = 0, \quad \begin{cases} \xi \in (-\infty, -b), \\ \xi \in (-b, -q), \\ \xi \in (b, +\infty). \end{cases} \quad (D'').$$

Данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью на  $CB$  и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, то есть параметры задачи равны

$$a_1 = -q \text{ и } b_1 = b.$$



Тогда решение однородной задачи, играющее роль канонического решения класса  $h_0$ , имеет вид

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}},$$

где

$$R(z) = (z - a_1)(z - b_1) = (z + q)(z - b).$$

Ветвь  $\sqrt{R(z)}$  принимает на оси  $x$  положительные значения при  $x > b$ . Общее решение класса  $h_0$  однородной задачи при  $f(\xi) = g(\xi) = 0$  определяется как

$$\Phi_0(z) = \frac{C_0 z + C_1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{C_0 z + C_1}{\sqrt{(z + q)(z - b)}},$$

где  $C_0, C_1$  — произвольные действительные постоянные.

Каноническим решением  $Z(z)$  класса  $h(-q)(h(a_1))$  с точностью до постоянного множителя будет функция

$$Z(z) = \sqrt{\frac{R_a}{R_b}},$$

где

$$R_a(z) = z - a_1 = z + q, \quad R_b(z) = z - b_1 = z - b,$$

и под  $\sqrt{\frac{R_a}{R_b}} = \frac{\sqrt{R_a}}{\sqrt{R_b}}$  подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль отрезка  $x \in [-q, b]$  ( $D'$ ) плоскости, принимающая на бесконечности значение 1.

Одно из частных решений  $\Psi(z)$  поставленной задачи Келдыша-Седова, определяется формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{z + q}}{\sqrt{z - b}} \int_L Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

где  $L$  — действительная ось плоскости  $z$ . Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_L Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{D'} Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi + \\ &+ \int_{D''} Z^{-1}(\xi) \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{D'} Z^{-1}(\xi) \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{D''} Z^{-1}(\xi) \frac{ig(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая выражение для функций  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$ , приходим к выражению

$$I(z) = i \int_q^b \frac{\sqrt{b - \xi}}{\sqrt{\xi + q}} \frac{V_0 + \omega_z \xi}{\xi - z} d\xi.$$

Представим последний интеграл в виде

$$I(z) = iJ(z),$$

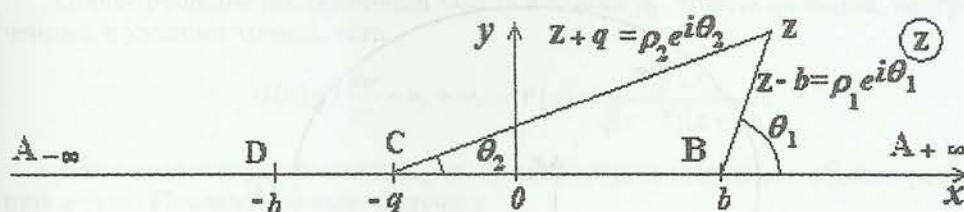
где

$$J(z) = \int_q^b \frac{\sqrt{b - \xi}}{\sqrt{\xi + q}} (V_0 + \omega_z \xi) \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Введем функцию

$$F(z) = \sqrt{\frac{z - b}{z + q}} (V_0 + \omega_z z),$$

ветвь которой при  $z = x \geq b$  совпадает с  $\sqrt{\frac{x - b}{x + q}} (V_0 + \omega_z x)$  и сделан разрез вдоль  $[-q, b]$  (рис. 3).

Рис. 3. Схема к определению значений функции  $F(z)$ 

Тогда при переходе с отрезка  $[b, +\infty)$  на верхний берег разреза по отрезку  $[-q, b]$  аргумент  $\theta_1$  получит приращение равное  $\pi$ , а аргумент  $\theta_2$  получит нулевое приращение, поэтому

$$\begin{aligned} F^-(z) &= \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) = \sqrt{\frac{\rho_1 e^{i(\theta_1+\pi)}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} (V_0 + \omega_z \xi) = \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} e^{i(\theta_1-\theta_2)} (V_0 + \omega_z \xi) = i \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi). \end{aligned}$$

При переходе же с отрезка  $[b, +\infty)$  на нижний берег разреза по отрезку  $[-q, b]$  аргумент  $\theta_1$  получит приращение равное  $-\pi$ , а аргумент  $\theta_2$  получит нулевое приращение, поэтому

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) = \sqrt{\frac{\rho_1 e^{i(\theta_1-\pi)}}{\rho_2 e^{i\theta_2}}} (V_0 + \omega_z \xi) = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} e^{i(\theta_1-\theta_2)} (V_0 + \omega_z \xi) = -i \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi). \end{aligned}$$

При переходе с верхнего берега разреза по отрезку  $[-q, b]$  на отрезок  $(-\infty, -q]$  аргумент  $\theta_1$  получит нулевое приращение, а аргумент  $\theta_2$  получит приращение равное  $\pi$ , поэтому

$$\begin{aligned} F(z) &= \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) = \sqrt{\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i(\theta_2+\pi)}}} (V_0 + \omega_z \xi) = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} e^{i(\theta_1-\theta_2)} (V_0 + \omega_z \xi) = -\sqrt{\frac{\xi-b}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi). \end{aligned}$$

