

**Выводы.** Проведены исследования динамической задачи, связанной с продольными колебаниями стальных канатов шахтных систем. Сформулирована задача о динамике подъемной установки с точки зрения напряжений в сечениях главных стальных канатов (упругого стержня) во времени. Установлены закономерности влияния характера отраженных волн от подвижного и неподвижного концов упругой нити, необходимые для оптимальной работы подъемной системы.

### Библиографические ссылки

1. **Воеводин В. В.** Численные методы в прикладном пакете sage / В. В.Воеводин – СПб, 2011. – 257 с.
2. **Ильин С.Р.** Математическая модель продольных колебаний струны и отвеса каната мобильной подъемной установки / С.Р. Ильин // Научные труды ДонНТУ. -2011. – Вып. 16(143). – С. 122 – 138.
3. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения. 2009. Т. 36. № 11. – С. 153 – 158.
4. **Коряшкіна Л.С.** Чисельні методи / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол. – Дніпропетровськ: Вид-во ДГУ. – 2007. – 219 с.
5. **Ostapenko V.A.** Dynamic field of displacements in rods of variable length. // Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, 2011. – P. 316 – 323.
6. **Razdolsky A. G.** Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length //International journal of solids and structures. – 2011. – Т. 48. – №. 24. – P. 359 –364.
7. **Fritzkowski P., Kamiński H.** Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members //Computational Mechanics. – 2009. – Т. 44. – №. 4. – С. 473 – 480.

*Надійшла до редколегії 01.11.2013.*

УДК 532.5

**О.Г. Гоман, В.А. Катан**

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара*

## УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ, В УСЛОВИЯХ ОБРАЗОВАНИЯ ОДНОЙ ЗОНЫ ОТРЫВА И НАЛИЧИИ ВРАЩЕНИЯ

Розглянуто задачу про ударну взаємодію з відривом нестисливої рідини та вертикальної пластини, що плаває на її вільній поверхні при наявності обертання. Поставлена задача зведена до задачі Келдиша-Седова відносно комплексного потенціалу течії. Визначені гідродинамічні характеристики в умовах утворення однієї зони відриву течії.

**Ключові слова:** удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, задача Келдиша-Седова..

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии с отрывом несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее свободной поверхности при наличии вращения. Поставленная задача сводится к задаче Келдыша-Седова для комплексного потенциала течения. Определены гидродинамические характеристики при образовании одной зоны отрыва.

**Ключевые слова:** удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, задача Келдыша-Седова.

**The problem for the impact incompressible fluid and the vertical plate on free surface is considered. The solution is received as the result by the Keldish-Sedov's problem.**

**Key words:** impact incompressible fluid and the solid of revolution on free surface, the Keldish-Sedov's problem.

**Введение.** Обзор и библиография по вопросам ударного взаимодействия жидкости и плавающих на ее поверхности твердых тел содержится в [1 – 3]. В [4] содержится постановка ударных задач в плоском приближении как при наличии, так и в отсутствии отрыва течения и для их решения используются методы теории функций комплексного переменного.

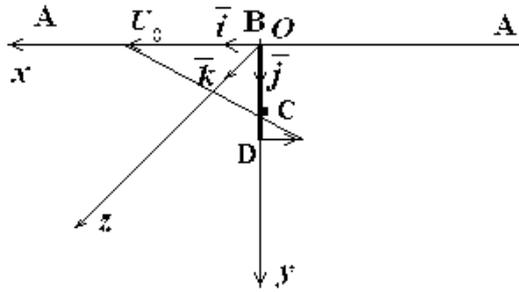
Пусть вертикальная пластинка длины  $b$  плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось  $Oy$  системы декартовых координат направлена по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а плоскость  $xOz$  совпадает со свободной поверхностью. Предполагается, что ударные импульсы подействовали так, что после удара пластинка имеет только компоненту скорости вдоль оси  $Ox$ , а также угловую скорость вокруг оси  $Oz$ . Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w = \varphi(z) + i\psi(z),$$

где  $\varphi(z)$  – потенциал течения,  $\psi(z)$  – функция тока. В результате удара тело приобретает скорость  $\vec{V} = (U_0 - \omega_z y)\vec{i}$ , где  $U_0$  – поступательная скорость полюса – точки В, а  $\omega_z$  – угловая скорость тела относительно полюса.

В предположении о наличии отрыва течения условие безотрывности течения распространяется только на участок контура BDC (причем положение точки С заранее неизвестно) и имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BDC} = \vec{V} \cdot \vec{n}.$$



**Рис. 1.** Схема ударного взаимодействия вертикально погруженной пластинки с жидкостью

Учитывая различное направление нормали на участках BD и DC, оно сводится на указанных участках к одному и тому же выражению, а именно:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{BD} = U_0 - \omega_z y \quad \text{и} \quad v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DC} = U_0 - \omega_z y.$$

Так как компоненты скорости выражаются через производные функции тока, то на участках BD и DC

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = U_0 - \omega_z y,$$

откуда с точностью до несущественной константы имеем

$$\psi = U_0 y - \omega_z \frac{y^2}{2}.$$

На свободной границе – оси  $Ox$  и участке отрыва СВ имеем условие равенства нулю импульсного давления, что приводит к условию

$$\varphi = 0.$$

В предыдущей работе авторов [5] поставленная задача сведена к задаче Кельдыша – Седова и получено ее аналитическое решение

$$\Psi(t) = \frac{U_0}{\pi} \left[ \sqrt{t^2 - b^2} \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q} + \sqrt{\frac{t+b}{t+q}}}}{\sqrt{\frac{2b}{b+q} - \sqrt{\frac{t+b}{t+q}}}} - \sqrt{(t+q)(t-b)} \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q} + 1}}{\sqrt{\frac{2b}{b+q} - 1}} \right] + \frac{\omega_z}{2} \left( t^2 - b^2 - \left( t + \frac{b-q}{2} \right) \sqrt{(t+q)(t-b)} \right).$$

Из требования непрерывности горизонтальной скорости жидкости [4] получено следующее уравнение для определения положения точки отрыва

$$\ln \frac{1 - \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}} + 2\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + \Lambda \frac{\pi}{8} (3\lambda - 1) = 0,$$

где  $\lambda = \frac{q}{b}$  – безразмерная координата точки отрыва;  $\Lambda = \frac{\omega_z b}{U}$  – безразмерный кинематический параметр.

