УДК 532.593

И. Т. Селезов, Д. О. Черников

Институт гидромеханики НАН Украины

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН РАЗНЕСЕННЫМИ ДОННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Досліджується відхилення вільної поверхні шару рідини при одночасному збудженні донної поверхні. Задача розв'язується за допомогою перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Проводиться аналіз отриманих результатів для двох випадків локальних підйомів дна.

Ключові слова: шар рідини, хвилі на вільної поверхні, порухи донної поверхні.

Исследуется отклонение свободной поверхности слоя жидкости при одновременно изменяющимися возмущениями донной поверхности в двух местах. Задача решается при помощи преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ полученных результатов для двух случаев подвижки дна.

Ключевые слова: слой жидкости, волны на свободной поверхности, подвижки дна.

The free surface deviation of a liquid layer at the simultaneous varying perturbations of the bottom surface is investigated. The problem is solved using the Laplace transform in time followed by numerical inversion. Analysis the results obtained for two cases bottom surface shifts is carried out.

Key words: liquid layer, waves on the free surface, bottom surface shift.

Введение. Распространение неустановившихся волновых движений представляет собой значительно более сложную проблему, чем распространение регулярных волн. В случае распространения поверхностных гравитационных волн известный метод решения этой задачи, основанный на построении функций Грина, позволяет получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В [3] рассматриваются задачи об определении формы свободной поверхности слоя жидкости конечной глубины в процессе возмущений, вызванных изменением поверхности дна. Задача рассматривается в рамках классической постановки Коши-Пуассона теории линейных волн для идеальной жидкости. Предложенный метод сводит решение задачи к решению некоторого интегрального или интегрально-дифференциального уравнения для некоторой гидродинамической функции на свободной поверхности. В более общем случае, решение может быть получено с помощью теории интегральных преобразований.

Рассматриваемая задача представляет собой интерес для проблемы цунами [13]. Картина распространения цунами достаточно сложна, ведь скорость волн определяется глубиной океана и потому на всем пути является переменной. Одни части волнового фронта опережают другие, фронт теряет кольцевую форму, изгибается, иногда даже ломается. Существует несколько причин возникновения волн цунами. В большинстве случаев они вызываются подводными землетрясениями. Подвижка дна при землетрясениях обычно имеет высоту порядка 50 см, но по площади огромна – десятки квадратных километров.

Поэтому возбуждаемые волны цунами имеют маленькую высоту и очень большую длину. Эти волны несут колоссальные запасы энергии. Из наблюдений цунами в Тихом океане в марте 1964 года показано, что длина их может превышать глубину в пять раз [1] и, следовательно, явление может описываться теорией волн мелкой воды. Отметим также цунами в Индийском океане в декаб-

ре 2004 года [12] и у берегов Японии в 2011 году. Проблема цунами рассматривалась также в [2; 7 – 9; 11].

Постановка задачи. Рассматриваем в цилиндрической системе координат (r,θ,z) область D, заполненную невязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ. Предполагаем, что жидкость ограничена сверху свободной поверхностью $z=0$ и донной поверхностью $z=-H_0$. В начальный момент времени $t=0$ жидкость покоится и находится под действием гравитационных сил, направленных в отрицательном направлении оси oz. Также предполагаем, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна одновременно не менее чем в двух местах. Представляет интерес исследовать, как эволюционирует свободная поверхность жидкости при действии такого типа возмущений.

Движение предполагается безвихревым, что позволяет ввести потенциал скоростей $\varphi(r,\theta,z,t)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0; \qquad (1)$$
$$-H_0\le z\le 0,\ r>0,\ t>0,$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

$$\left(\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=0;\ \eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0}; \qquad (2)$$

на донной поверхности:

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=-H_0}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}; \qquad (3)$$

начальные условия:

$$\varphi(r,\theta,z,t)\big|_{t=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\eta^d\big|_{t=0}=0, \qquad (4)$$

где η^d – отклонение дна; η – отклонение свободной поверхности; g – ускорение свободного падения.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при $t=0$ включается возмущение заданное в виде $\eta^d(r,t)=\eta_0\psi(r)f(t)$. Если при $t=0$ включается одновременно два возмущения, то функции η_1^d и η_2^d задаются в виде

$$\eta_1^d=\eta_{01}\psi_1(r)f_1(t),\quad \eta_2^d=\eta_{02}\psi_2(r)f_2(t). \qquad (5)$$

Метод решения. Введем безразмерные переменные по формулам (далее звездочки опущены):

$$r^*=\frac{r}{r_0},r_0^*=1,z^*=\frac{z}{H_0},\ t^*=t\frac{C_{sh}}{r_0},\ \eta^*=\frac{\eta}{H_0},\varphi^*=\frac{\varphi}{r_0C_{sh}},\ \beta=\frac{r_0}{H_0}, \qquad (6)$$

где r_0 – радиус возмущения отклонения дна (характерная величина), C_{sh} – скорость волн на мелкой воде (предельное значение длинноволнового приближения); $C_{sh}=\sqrt{gH_0}$.

Постановка задачи (1) – (4) в безразмерной форме в соответствии с (6) и осесимметричном возмущении (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\ -1\le z\le 0,\ r>0,\ t>0. \qquad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0,\ \eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{z=0},\ \beta^2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=-1}=\frac{\partial\eta^d}{\partial t}. \qquad (8)$$

Начальные условия (4) в безразмерной форме в соответствии с (6) остаются без изменения.

Применим интегральное преобразование по времени t [4]

$$f^L(r,z,s)=\int_0^\infty f(r,z,t)e^{-st}dt, \tag{9}$$

где s – параметр преобразования Лапласа, а по радиальной координате r применим интегральное преобразование Ханкеля

$$f^H(\lambda)=\int_0^\infty f(r)rJ_0(\lambda r)dr, \tag{10}$$

где λ – параметр преобразования Ханкеля.