При  $z \rightarrow \infty$  имеет место разложение

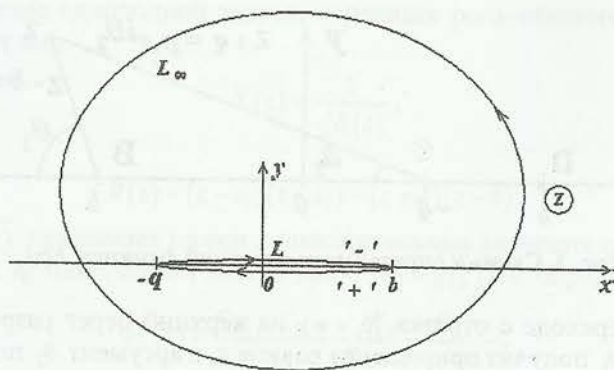
$$\begin{aligned} F(z) &= z \sqrt{\frac{1-\frac{b}{z}}{1+\frac{q}{z}}} \left( \omega_z + \frac{V_0}{z} \right) = z \left( 1 - \frac{b}{2z} - \frac{b^2}{8z^2} + \dots \right) \left( 1 - \frac{q}{2z} + \frac{3q^2}{8z^2} + \dots \right) \left( \omega_z + \frac{V_0}{z} \right) = \\ &= z \left( 1 - \frac{b+q}{2z} + \frac{3q^2+2bq-b^2}{8z^2} + \dots \right) \left( \omega_z + \frac{V_0}{z} \right) = \\ &= \omega_z z + V_0 - \omega_z \frac{b+q}{2} - \frac{b+q}{8z} [\omega_z (b-3q) + 4V_0] + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$G(z) = \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) - \omega_z z - V_0 + \omega_z \frac{b+q}{2}$$

стремится к нулю при стремлении  $z$  в бесконечность, то есть  $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$ .



Рис. 4. Схема к вычислению интеграла  $J(z)$  при помощи теоремы Коши

В комплексной плоскости  $z$  рассмотрим область, ограниченную контурами  $L$  и  $L_\infty$ , первый из которых охватывает отрезок интегрирования  $[-q, b]$  действительной оси и обходит его по часовой стрелке, а второй расположен в окрестности бесконечно удаленной точки и обходится против часовой стрелки (рис. 4). Внутри выделенной многосвязной области функция  $G(z)$  не имеет особых точек и для любой внутренней точки  $z$  справедлива интегральная формула Коши

$$2\pi i G(z) = \int_L \frac{G(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{L_\infty} \frac{G(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где последний интеграл стремится к нулю при распространении контура интегрирования в бесконечность. Тогда получим

$$2\pi i G(z) = \int_L \frac{G^-(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{L^+} \frac{G^+(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

или

$$2\pi i G(z) = \int_q^b \left( i \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi) - \omega_z \xi - V_0 + \omega_z \frac{b+q}{2} \right) \frac{d\xi}{\xi - z} + \\ + \int_b^q \left( -i \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi) - \omega_z \xi - V_0 + \omega_z \frac{b+q}{2} \right) \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Изменив порядок интегрирования во втором интеграле, получим

$$2\pi i \left( \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) - \omega_z z - V_0 + \omega_z \frac{b+q}{2} \right) = 2i \int_q^b \sqrt{\frac{b-\xi}{\xi+q}} (V_0 + \omega_z \xi) \frac{d\xi}{\xi - z},$$

откуда

$$J(z) = \pi \left( \sqrt{\frac{z-b}{z+q}} (V_0 + \omega_z z) - \omega_z z - V_0 + \omega_z \frac{b+q}{2} \right).$$

Следовательно, одно из частных решений  $\Psi(t)$  поставленной задачи Келдыша-Седова, имеет вид

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{z+q}}{\sqrt{z-b}} i J(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{z+q}}{\sqrt{z-b}} J(z),$$

так что окончательно, получаем

$$\Psi(z) = V_0 + \omega_z z - \frac{\sqrt{z+q}}{\sqrt{z-b}} \left( \omega_z z + V_0 - \omega_z \frac{b+q}{2} \right).$$

Общее решение поставленной задачи в классе  $h_0$ , то есть функций, неограниченных в узловых точках, есть

$$\Omega(z) = i \frac{dw}{dz} = v_y + i v_x = \Psi(z) + \frac{C_0 z + C_1}{\sqrt{(z-b)(z+q)}}.$$

Для определения констант  $C_0$  и  $C_1$  рассмотрим поведение общего решения при  $z \rightarrow \infty$ . Последовательно получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{z+q}{z-b}} &= \left(1 + \frac{q}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{q}{2z} - \frac{q^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \left(1 + \frac{b}{2z} + \frac{3b^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \\ &= 1 + \frac{b+q}{2z} + \frac{3b^2 + 2bq - q^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{b-q}{2z} - \frac{(b+q)^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)} = \frac{1}{z} + \frac{b-q}{2z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

$$\frac{z}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} = \frac{z}{z \left(1 - \frac{b-q}{2z} - \frac{(b+q)^2}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)} = 1 + \frac{b-q}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Подставляя данные разложения в выражение для функции  $\Omega(z)$ , получим при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= C_0 + C_0 \frac{b-q}{2z} + \frac{C_1}{z} + (V_0 + \omega_z z) - \\ &- \left(1 + \frac{b+q}{2z} + \frac{3b^2 + 2bq - q^2}{8z^2}\right) \left(\omega_z z + V_0 - \omega_z \frac{b+q}{2}\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) = \\ &= C_0 + C_0 \frac{b-q}{2z} + \frac{C_1}{z} - \omega_z \frac{b+q}{2} - V_0 \frac{b+q}{2z} + \omega_z \frac{b+q}{2} + \omega_z \frac{(b+q)^2}{4z} - \\ &- \omega_z \frac{3b^2 + 2bq - q^2}{8z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \end{aligned}$$