Полученное уравнение совпадает с уравнением Седова для горизонтального удара вертикальной пластинки без вращения [4]. Численное исследование полученного уравнения показывает, что оно имеет единственное решение при значениях кинематического параметра  $\Lambda \leq 2,653$ . При больших значениях кинематического параметра уравнение имеет три корня, что указывает на неприменимость выбранной модели расположения отрывных зон.

Представим полученное уравнение в безразмерном виде, вводя безразмерные геометрический и кинематический параметры

$$\lambda = \frac{q}{b} \quad \text{и} \quad \Lambda = \frac{\omega_z b}{U_0},$$

получим

$$F(\lambda, \Lambda) \equiv \frac{4}{\pi} \left\{ \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} \right\} + \Lambda(1 - 3\lambda) = 0.$$

Выразим кинематический параметр через геометрический и исследуем полученную функцию

$$\Lambda = - \frac{4 \left\{ \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} - 2\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} \right\}}{\pi(3\lambda - 1)}.$$

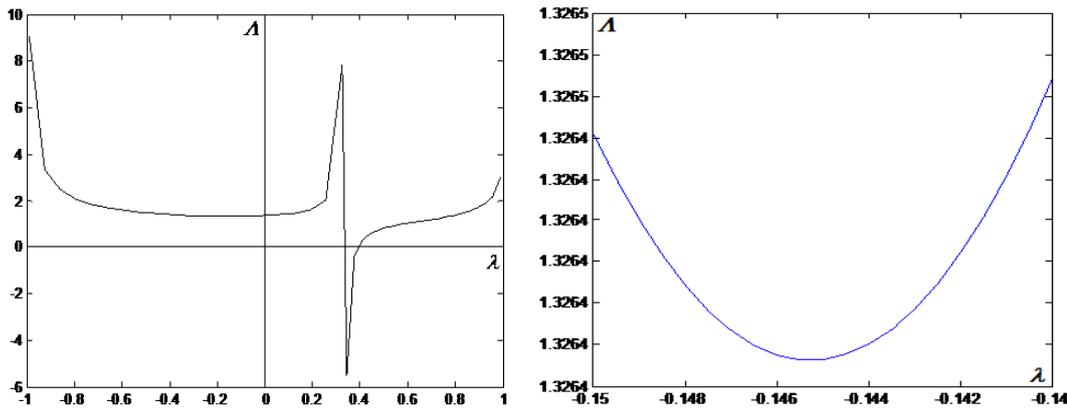


Рис. 2. Зависимость кинематического параметра  $\Lambda$  от геометрического  $\lambda$

Построенная функция определена на интервале  $\lambda \in (-1; 1)$  и имеет три особые точки  $\lambda = -1; \frac{1}{3}; 1$ , в которых принимает бесконечные значения, а именно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -1+0} \Lambda = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{3}-0} \Lambda = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{3}+0} \Lambda = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \Lambda = +\infty.$$

В точке  $\lambda = -0,145$  функция имеет локальный минимум, равный  $\Lambda_{\min} = 1,3264$ . График функции состоит из двух ветвей. На первом рисунке показан общий вид графика, а на втором – его часть вблизи экстремума.

Построенная функция позволяет сделать заключение о корнях данного уравнения: при значениях кинематического параметра, меньших минимума функции, то есть при  $\Lambda < \Lambda_{\min}$ , уравнение имеет один корень, а при больших значениях – три корня, **что свидетельствует о неприменимости выбранной схемы течения.**

Положение мгновенной оси вращения  $\eta$ , т.е точки в которой, приобретенная в результате удара скорость равна нулю, определяется равенством

$$\eta = \frac{U_0}{\omega_z}.$$

В безразмерном виде  $\eta = \frac{\eta}{b} = \frac{U_0}{\omega_2 b} = \frac{1}{\Lambda}$ .

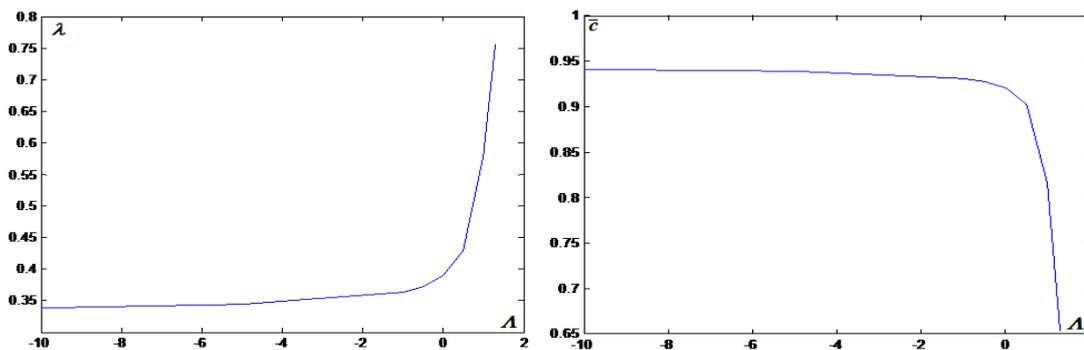
Для значений кинематического параметра, при которых существует один корень, определены во вспомогательной плоскости  $t$  положение точки отрыва  $\lambda$ , в физической плоскости  $z$  положения точки отрыва  $\bar{c} = c/b$  и мгновенной оси вращения  $\eta$ , которые приведены в таблице.