После применения (9) и (10) к задаче (7), (8) получим в пространстве изображений Лапласа и Ханкеля следующую задачу

$$\frac{d^2\varphi^{LH}}{dz^2}-\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2\varphi^{LH}=0,\ -1\le z\le 0. \tag{11}$$

$$\left.(s^2\varphi^{LH}+\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz})\right|_{z=0}=0, \tag{12}$$

$$\left.\beta^2\frac{d\varphi^{LH}}{dz}\right|_{z=-1}=s\eta_0\psi^{dH}(\lambda)f^{dL}(s). \tag{13}$$

Из решения задачи (11) – (13) получаем выражение для потенциала скоростей

$$\varphi^{LH}(\lambda,z,s)=-\frac{1}{2}\frac{s}{\beta\lambda}\eta_0\psi^{dH}(\lambda)f^{dL}(s)\frac{(s^2+\beta\lambda)e^{-\frac{\lambda}{\beta}z}-(s^2-\beta\lambda)e^{\frac{\lambda}{\beta}z}}{s^2ch\frac{\lambda}{\beta}+\beta\lambda sh\frac{\lambda}{\beta}}. \tag{14}$$

Численные расчеты и анализ результатов. Численное обращение преобразования Лапласа может проводится различными методами [4 – 6; 10]. В [6] рассмотрены методы, основанные, на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лагерра. В данном случае – задача восстановления оригинала $f(t)$ требует привлечения подходов, чувствительных даже к незначительным вариациям изображения $F(s)$ [5]. В [10] восстановление оригинала $f(t)$ проводилось численно на основе разложений Фурье-Бесселя, где представлены результаты тестовых расчетов и сопоставление с точными (табличными) обращениями и некоторыми точными решениями. Расчеты проводились с удержанием различного числа членов (5, 6,…,10) и показано достаточное число членов для получения надлежащей точности.

Здесь для вычисления оригинала применяется алгоритм обращения с применением рядов Фурье [4], согласно которому требуются только значения изображения $F(s)$ при равностоящих значениях $s=(2n+1)\sigma$, где σ – произвольное число, больше нуля, $\sigma>0$, а $n=0,1\ldots$. Переменная t заменяется на θ и функция $\varphi(\theta)$ под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям $\sin(2\nu+1)\theta$. Параметр σ при малых t выбирается большим, а при больших t – меньшим.

Преобразование Ханкеля обратимо само по себе и поэтому для него не требуется специальных таблиц обратных преобразований.

Предполагалось, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна

$$f^d(t) = te^{-\lambda t}, \ \text{при}\ t \geq 0 \tag{15}$$

и одновременном включении двух возмущений $\psi_k^d(r)$ $(k = 1,2)$, расстояние между которыми l

$$\psi_1^d(r) = \zeta(\zeta^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}},\ \psi_2^d(r) = \zeta(\zeta^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} H(r-l),\ \zeta > 0, \tag{16}$$

где $H(r)$ функция Хевисайда.

Исследовалось отклонение свободной поверхности для двух одновременных подъемов дна при $\lambda = 2.5$, $\zeta = 0.5$, которые находятся между собой на расстоянии $l = 4$. Если сравнивать отклонение свободной поверхности жидкости от одного возмущения ($r = 0$), и отклонение с двумя возмущениями, то было установлено, что при двух одновременных включениях возмущений дна ($r = 0$ и $r = l = 4$) амплитуды отклонений свободной поверхности возрастают почти на 80 % ($r = 3$). Кроме того выявлен эффект взаимного поглощения возмущений, то есть появление так называемых «зон спокойствия» ($r = 12$).

Библиографические ссылки

1. **Вейль П.** Популярная океанография / П. Вейль. – Л., 1977. – 504 с.
2. **Воробьев Ю. Л.** Цунами: предупреждение и защита / Ю. Л. Воробьев, В. А. Акимов, Ю. И. Соколов. – М., 2006. – 127 с.
3. **Гоман О. Г.** Об одном подходе к решению задачи Коши-Пуассона для слоя жидкости конечной глубины / О. Г. Гоман, Е. А. Тихая // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: «Механіка». – 2011. – Вип. 15, т. 1. – С. 91–97.
4. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М., 1971. – 288 с.
5. **Крылов В. И.** Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М., 1974. – 224 с.
6. **Ланцош К.** Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М., 1981. – 524 с.
7. **Мурти Т. С.** Сейсмические морские волны цунами / Т. С. Мурти. – Л., 1981. – 448 с.
8. **Пелиновский Е. Н.** Гидродинамика волн цунами / Е. Н. Пелиновский. – Нижний Новгород, 1996. – 276 с.
9. **Селезов И. Т.** Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом / И. Т. Селезов, В. Н. Кузнецов, Д. О. Черников // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2009. – 52, № 3. – С. 140 – 145.
10. **Селезов И. Т.** Численное обращение преобразования Лапласа на основе разложений Фурье-Бесселя / И. Т. Селезов, С. В. Корсунский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 11. – С. 25–28.
11. ***Черников Д. О.*** *Генерация волн подвижками донной поверхности / Д. О. Черников* // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: «Механіка». – 2011. – Вип. 15, т. 1. – С. 89–93.
12. **Geist E. L.** Tsunami: Wave of change / E. L. Geist, V. V. Titov, C. E. Synolakis // Scientific American. – 2005.
13. **Selezov I. T.** Modeling of tsunami wave generation and propagation / I. T. Selezov // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2006. – 33, № 1. – С. 44–54.

Надійшла до редколегії 12.12.2011.