Окончательно, имеем

$$\Omega(z) = C_0 + \frac{1}{z} \left\{ C_0 \frac{b-q}{2} + C_1 - V_0 \frac{b+q}{2} - \omega_z \frac{(b+q)(b-3q)}{8} \right\} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

По физическому смыслу функция  $\Omega(z)$  непосредственно связана с полем скоростей возмущенной жидкости и, следовательно, на бесконечности должна стремиться к нулю, то есть

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = 0.$$

Из этого условия и разложения функции  $\Omega(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  следует, что константа  $C_0$  равняется нулю:

$$C_0 = 0.$$

Кроме того, в возникшем течении жидкости отсутствуют источники и стоки, что приводит к отсутствию в разложении функции  $\Omega(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  члена вида  $\frac{1}{z}$ , что приводит к условию для определения коэффициента  $C_1$ , а именно,

$$C_1 = \frac{b+q}{2} \left[ V_0 + \omega_z \frac{b-3q}{4} \right].$$



Таким образом, решение в классе  $h_0$  поставленной задачи имеет вид

$$\Omega(z) = V_0 + \omega_z z - \sqrt{\frac{z+q}{z-b}} \left( \omega_z z + V_0 - \omega_z \frac{b+q}{2} \right) + \frac{b+q}{2} \left[ V_0 + \omega_z \frac{b-3q}{4} \right] \frac{1}{\sqrt{(z+q)(z-b)}}.$$

После преобразований получаем

$$\Omega(z) = v_y + i v_x = V_0 \left[ 1 - \frac{z - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right] + \omega_z \left[ z - \frac{z^2 - \frac{b-q}{2}z - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right].$$

**Определение точки отрыва.** Положение точки отрыва (координату  $q$ ) определим из условия непрерывности скорости жидкости при подходе к ней со стороны отрыва, то есть

$$\lim_{x \rightarrow q-0} v_y = V_0 - \omega_z q.$$

Подставляя в это условие выражение для компоненты скорости  $v_y$ , приходим к уравнению для определения величины  $q$

$$\lim_{\xi \rightarrow -q-0} v_y = \lim_{\xi \rightarrow -q-0} \left\{ V_0 \left[ 1 + \frac{\xi - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] + \omega_z \left[ \xi + \frac{\xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] \right\} = V_0 - \omega_z q.$$

Отсюда получаем уравнение для определения  $q$ :

$$V_0 \left( \xi - \frac{b-q}{2} \right) + \omega_z \left( \xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8} \right) \Big|_{\xi=-q} = 0,$$

то есть

$$V_0 \left( -q - \frac{b-q}{2} \right) + \omega_z \left( q^2 + \frac{b-q}{2}q - \frac{(b+q)^2}{8} \right) = 0,$$

или окончательно

$$-V_0 \frac{b+q}{2} + \omega_z \frac{(b+q)(3q-b)}{8} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$q = -b \text{ и } q = \frac{4}{3} \frac{V_0}{\omega_z} + \frac{b}{3}.$$

Для исследования корней разделим обе части на полуширину пластинки  $b$  и введем обозначения для относительного положения точки отрыва

$$\lambda = -\frac{q}{b},$$

а также для безразмерного кинематического параметра

$$N = \frac{V_0}{\omega_z b}.$$

Положение мгновенной оси вращения  $\zeta$ , то есть точки, в которой приобретенная в результате удара скорость равна нулю, определяется равенством

$$\zeta = -\frac{V_0}{\omega_z}.$$



В безразмерном виде

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{b} = -\frac{V_0}{\omega_z b} = -N,$$

то есть физический смысл безразмерного кинематического параметра – это безразмерная координата положения мгновенной оси, взятая с противоположным знаком.

*Вероятно, что первый корень не имеет физического смысла, так как точка границы отрыва С совпадает с точкой В  $\lambda = 1$  для любых значений скорости  $V_0$  и угловой скорости  $\omega_z$ . При этом вся пластинка оказывается в зоне отрыва!*

Второй корень представим в безразмерном виде

$$\lambda = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N.$$

Из физики явления следует, что отрыв будет происходить при значениях безразмерного параметра  $\lambda \in [-1, 1]$ . Отсюда, значения для кинематического параметра  $N$ , при которых возможен отрыв, определяются из неравенства

$$-1 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4N \leq 2 \Rightarrow -1 \leq N \leq 0,5.$$

В выделенном промежутке  $N \in [-1; 0,5]$  сравним соответствующие значения  $\lambda$  со значениями  $N$ , а именно,

$$\lambda \leq \bar{\zeta} \Rightarrow -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N \leq \bar{\zeta} \Rightarrow -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N \leq -N \Rightarrow N \geq -1.$$

Следовательно, при всех  $N \in [-1; 0,5]$  точка отрыва лежит левее положения мгновенной оси, то есть зона отрыва находится целиком в области, в которой скорость точек пластины направлены вовне жидкости.