Таблица 1

Положение точки отрыва  $\bar{c}$  от кинематического параметра  $\Lambda$ 

№	$\Lambda$	$\lambda$	$\bar{c} = c/b$	$\eta$
1.	-10	0,3393	0,9407	-0,1
2.	-5	0,3441	0,9389	-0,2
3.	-1	0,3640	0,9314	-1
4.	-0,5	0,3730	0,9278	-2
5.	0	0,3896	0,9210	$\infty$
6.	0,5	0,4290	0,9033	2
7.	1,0	0,5789	0,8154	1
8.	1,3	0,7576	0,6527	0,7692

Зависимости положения точки отрыва во вспомогательной и физической плоскостях от кинематического параметра представлены на графиках.

Рис. 3. Зависимость положения точки отрыва от кинематического параметра  $\Lambda$ 

Рассмотрим в физической плоскости некоторые случаи взаимного расположения точки отрыва  $\bar{c} = c/b$  и мгновенной оси  $\eta$ . При отрицательных и положительных, меньших единицы, значениях кинематического параметра скорость после удара на передней стороне пластины направлена только в сторону положительного направления оси  $Ox$ , что и создает предпосылки для образования только одной зоны отрыва на задней стороне пластины. Такое же состояние сохраняется и при положительных значениях параметра при условии  $\Lambda < \Lambda_{\min} = 1,3264$ .

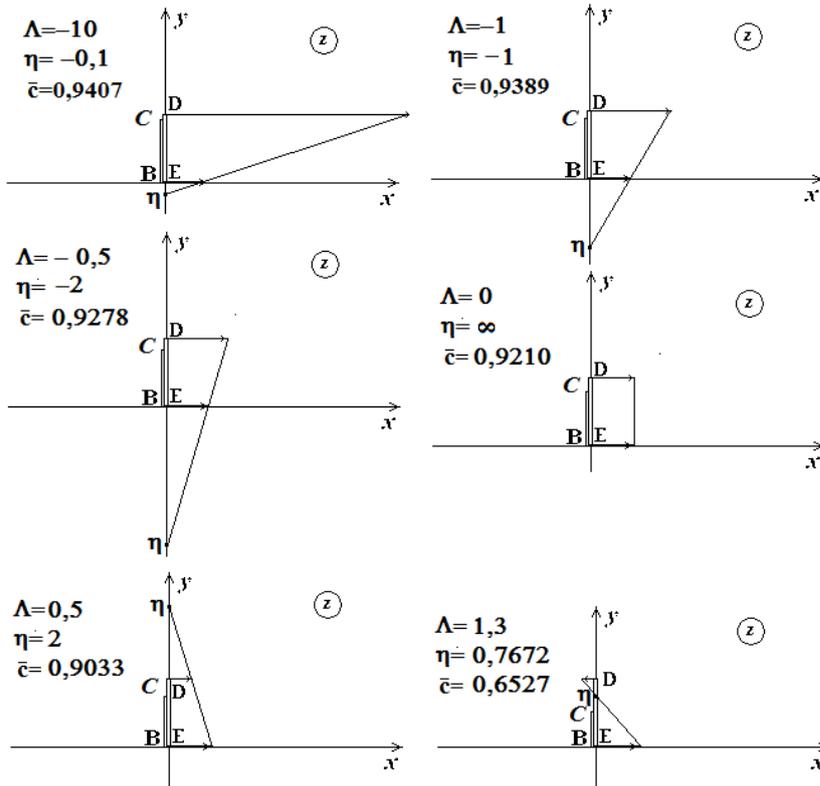


Рис. 4. Различные случаи распределения нормальной скорости на передней стороне

При больших значениях кинематического параметра положение мгновенной оси разделяет распределение скорости на две части, которые действуют в разных направлениях, что и приводит к образованию двух отрывных зон на задней и передней сторонах пластины, однако при этом вторая зона отрыва охватывает точку D и располагается как на передней, так и задней сторонах пластины, что физически неправдоподобно.

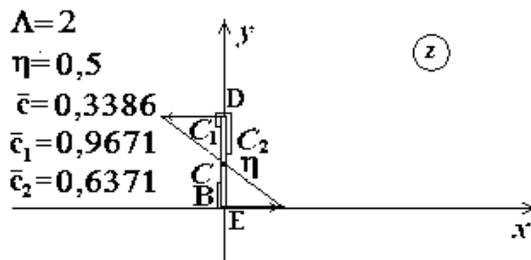


Рис. 5. Случай знакопеременного распределения скорости на передней стороне

Однако этот вопрос требует дальнейшего изучения. Отдельно следует рассмотреть случай чисто вращательного движения. В случае чисто вращательного движения зона отрыва расположена на задней стороне пластины и граница зоны отрыва не зависит от угловой скорости. Хотя в случае положительной угловой ско-

рости такое течение физически невозможно, так как зона отрыва расположена на «фактической» передней стороне пластины. В этом случае граница зоны отрыва равна во вспомогательной плоскости  $\lambda = \frac{1}{3}$ , а в физической соответственно

$$\bar{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428.$$

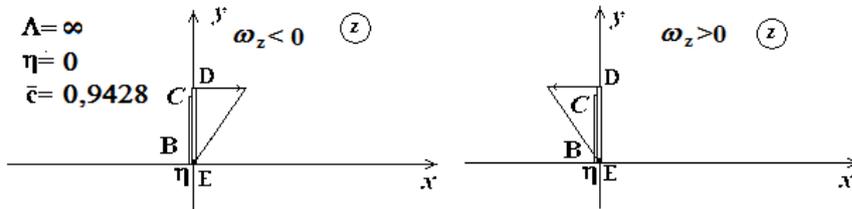


Рис. 6. Распределение скорости при чисто вращательном движении

Для записи полученных параметров течения в безразмерном виде введем в дополнение к кинематическому и геометрическому параметрам следующие безразмерные переменные

