

УДК 539.3

А. Ю. Годес, В. В. Лобода

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ДУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ МЕЖДУ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И МАТРИЦЕЙ

Рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред под действием усилий, приложенных на бесконечности. В математическом плане эта задача сводится к задаче линейного сопряжения для кусочно-аналитической функции комплексного переменного. Получены аналитические выражения, определяющие напряженное состояние в любой точке среды, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в ее вершинах.

Ключевые слова: круговое включение, дуговая трещина, задача линейного сопряжения.

Розглядається задача про визначення напружено-деформованого стану пружної площини з круговим включенням та дуговою тріщиною на межі розділу середовищ під дією зусиль, прикладених на нескінченності. В математичному плані ця задача зводиться до задачі лінійного спряження для кусочно-аналітичної функції комплексної змінної. Отримано аналітичні вирази, що визначають напружений стан у будь-якій точці середовища, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень у її вершинах.

Ключові слова: кругове включення, дугова тріщина, задача лінійного спряження.

A problem concerning definition of stresses and displacements in the elastic plane with a circular inclusion and an arc crack at the media interface is considered under the loading applied at infinity. Mathematically this problem is reduced to the problem of linear relationship for the analytical function of complex variable. The analytical expressions for stresses in any point of medium, crack opening the stress intensity factors are found.

Key words: circular inclusion, arc crack, problem of linear relationship.

Введение. Задача об отделении круговой упругой заклепки от окружающей ее матрицы под действием известных усилий на бесконечности привлекала внимание исследователей с 40-х гг. XX века. Как отмечает А. Н. England [1], эта задача была сведена к единственному интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля, которое аналитически интегрировалось только для случая, когда матрица и заклепка состояли из одинакового материала.

Н. И. Мусхелишвили [3] при рассмотрении случая, когда матрица и включение имеют одинаковые упругие свойства, методом потенциалов Колосова-Мусхелишвили свел задачу к решению задачи Гильберта на трещине для кусочно-аналитической функции. А. Н. England [1] воспользовался аналогичным методом для случая, когда включение и матрица состоят из разных материалов, а к берегам трещины приложены равные противоположно направленные усилия. Также в этой работе получено общее решение задачи и система уравнений для определения в нем произвольных постоянных для случая усилий, приложенных на бесконечности.

В настоящей статье рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния плоскости с круговым упругим включением из другого материала и дугообразной трещиной на границе раздела сред в случае усилий, приложенных на бесконечности. Решение получено путем сведения задачи плоской теории упругости к граничной задаче теории аналитических функций методом потенциалов Колосова-Мусхелишвили и дальнейшего приведения к задаче Гильберта на трещине для кусочно-аналитической функции. Выписаны достаточно простые ана-

литические выражения, определяющие напряженное состояние в любой точке среды, раскрытие трещины и коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Постановка задачи. Рассматривается плоскость, имеющая упругие постоянные μ_2 и κ_2 , которая содержит включение ($0 \leq r \leq a$) с упругими постоянными μ_1 и κ_1 , скрепленное с плоскостью вне дуги $r = a$, $|\theta| < \beta$. Берега трещины свободны от напряжений. На бесконечности действуют главные напряжения N_1 и N_2 , причем угол между направлением N_1 и осью Ox равен α (рис. 1). В дальнейшем область $0 \leq r \leq a$ обозначена как S^+ , а область $r > a$ как S^- .