При  $N = -1$  положения мгновенного центра и границы отрыва совпадают и

$$\lambda = \bar{\zeta} = 1.$$

При этом важно учитывать знаки поступательной и угловой скорости. Так, при  $V_0 > 0$  и  $\omega_z < 0$  зона отрыва не может возникнуть, поскольку скорость после удара направлена вовнутрь жидкости и распределена по линейному закону. Но в случае, когда  $V_0 < 0$  и  $\omega_z > 0$  зона отрыва охватывает всю пластинку, так как скорость после удара направлена вовне жидкости. Это указывает на то, что в выбранной математической модели отрицательные значения параметра  $N$  возникают, когда  $V_0 < 0$  и  $\omega_z > 0$  (рис. 5).

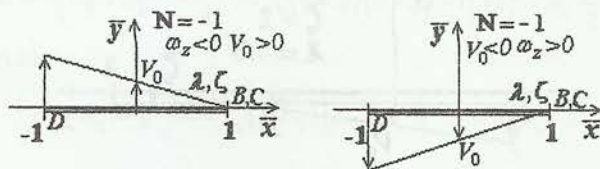


Рис. 5. Случай, когда вся пластинка охвачена отрывом

Если  $-1 < N < 0,5$ , то мгновенный центр вращения находится на пластинке, а граница отрыва также расположена на пластинке, причем левее мгновенного центра вращения. При этом возникает зона отрыва. Некоторые случаи взаимного расположения точек  $N$  и  $\lambda$  для этого случая показаны на рис. 6.

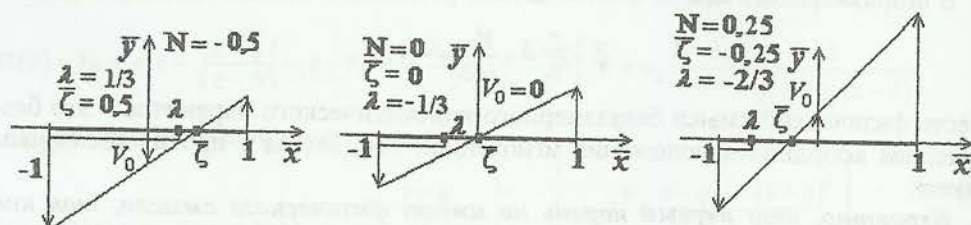


Рис. 6. Возможные случаи расположения зоны отрыва на пластинке при  $-1 < N < 0.5$

Если  $N = 0.5$ , то граница отрыва находится на левом конце пластинки  $\lambda = -1$ , а поэтому зона отрыва на пластинке не возникает (рис. 7).

При  $N > 0.5$  точка отрыва расположена на свободной поверхности слева от пластинки. Зона отрыва при этом не возникает (рис. 8). Скорость после удара направлена вовнутрь жидкости и распределена по линейному закону.

Следует отметить, что при  $N \rightarrow \infty$  (что соответствует  $V_0 \rightarrow \infty$  или  $\omega_z \rightarrow 0$ ) распределение скорости стремится к постоянному распределению и зоны отрыва нет.

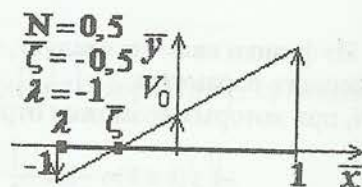


Рис. 7. Случай отсутствия зоны отрыва на пластинке

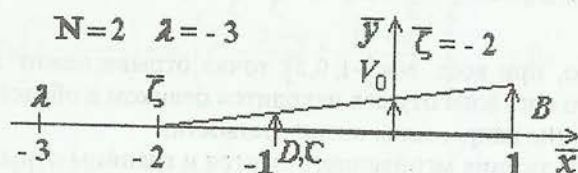


Рис. 8. Случай отсутствия зоны отрыва при  $N > 0.5$

При  $N < -1$  мгновенный центр вращения находится на свободной поверхности справа от пластинки, а граница отрыва расположена на ней же еще правее. При этом пластинка оказывается внутри зоны отрыва. Один из таких случаев взаимного расположения точек  $N$  и  $\lambda$  показан на рис. 9. При  $N \rightarrow -\infty$  мгновенный центр вращения и граница зоны отрыва также смещаются в бесконечность, а распределение скорости стремится к постоянному значению.

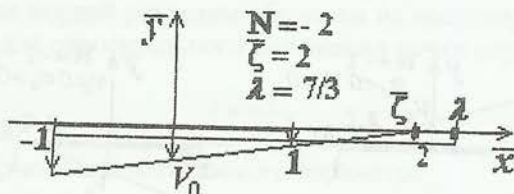


Рис. 9. Случай, когда вся пластинка находится в зоне отрыва

Следовательно, для выбранной математической модели угловая скорость должна быть положительной, что обуславливает расположением зоны отрыва. Отрицательные значения кинематического параметра  $N$  соответствуют отрицательному значению поступательной скорости  $V_0$ . Когда  $N \rightarrow -\infty$ , то распределение скорости на пластинке стремится к постоянному, но направлено от пластинки



и вся пластинка находится в зоне отрыва. И такая картинка сохраняется при возрастании кинематического параметра до значения  $N = -1$ , когда положение мгновенной оси вращения и точки отрыва совпадают с правым краем пластинки. Начиная с этого значения кинематического параметра  $N$  на пластинке развивается зона отрыва, которая уменьшается с ростом кинематического параметра  $N$  до значения  $0,5$ , когда точка отрыва совпадает с левым краем пластинки, хотя еще распределение скорости на пластинке направлено как внутрь, так и вовне жидкости. С дальнейшим ростом числа  $N$  течение становится безотрывным. Следовательно, условие отсутствия отрыва есть

$$N > 0,5 \Rightarrow \frac{V_0}{\omega_z b} > 0,5 \Rightarrow V_0 > 0,5 \omega_z b.$$