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{b}, \quad \bar{v}_x = \frac{v_x}{U_0}, \quad \bar{v}_y = \frac{v_y}{U_0}.$$

Тогда импульсивное давление на поверхности пластинки в безразмерном виде равно

$$\bar{p}_t = \frac{p_t}{\rho U_0 b} = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \bar{\xi}^2} \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} + \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}}} + \sqrt{\frac{2}{\bar{\xi}+\lambda} - \sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}}}{\sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda} - \sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}}} + \sqrt{(\bar{\xi} + \lambda)(1 - \bar{\xi})} \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} - 1}}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} + 1}} \right] - \frac{\Lambda}{2} \left( \bar{\xi} + \frac{1-\lambda}{2} \right) \sqrt{(\bar{\xi} + \lambda)(1 - \bar{\xi})}, \quad \bar{\xi} \in [-\lambda, 1].$$

Некоторые характерные случаи распределения импульсивного давления для фиксированных значений кинематического параметра  $\Lambda$  показаны рис. 7.

Для вертикальной компоненты скорости  $\bar{v}_y$  получим

$$\bar{v}_y = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} - \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}}} + \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \left( \bar{\xi} - \frac{1-\lambda}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} + 1}}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda} - 1}} + \sqrt{2(1+\lambda)} \right) \right] + \Lambda \left( \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1} + \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \bar{\xi}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \bar{\xi} - \frac{(1+\lambda)^2}{8} \right) \right), \quad \bar{\xi} \in (-\infty, -1]$$

$$\bar{v}_y = 0, \quad \bar{\xi} \in [-1, -\lambda],$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} - \sqrt{\frac{2}{1+\lambda}}}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}}} + \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \left( \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}} - \frac{1-\lambda}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} + \sqrt{2(1+\lambda)} \right) \right] +$$

$$+ \Lambda \left( \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \bar{\xi}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \bar{\xi} - \frac{(1+\lambda)^2}{8} \right) \right), \quad \bar{\xi} \in [-\lambda, 1],$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}}}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}}} + \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \left( \frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}} - \frac{1-\lambda}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} + \sqrt{2(1+\lambda)} \right) \right] -$$

$$- \Lambda \left( \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1} - \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}+1}{\bar{\xi}+\lambda}} \left( \bar{\xi}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \bar{\xi} - \frac{(1+\lambda)^2}{8} \right) \right), \quad \bar{\xi} \in [1, +\infty).$$

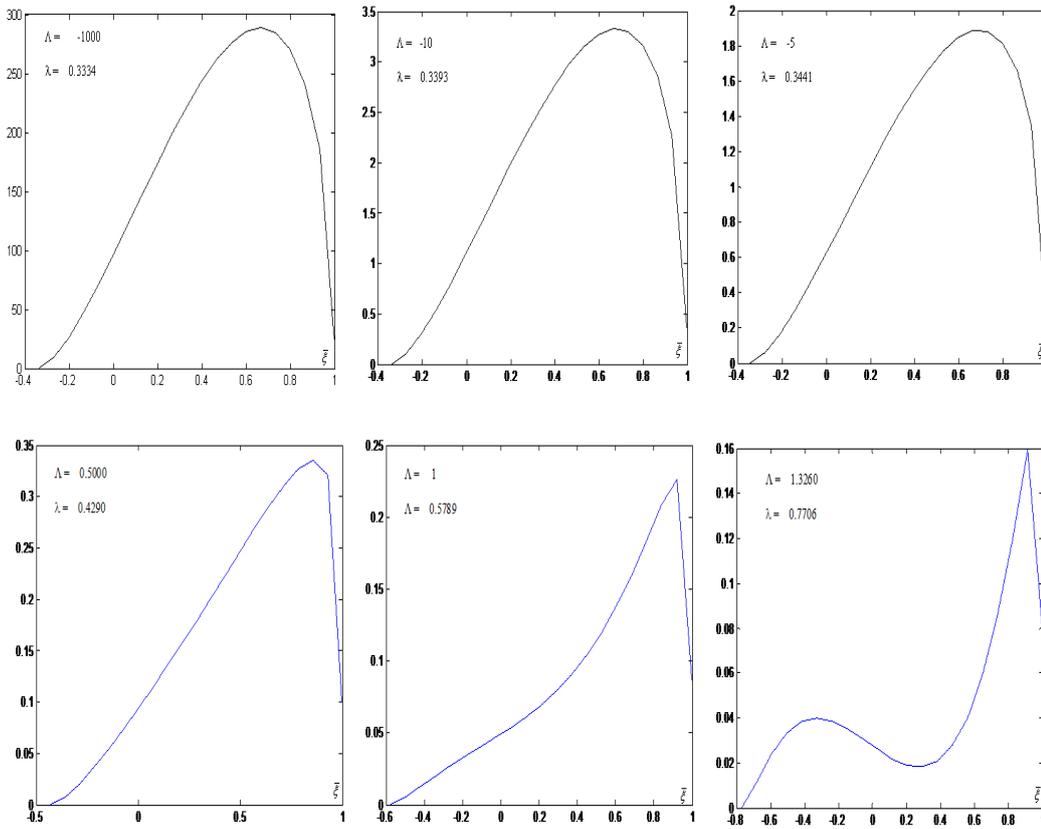


Рис. 7. Распределение импульсивного давления на пластинке

Горизонтальная составляющая скорости  $\bar{v}_x$  будет равна

$$\bar{v}_x = 0, \quad \bar{\xi} \in (-\infty, -1],$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1+\bar{\xi}}{\lambda+\bar{\xi}}} \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} \right) - \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{1+\bar{\xi}}{\lambda+\bar{\xi}}} \left( \left( \bar{\xi} - \frac{1-\lambda}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} + \sqrt{2(1+\lambda)} \right) \right] -$$