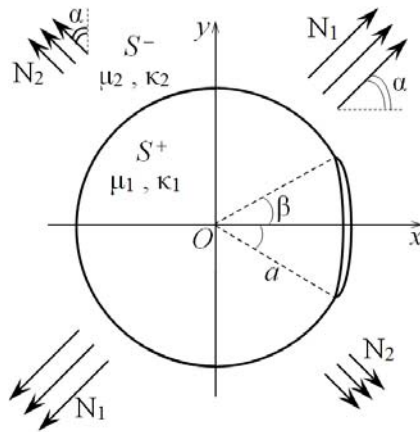


Рис. 1. Схема к постановке задачи

В математическом плане поставленная задача сводится к граничной задаче для замкнутой системы уравнений линейной теории упругости со следующими граничными условиями:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \quad \text{при } r = a, \quad \beta < |\theta| \leq \pi; \quad (1)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)} \quad \text{при } r = a, \quad \beta < |\theta| \leq \pi. \quad (2)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{при } r = a, \quad |\theta| < \beta; \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \quad \text{при } r = a, \quad |\theta| < \beta. \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2(\alpha - \theta) \quad \text{при } r \rightarrow \infty; \quad (5)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2(\alpha - \theta) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Сведение поставленной задачи к задаче линейного сопряжения. Для решения данной краевой задачи используется метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [3], причем граничное условие на бесконечности (5) переписывается в следующем более удобном виде

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\alpha - \theta)} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Далее, в соответствии с методикой работы [1], вводятся функции $\phi(z)$ и $\omega(z)$ так, что удовлетворяются условия (1) и (2) на границе раздела сред:

$$\phi(z) = \begin{cases} \mu_2 \kappa_1 \varphi_1(z) + \mu_1 z \bar{\varphi}_2' \left(\frac{a^2}{z} \right) + \mu_1 \bar{\psi}_2 \left(\frac{a^2}{z} \right), & z \in S^+ \\ \mu_1 \kappa_2 \varphi_2(z) + \mu_2 z \bar{\varphi}_1' \left(\frac{a^2}{z} \right) + \mu_2 \bar{\psi}_1 \left(\frac{a^2}{z} \right), & z \in S^- \end{cases},$$

$$\omega(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) - z \bar{\varphi}_2' \left(\frac{a^2}{z} \right) - \bar{\psi}_2 \left(\frac{a^2}{z} \right), & z \in S^+ \\ \varphi_2(z) - z \bar{\varphi}_1' \left(\frac{a^2}{z} \right) - \bar{\psi}_1 \left(\frac{a^2}{z} \right), & z \in S^- \end{cases},$$

$$\phi'(z) = K \omega'(z) + F'(z),$$

где

$$K = -\frac{\mu_1(1-\lambda\kappa_2)}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}.$$

Для выполнения условий (3), (4) введенная функция $F'(z)$ должна удовлетворять задаче Гильберта на трещине

$$F'^+(z) + \lambda F'^-(z) = 0 \quad \text{при } r = a, \quad |\theta| < \beta. \quad (7)$$

Перемещения и напряжения однозначно выражаются через функции $F(z)$ и $\omega(z)$ следующим образом:

$$\sigma_{rr}^{(1)} + i \sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \left((\mu_1 + K) \omega'(z) + F'(z) + \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}} \right) ((\mu_1 + K) \bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z})) + \right. \\ \left. + \left(\frac{a^2}{z} - \bar{z} \right) ((\mu_1 + K) \bar{\omega}''(\bar{z}) + \bar{F}''(\bar{z})) + \frac{a^2}{z\bar{z}} \left(-(\mu_1 + K) \omega' \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \lambda F' \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) \right) \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} + i \sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2} \left((\mu_2 + K) \omega'(z) + F'(z) + \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}} \right) ((\mu_2 + K) \bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z})) + \right. \\ \left. + \left(\frac{a^2}{z} - \bar{z} \right) ((\mu_2 + K) \bar{\omega}''(\bar{z}) + \bar{F}''(\bar{z})) + \frac{a^2}{z\bar{z}} \left(-(\mu_2 + K) \omega' \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) + \frac{1}{\lambda} F' \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) \right) \right), \quad (9)$$

$$u_r^{(1)} + i u_\theta^{(1)} = \frac{e^{-i\theta}}{2\mu_1(\mu_1 + \mu_2 \kappa_1)} (\kappa_1 (\mu_1 + K) \omega(z) + \kappa_1 F(z) + \\ + \left(\frac{a^2}{\bar{z}} - z \right) ((\mu_1 + K) \bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z})) + (\mu_1 + K) \omega \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) - \lambda F \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right)), \quad (10)$$

$$u_r^{(2)} + i u_\theta^{(2)} = \frac{e^{-i\theta}}{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1 \kappa_2)} (\kappa_2 (\mu_2 + K) \omega(z) + \kappa_2 F(z) + \\ + \left(\frac{a^2}{\bar{z}} - z \right) ((\mu_2 + K) \bar{\omega}'(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z})) + (\mu_2 + K) \omega \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right) - \frac{1}{\lambda} F \left(\frac{a^2}{\bar{z}} \right)). \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к определению функций $F(z)$ и $\omega(z)$, причем функция $F'(z)$ удовлетворяет задаче Гильберта (7) на трещине.