**Определение параметров течения.** Для определения значения присоединенной массы вернемся к выражению для функции

$$\Omega(z) = v_y + i v_x = V_0 \left[ 1 - \frac{z - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right] + \omega_z \left[ z - \frac{z^2 - \frac{b-q}{2}z - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right],$$

в котором геометрические и кинематические характеристики задачи разделены, то есть, хотя координата точки отрыва определяется кинематическим параметром, который зависит от отношения поступательной и угловой скоростей, будем считать ее уже известной. Из уравнения

$$\frac{d(iw)}{dz} = \Omega(z) = V_0 \left[ 1 - \frac{z - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right] + \omega_z \left[ z - \frac{z^2 - \frac{b-q}{2}z - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} \right]$$

имеем

$$iw(z) = V_0 z + \omega_z \frac{z^2}{2} - V_0 \int \frac{z - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} dz - \omega_z \int \frac{z^2 - \frac{b-q}{2}z - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(z+q)(z-b)}} dz.$$

После нахождения интегралов комплексный потенциал принимает вид (несущественная константа положена равной нулю)

$$w = -i V_0 \left[ z - \sqrt{(z+q)(z-b)} \right] - i \omega_z \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \left( z + \frac{b-q}{2} \right) \sqrt{(z+q)(z-b)} \right].$$

По части поверхности пластинки, подверженной удару, то есть на верхнем берегу разреза при  $\xi \in [-q, b]$ , имеем

$$w = - \left( V_0 + \omega_z \frac{2\xi + b - q}{4} \right) \sqrt{(\xi + q)(b - \xi)} - i \left( V_0 \xi + \omega_z \frac{\xi^2}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\phi = - \left( V_0 + \omega_z \frac{2\xi + b - q}{4} \right) \sqrt{(\xi + q)(b - \xi)} \quad \text{и} \quad \psi = - \left( V_0 \xi + \omega_z \frac{\xi^2}{2} \right).$$

Импульсивное давление на поверхности пластинки равно

$$p_t = -\rho \phi = \rho \left( V_0 + \omega_z \frac{2\xi + b - q}{4} \right) \sqrt{(\xi + q)(b - \xi)}, \quad \xi \in [-q, b],$$

или в безразмерном виде

$$\bar{p}_t = \frac{p_t}{\rho \omega_z b^2} = \left( N + \frac{2\bar{\xi} + 1 + \lambda}{4} \right) \sqrt{(\bar{\xi} - \lambda)(1 - \bar{\xi})}, \quad \bar{\xi} \in [\lambda, 1].$$

Учитывая зависимость положения отрыва  $\lambda$  от кинематического параметра  $N$ , получим

$$\bar{p}_t = \frac{1}{3} \left( 2N + \frac{3\bar{\xi} + 1}{2} \right) \sqrt{\left( \bar{\xi} + \frac{1+4N}{3} \right) (1 - \bar{\xi})}, \quad \bar{\xi} \in \left[ -\frac{1+4N}{3}, 1 \right] \text{ при } N \in [-1, 0, 5].$$

Полученное выражение для импульсивного давления совпадает с приведенным Седовым [4] для случая безотрывного вертикального удара пластины с вращением. Некоторые характерные случаи распределения импульсивного давления для фиксированных значений кинематического параметра  $N$  показаны на рис. 10.