$$- \Lambda \left( \sqrt{1-\bar{\xi}^2} + \frac{1}{\bar{\xi}} \sqrt{\frac{1+\bar{\xi}}{\lambda+\bar{\xi}}} \left( \bar{\xi}^2 - \frac{1-\lambda}{2} \bar{\xi} - \frac{(1+\lambda)^2}{8} \right) \right), \quad \bar{\xi} \in [-1, -\lambda],$$

$$\bar{v}_x = 1 - \Lambda \sqrt{1-\bar{\xi}^2}, \quad \bar{\xi} \in [-\lambda, 1],$$

$$\bar{v}_x = 0, \quad \bar{\xi} \in [1, +\infty).$$

Некоторые характерные случаи распределения компонент скорости для фиксированных значений кинематического параметра  $\Lambda$  показаны на рис. 8.

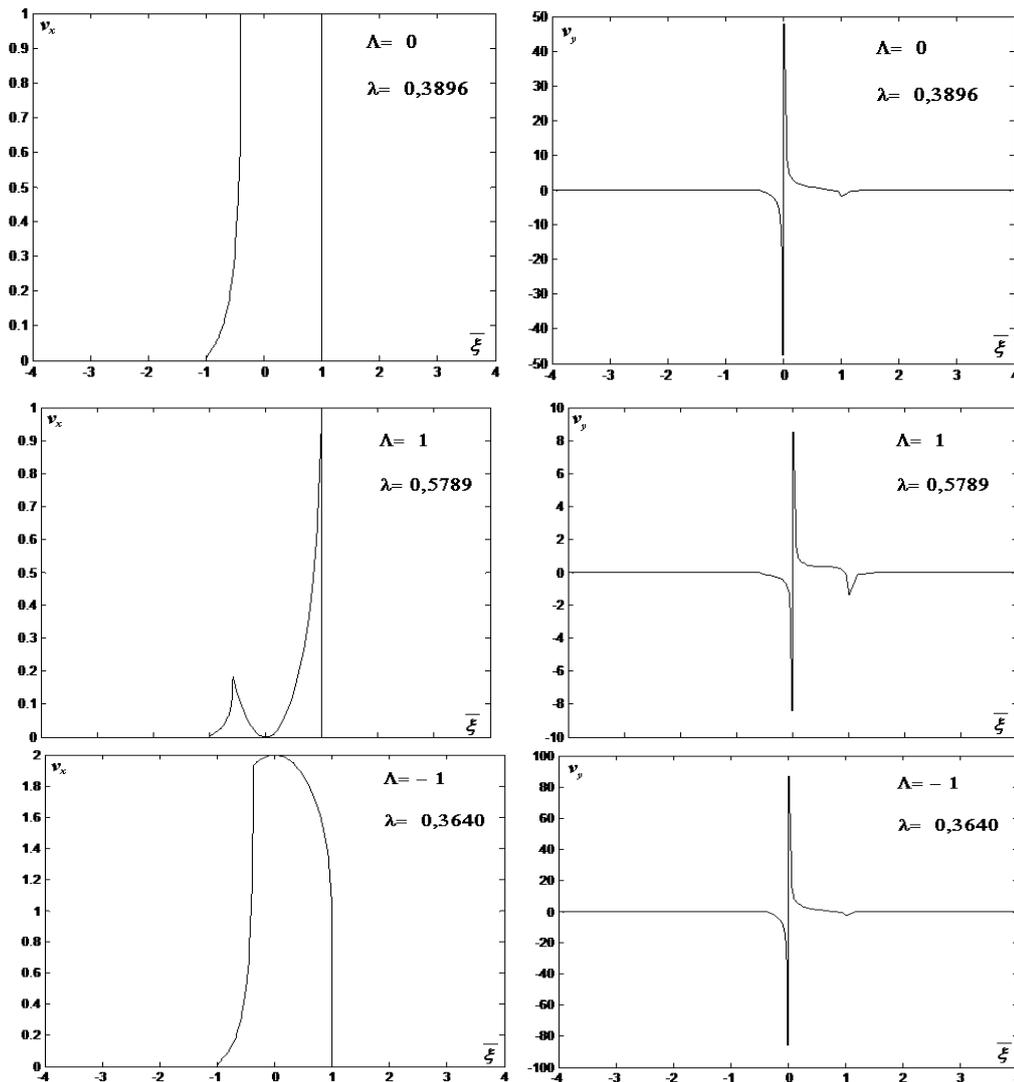


Рис. 8. Распределение компонент скорости по пластинке

Для распределения компоненты скорости  $v_y$  характерны значительные различия в ее максимальных значениях на отдельных участках оси  $\xi$ , поэтому для случая нулевой угловой скорости  $\Lambda = 0$  изменения составляющей скорости  $v_y$  показаны на отдельных рисунках. На свободной поверхности сзади пластинки при  $\xi \in (-\infty, -b)$  и перед пластинкой при  $\xi \in (b, +\infty)$  распределение имеет вид.