Общее решение задачи Гильберта. Если предположить, что напряжения ограничены в начале координат и бесконечно удаленной точке, то функция $\omega'(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением начала координат, где имеет полюс второго порядка. Функция $F'(z)$ аналитическая во всей комплексной плоскости кроме дуги $r = a$, $|\theta| < \beta$ и начала координат, где она также имеет полюс второго порядка.

Таким образом, функция $\omega'(z)$ для всех z задается выражением

$$\omega'(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2}. \quad (12)$$

Общее решение задачи Гильберта (7) имеет вид

$$F'(z) = X_0(z)R(z), \quad (13)$$

$$X_0(z) = \left(\frac{z - ae^{-i\beta}}{z - ae^{i\beta}} \right)^{i\gamma} \left(z - ae^{-i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(z - ae^{i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

$$R(z) = B_1 z + B_0 + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2}, \quad (15)$$

где $\gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi}$.

Выбирается такая ветвь функции $X_0(z)$, что

$$\left(\frac{z - ae^{-i\beta}}{z - ae^{i\beta}} \right)^{i\gamma} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1, \quad z \left(z - ae^{-i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(z - ae^{i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить семь неизвестных комплексных постоянных: A_0 , A_1 , A_2 , B_0 , B_1 , D_1 и D_2 .

Определение постоянных в решении задачи Гильберта. Из условия ограниченности функции $\phi_1'(z)$ в начале координат получаются следующие два условия:

$$D_1 + \frac{1}{a}(\cos \beta + 2\gamma \sin \beta)D_2 = ae^{-2i\beta}(\mu_1 + K)A_1, \quad (16)$$

$$D_2 = ae^{-2i\beta}(\mu_1 + K)A_2. \quad (17)$$

В силу ограниченности перемещений в начале координат

$$-(\mu_1 + K)(\bar{A}_0 + A_0) + \lambda \bar{B}_1 + \frac{e^{2i\beta}}{a}(B_0 + X_1 D_1 + X_2 D_2) = 0, \quad (18)$$

$$B_0 + B_1 a(\cos \beta - 2\gamma \sin \beta) = \frac{1}{\lambda}(\mu_1 + K)A_1, \quad (19)$$

где $X_1 = \frac{1}{a}(\cos \beta + 2\gamma \sin \beta)$, $X_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{4} + \gamma^2 + \left(\frac{3}{4} - \gamma^2 \right) \cos 2\beta + 2\gamma \sin 2\beta \right)$.

Из граничного условия на бесконечности (6), если принять вращение на бесконечности равным нулю, получается, что

$$(\mu_2 + K)A_0 + B_1 = (\mu_2 + \mu_1\kappa_2)\frac{N_1 + N_2}{4}, \quad (20)$$

$$(\mu_2 + K)aA_2 + \frac{1}{\lambda}e^{2i\beta}D_2 = -(\mu_2 + \mu_1\kappa_2)\frac{N_1 - N_2}{2}a^3e^{2i\alpha}. \quad (21)$$

Из условия однозначности смещений на бесконечности имеем

$$A_1 = 0. \quad (22)$$

Уравнения (16) – (22) образуют замкнутую систему линейных уравнений относительно семи неизвестных постоянных A_0 , A_1 , A_2 , B_0 , B_1 , D_1 и D_2 . В результате решения этой системы получается, что искомые функции имеют следующий вид:

$$\omega'(z) = \frac{1}{\mu_2 + K} \left((\mu_2 + \mu_1\kappa_2)\frac{N_1 + N_2}{4} - B_1 \right) - \frac{1}{z^2} \frac{N_1 - N_2}{2} a^2 e^{2i\alpha}, \quad (23)$$

$$F'(z) = \left(\frac{z - ae^{-i\beta}}{z - ae^{i\beta}} \right)^{i\gamma} \left(z - ae^{-i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(z - ae^{i\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left(B_1(z - a(\cos \beta - 2\gamma \sin \beta)) + \frac{D_2}{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}(\cos \beta + 2\gamma \sin \beta) \right) \right) \quad (24)$$