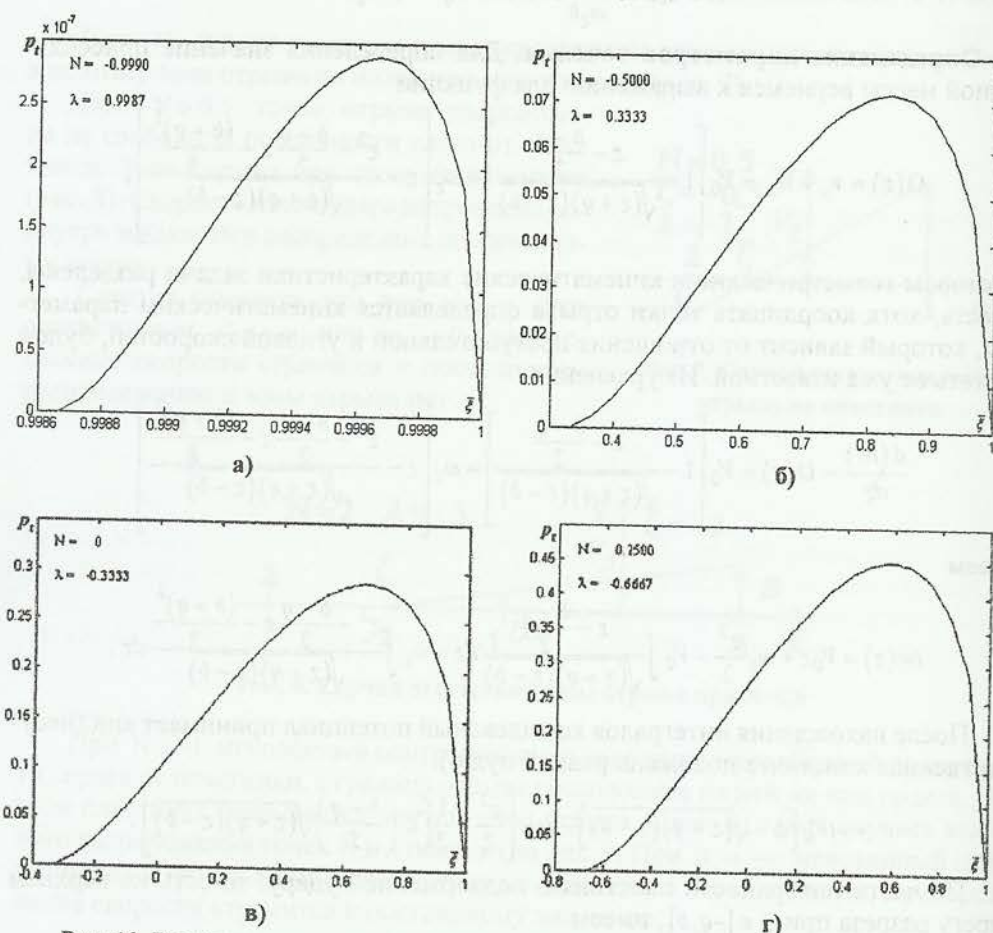


Рис. 10. Распределение импульсивного давления по поверхности пластинки:  
а) –  $N = -0,999$ ; б) –  $N = -0,500$ ; в) –  $N = 0,000$ ; г) –  $N = 0,250$

Рассмотрим распределение скорости на свободной границе и на поверхности пластины. На свободной границе горизонтальная составляющая скорости отсутствует

$$v_x = 0 \text{ при } z = \xi \in [-\infty, -b] \text{ и } z = \xi \in [b, +\infty],$$

а вертикальная компонента распределена по закону

$$v_y = V_0 \left[ 1 + \frac{\xi - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] + \omega_z \left[ \xi + \frac{\xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] \text{ при } z = \xi \in [-\infty, -b],$$



$$v_y = V_0 \left[ 1 - \frac{\xi - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] + \omega_z \left[ \xi - \frac{\xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] \text{ при } z = \xi \in [b, +\infty].$$

На пластинке в зоне безотрывного удара при  $z = \xi \in [-q, b]$  имеем

$$v_x = V_0 \frac{\xi - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(b-\xi)(\xi+q)}} + \omega_z \frac{\xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(b-\xi)(\xi+q)}}.$$

$$v_y = V_0 + \omega_z \xi.$$

В зоне отрыва при  $z = \xi \in [-b, -q]$  имеем

$$v_x = 0,$$

$$v_y = V_0 \left[ 1 + \frac{\xi - \frac{b-q}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right] + \omega_z \left[ \xi + \frac{\xi^2 - \frac{b-q}{2}\xi - \frac{(b+q)^2}{8}}{\sqrt{(\xi+q)(\xi-b)}} \right].$$

В безразмерном виде получим на свободной границе

$$\bar{v}_x = 0 \text{ при } \bar{\xi} \in [-\infty, -1] \text{ и } \bar{\xi} \in [1, +\infty],$$

$$\bar{v}_y = N \left[ 1 + \frac{\bar{\xi} - \frac{1+\lambda}{2}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}} \right] + \bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2 - \frac{1+\lambda}{2}\bar{\xi} - \frac{(1-\lambda)^2}{8}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}} \text{ при } \bar{\xi} \in [-\infty, -1],$$

$$\bar{v}_y = N \left[ 1 - \frac{\bar{\xi} - \frac{1+\lambda}{2}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}} \right] + \bar{\xi} - \frac{\bar{\xi}^2 - \frac{1+\lambda}{2}\bar{\xi} - \frac{(1-\lambda)^2}{8}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}} \text{ при } \bar{\xi} \in [1, +\infty].$$

На пластинке в зоне безотрывного удара при  $\bar{\xi} \in [\lambda, 1]$  имеем

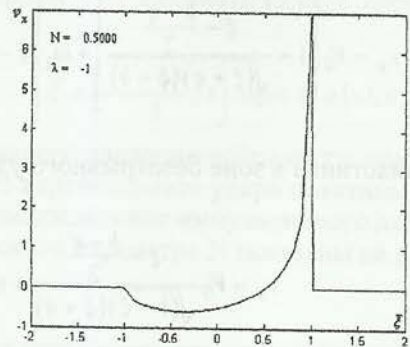
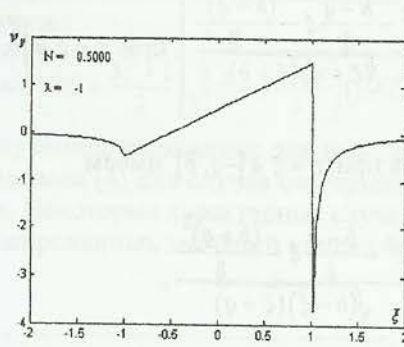
$$\bar{v}_x = N \frac{\bar{\xi} - \frac{1+\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\bar{\xi})(\bar{\xi}-\lambda)}} + \frac{\bar{\xi}^2 - \frac{1+\lambda}{2}\bar{\xi} - \frac{(1-\lambda)^2}{8}}{\sqrt{(1-\bar{\xi})(\bar{\xi}-\lambda)}}, \quad \bar{v}_y = N + \bar{\xi}.$$