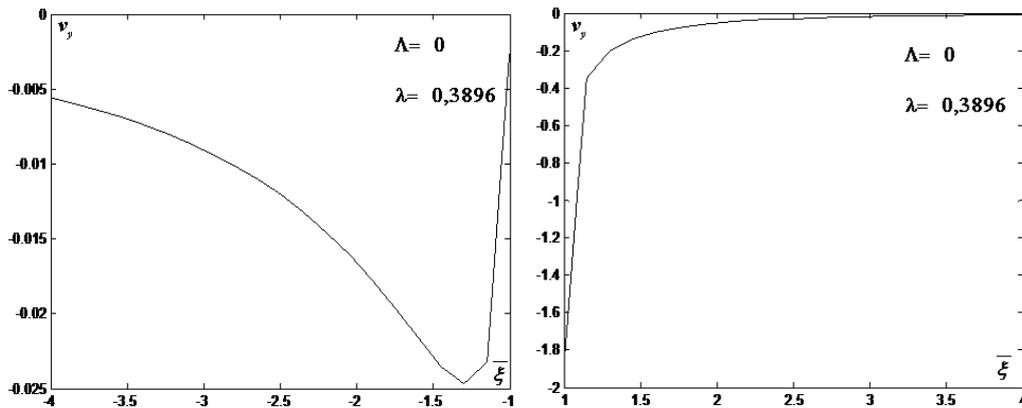


Рис. 9. Распределение вертикальной компоненты скорости по свободной поверхности

В отрывной зоне на задней стороне пластинки при  $\xi \in (-b, -q)$  компонента скорости  $v_y$  сохраняет постоянное нулевое значение.

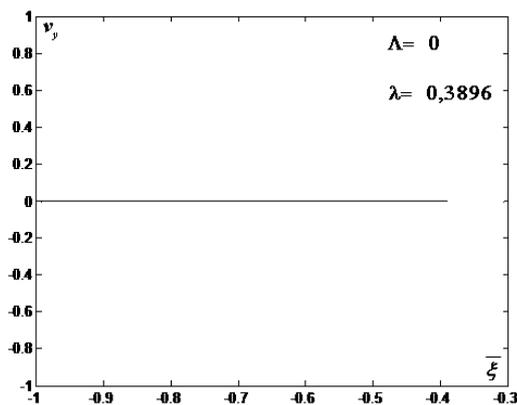


Рис. 10. Распределение вертикальной компоненты скорости в отрывной зоне

В зоне безотрывного обтекания на задней стороне пластинки при  $\xi \in (-q, 0)$  и на передней стороне при  $\xi \in (0, b)$  распределение составляющей скорости  $v_y$  имеет вид. В точке  $\xi = 0$ , что соответствует в физической плоскости погруженному краю пластинки (точка D), происходит разворот течения и компонента скорости имеет особенность и меняет знак.

Для более детального и наглядного анализа полученных результатов перейдем в физическую плоскость  $z$ . Построим зависимости безразмерного импульсного давления в виде распределения на передней и задней стороне пластинки для характерных значений кинематического параметра  $\Lambda$  (рис. 12).

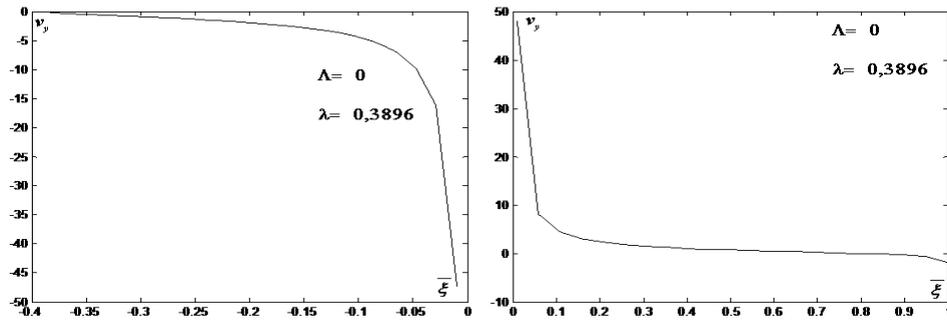


Рис. 11. Распределение вертикальной компоненты скорости в безотрывной зоне

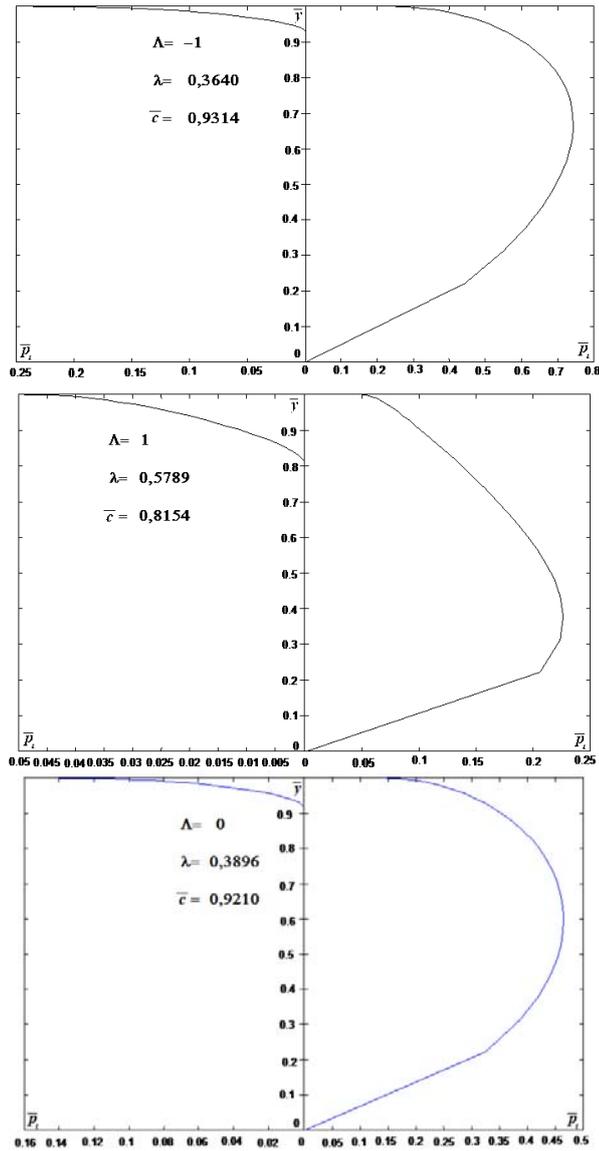


Рис. 12. Распределение импульсного давления по сторонам пластинки

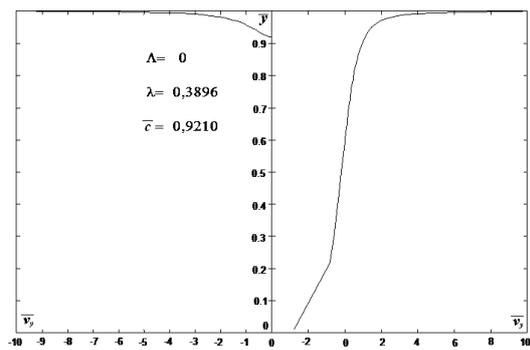
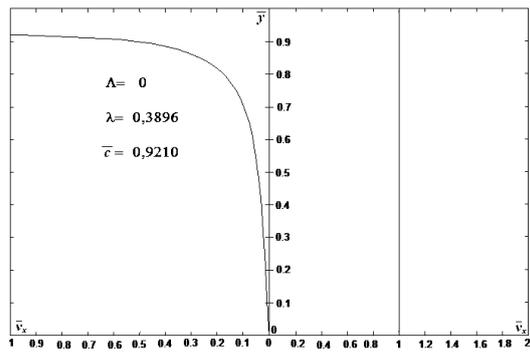
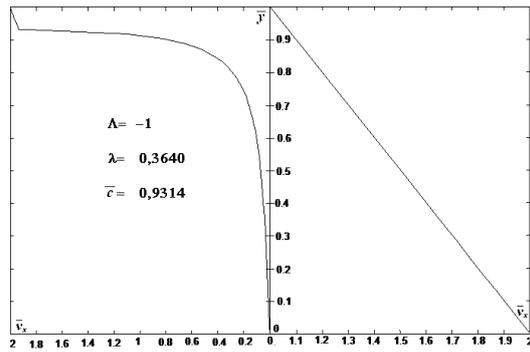
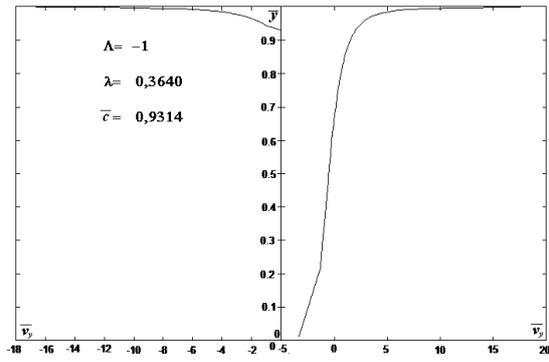


Рис. 13. Эпюры компонент скорости на передней и задней сторонах пластинки  $\Lambda = -1$  и  $\Lambda = 0$

Распределение безразмерных компонент скоростей  $v_x$  и  $v_y$  на передней и задней стороне пластинки для характерных значений кинематического параметра  $\Lambda$  показаны на рисунках. Левая часть соответствует задней стороне пластины, а правая – передней. На этих рисунках на передней и задней стороне пластинки использованы разные масштабы для безразмерных физических переменных (давления и компонент скорости), которые отложены по горизонтальной оси. На вертикальной оси представлена линейная координата по ширине пластинке. В точке D погруженного края пластинки давление остается непрерывным, а компонента скорости  $v_y$ , т.е. компонента скорости вдоль пластинки, скорости имеет особенность и меняет знак. Горизонтальная компонента скорости  $v_x$  непрерывно изменяется на задней и передней сторонах пластинки.

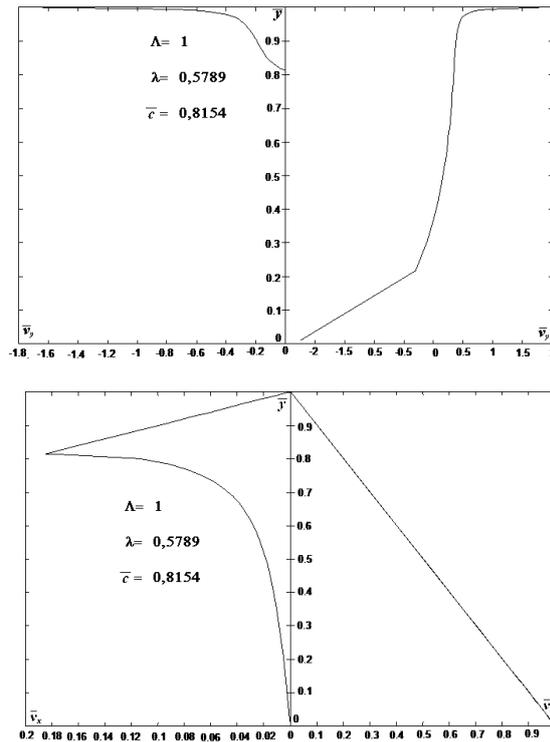


Рис. 14. Эпюры компонент скорости на передней и задней сторонах пластинки  $\Lambda = 1$

Для определения присоединенных масс введем единичные потенциалы

$$\varphi = U_0\varphi_1 + \omega_z\varphi_6; \quad \psi = U_0\psi_1 + \omega_z\psi_6.$$

Введенные единичные потенциалы будут зависеть от формы тела и положения зоны отрыва. Тогда

$$\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{b^2 - \xi^2} \ln \frac{\sqrt{\xi + b} - \sqrt{\frac{2b}{b+q}}}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} + \sqrt{\xi + b}} + \sqrt{(\xi + q)(b - \xi)} \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} + 1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} - 1} \right];$$

$$\psi_1 = \sqrt{b^2 - \xi^2},$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{b-q}{2} \right) \sqrt{(\xi+q)(b-\xi)} \text{ и } \psi_6 = \frac{1}{2} (\xi^2 - b^2).$$

Формула для присоединенных масс в случае плоского течения имеет вид

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_C \varphi_i d\psi_k,$$

при этом контур С обходится против движения часовой стрелки. В нашем случае это будет интегрирование по верхнему берегу разреза вдоль отрезка  $\xi \in [-q, b]$  от точки  $\xi = b$  до точки  $\xi = -q$ .