В зоне отрыва при  $\bar{\xi} \in [-1, \lambda]$  имеем

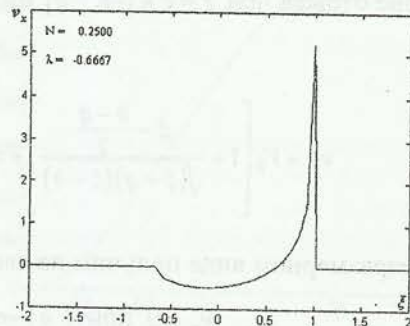
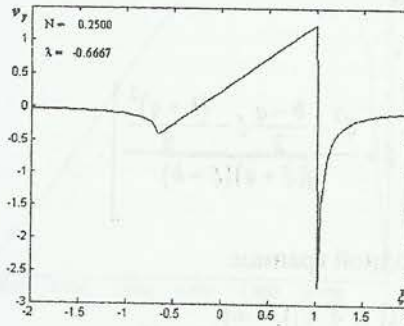
$$\bar{v}_x = 0, \quad \bar{v}_y = N \left[ 1 + \frac{\bar{\xi} - \frac{1+\lambda}{2}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}} \right] + \bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2 - \frac{1+\lambda}{2}\bar{\xi} - \frac{(1-\lambda)^2}{8}}{\sqrt{(\bar{\xi}-\lambda)(\bar{\xi}-1)}},$$

где  $\lambda = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N$  при  $N \in [-1, 0, 5]$ .

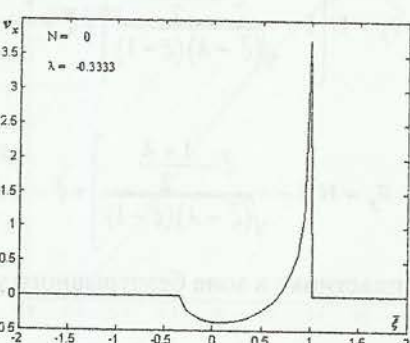
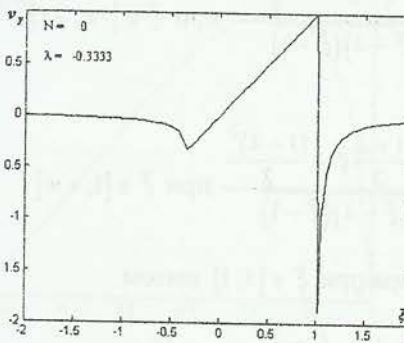
Некоторые характерные случаи распределения компонент скорости для фиксированных значений кинематического параметра  $N$  показаны на рис. 11.



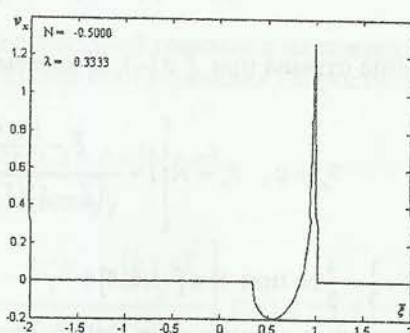
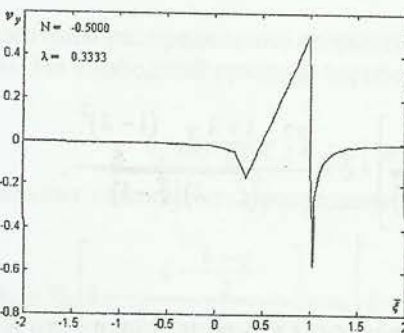
а)



б)

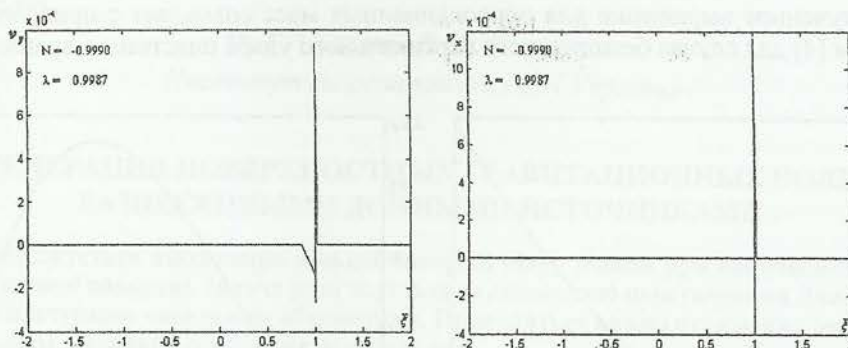


в)



г)





д)

Рис. 11. Распределение компонент скорости по пластинке и свободной поверхности:

а) –  $N=0,500$ ; б) –  $N=0,250$ ; в) –  $N=0,000$ ; г) –  $N=-0,500$ ; д) –  $N=-0,999$ 

Для определения присоединенных масс введем единичные потенциалы

$$\phi = V_0 \phi_2 + \omega_z \phi_6$$

и, соответственно

$$\psi = V_0 \psi_2 + \omega_z \psi_6.$$

Введенные единичные потенциалы будут зависеть от формы тела и положения зоны отрыва. Имеем

$$\phi_2 = -\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)} \text{ и } \psi_2 = -\xi,$$

$$\phi_6 = -\frac{2\xi+b-q}{4} \sqrt{(\xi+q)(b-\xi)} \text{ и } \psi_6 = -\frac{\xi^2}{2}.$$

Формула для присоединенных масс в случае плоского течения имеет вид

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_C \phi_i d\psi_k,$$

при этом контур  $C$  обходится против движения часовой стрелки. В нашем случае это будет интегрирование по верхнему берегу разреза вдоль отрезка  $\xi \in [-q, b]$  от точки  $\xi = b$  до точки  $\xi = -q$ .

Коэффициенты присоединенных масс равны:

$$\bar{\lambda}_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\rho b^2} = \frac{\frac{\pi \rho}{2} \left( \frac{b+q}{2} \right)^2}{\rho b^2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1-\lambda}{2} \right)^2,$$

$$\bar{\lambda}_{26} = \bar{\lambda}_{62} = \frac{\lambda_{62}}{\rho b^3} = \frac{\frac{\pi \rho}{4} \frac{b-q}{4} \left( \frac{b+q}{2} \right)^2}{\rho b^3} = \pi \frac{1+\lambda}{4} \left( \frac{1-\lambda}{2} \right)^2,$$

$$\bar{\lambda}_{66} = \frac{\lambda_{66}}{\rho b^4} = \frac{\frac{\pi \rho}{256} (b+q)^2 (9b^2 - 14bq + 9q^2)}{\rho b^4} = \frac{\pi}{256} (1-\lambda)^2 (9 + 14\lambda + 9\lambda^2),$$

где

$$\lambda = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}N \text{ при } N \in [-1, 0, 5].$$

Полученное выражение для присоединенных масс совпадает с приведенным Седовым [4] для случая безотрывного вертикального удара пластины с вращением.

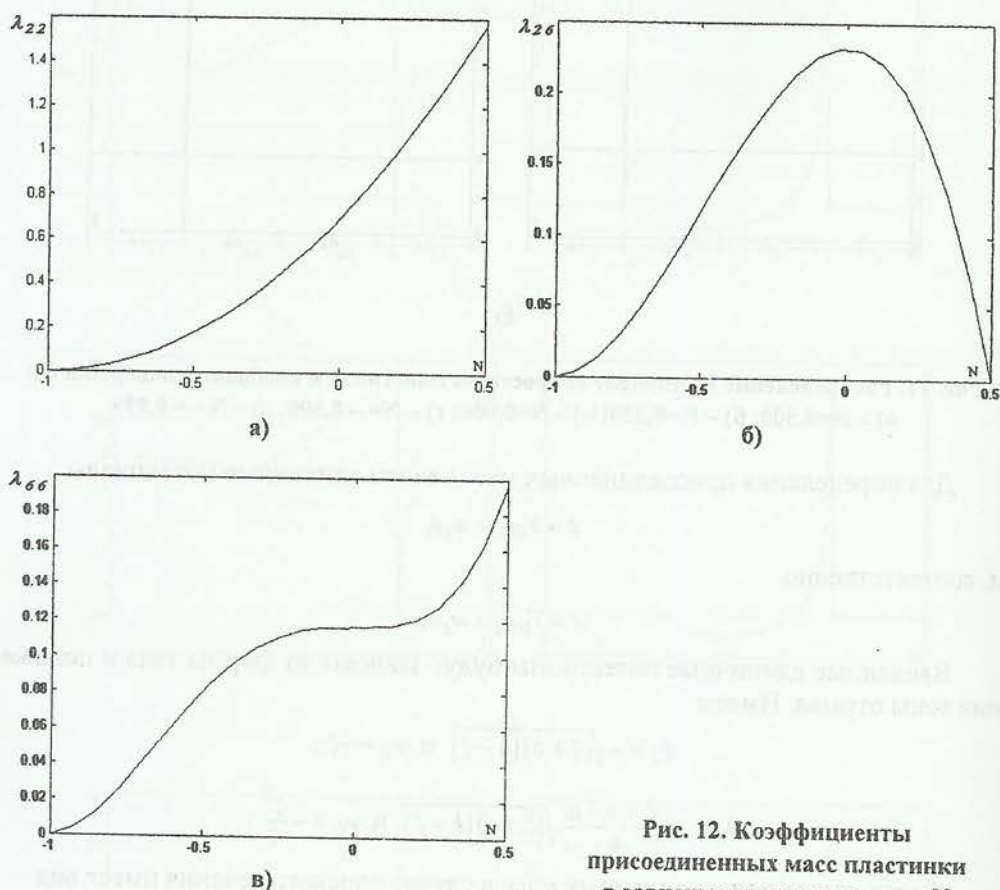


Рис. 12. Коэффициенты присоединенных масс пластинки в зависимости от параметра  $N$

Графики изменения коэффициентов присоединенных масс в зависимости от кинематического параметра  $N$  приведены на рис. 12. По сравнению со случаем безотрывного обтекания значения коэффициентов присоединенных масс ниже; кроме того, появляется коэффициент  $\lambda_{26}$ , который в случае безотрывного обтекания равен нулю.

**Выводы.** Получено точное решение задачи об ударе плоской пластинки с вращением по поверхности несжимаемой жидкости. Полученные соотношения позволяют сделать заключение о возникновении зоны отрыва при ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и горизонтальной пластины, плавающей на ее поверхности.

#### Бibliографические ссылки

1. Гуревич М. И. Теория течений со свободными границами / М. И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика, 1971. – Т. 5. – С. 32–114.
2. Григолюк Э. И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами / Г. В. Логвинович. – Киев, 1969. – 216 с.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М., 1968. – 512 с.

Надійшла до редколегії 10.05.2012.