Коэффициенты присоединенных масс равны

$$\bar{\lambda}_{41} = \frac{\lambda_{41}}{\rho b^2} = \frac{\frac{\rho}{\pi} \left\{ (b+q)b - \frac{b-q}{2} \left[ \sqrt{2b(b+q)} + \frac{3b+q}{4} \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} - 1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} + 1} \right] \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} - 1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} + 1} \right\}}{\rho b^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ (1+\lambda) + \frac{1-\lambda}{2} \left[ \sqrt{2(1+\lambda)} - \frac{3+\lambda}{4} \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} \right] \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} \right\},$$

$$\bar{\lambda}_{61} = \bar{\lambda}_{16} = \frac{\lambda_{46}}{\rho b^3} = \frac{\frac{\rho(b+q)}{8} \left[ \frac{b^2 - q^2}{2} \ln \frac{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} + 1}{\sqrt{\frac{2b}{b+q}} - 1} - \frac{5b-3q}{3} \sqrt{2b(b+q)} \right]}{\rho b^3} =$$

$$= \frac{(1+\lambda)}{8} \left[ \frac{1-\lambda^2}{2} \ln \frac{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} + 1}{\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} - 1} - \frac{5-3\lambda}{3} \sqrt{2(1+\lambda)} \right],$$

$$\bar{\lambda}_{66} = \frac{\lambda_{66}}{\rho b^4} = \frac{\frac{\pi \rho}{256} (b+q)^2 (9b^2 - 14bq + 9q^2)}{\rho b^4} = \frac{\pi}{256} (1+\lambda)^2 (9 - 14\lambda + 9\lambda^2),$$

где геометрический параметр  $\lambda$  определяется в зависимости от кинематического параметра  $\Lambda$  при  $\Lambda \in (-\infty, 1,3264]$  после решения приведенного выше уравнения.

В таблице помещены значения коэффициентов присоединенных масс в зависимости для характерных значений кинематического параметра  $\Lambda$ .

Значения коэффициентов присоединенных масс

$\Lambda$	$\bar{\lambda}_{11}$	$\bar{\lambda}_{16}$	$\bar{\lambda}_{66}$
-10	0,3570	-0,1931	0,1164
-5	0,3570	-0,1931	0,1164
-1	0,3570	-0,1931	0,1164
-0,5	0,3570	-0,1931	0,1164
0	0,3570	-0,1931	0,1164
0,5	0,3570	-0,1931	0,1165
1	0,3595	-0,1958	0,1197
1,3	0,3806	-0,2138	0,1349

Графики изменения коэффициентов присоединенных масс в зависимости от кинематического параметра  $\Lambda$  приведены на рис.15.

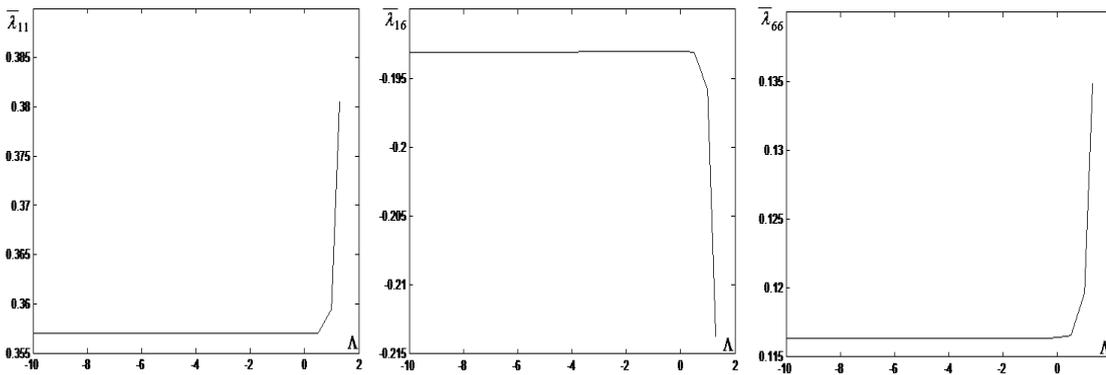


Рис. 15. Коэффициенты присоединенных масс

**Выводы.** Получено точное решение задачи об ударе с вращением пластинки, вертикально погруженной в несжимаемую жидкость. Полученное решение позволяет сделать заключение о наличии зоны отрыва при ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности, и определить её расположение на пластинке в зависимости от кинематических параметров.

### Библиографические ссылки

1. Гуревич М.И. Теория течений со свободными границами /М.И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика. – 1971. – Т. 5. – С. 32 – 114.
2. Григолоук Э.И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э.И. Григолоук, А.Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. / Г.В. Логвинович. – Киев, 1969. – 216 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. Гоман О.Г. Математическое моделирование взаимодействия несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности при ударе с вращением в условиях отрыва / О.Г.Гоман, В.А. Катан. Вісник Дніпропетр. ун - ту, 2012, Т. 20, № 5. Серія «Механіка», вип.. 16 т.1. – С. 87 – 93.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М., 1968. – 512 с.

Надійшла до редколегії 22.10.13.