где

$$\left(1 + 2\frac{\mu_1(1 + \kappa_2)}{\mu_2(1 + \kappa_1)} - \frac{e^{2i\beta}}{\lambda}(\cos \beta - 2\gamma \sin \beta) \right) \operatorname{Re} B_1 = \quad (25)$$

$$= \frac{\mu_1(1 + \kappa_2)}{\mu_2(1 + \kappa_1)}(\mu_2 + \mu_1\kappa_2)\frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{1}{\lambda}(\mu_1 + K)(N_1 - N_2) \left(\frac{1}{4} + \gamma^2 \right) \sin^2 \beta \cos 2\alpha,$$

$$\left(1 + \frac{e^{2i\beta}}{\lambda}(\cos \beta - 2\gamma \sin \beta) \right) \operatorname{Im} B_1 = \frac{1}{\lambda}(\mu_1 + K)(N_1 - N_2) \left(\frac{1}{4} + \gamma^2 \right) \sin^2 \beta \sin 2\alpha, \quad (26)$$

$$D_2 = -\frac{N_1 - N_2}{2}(\mu_1 + K)a^3e^{-2i\beta}e^{2i\alpha}. \quad (27)$$

Определение напряжений и раскрытия трещины. Наибольший интерес вызывает распределение напряжений на границе раздела сред, то есть при $r = a$, $\beta < |\theta| \leq \pi$. Из выражения (9) следует, что

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})|_{z=ae^{i\theta}} = \frac{1 + \lambda}{\mu_1 + \mu_2\kappa_1} F'(ae^{i\theta}) \quad \text{при } \beta < |\theta| \leq \pi, \quad (28)$$

где функция $F'(z)$ задается выражением (24).

Следует отметить, что при $\mu_1 = \mu_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$ выражение (28) тождественно решению, полученному Н. И. Мусхелишвили [3] для дугообразной трещины в однородной упругой плоскости.

Чтобы определить раскрытие трещины, необходимо найти функцию $F(z)$. Для этого следует проинтегрировать выражение (24), откуда

$$F(z) = \left(\frac{z - ae^{-i\beta}}{z - ae^{i\beta}} \right)^{i\gamma} \left(z - ae^{-i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(z - ae^{i\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(B_1 - \frac{D_2}{za^2} \right). \quad (29)$$

С использованием формул (10), (11) показано, что раскрытие трещины

$\Delta(\theta) = (u_r^{(2)} - u_r^{(1)})|_{z=ae^{i\theta}}$ задається как

$$\Delta(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+\lambda}{2\mu_1\mu_2} e^{-i\theta} F^-(ae^{i\theta}) \right) \quad \text{при } |\theta| < \beta, \quad (30)$$

где функция $F(z)$ определяется выражением (29).

Коэффициенты интенсивности напряжений вводятся следующим образом:

$$K_1^- + iK_2^- = \lim_{\theta \rightarrow -\beta-0} \left(\sqrt{2\pi a(\theta + \beta)} \left(\frac{z - ae^{i\beta}}{z - ae^{-i\beta}} \right)^{i\gamma} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})|_{z=ae^{i\theta}} \right),$$

$$K_1^+ + iK_2^+ = \lim_{\theta \rightarrow \beta+0} \left(\sqrt{2\pi a(\theta - \beta)} \left(\frac{z - ae^{i\beta}}{z - ae^{-i\beta}} \right)^{i\gamma} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})|_{z=ae^{i\theta}} \right).$$

После подстановки в указанные выражения формулы (28) и вычисления необходимых пределов получаются следующие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_1^- + iK_2^- = \sqrt{\pi a \sin \beta} \frac{1+\lambda}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} (2\gamma - i) \sqrt{-e^{i\beta}} \left(\frac{D_2}{a^3} e^{i\beta} - B_1 \right), \quad (31)$$

$$K_1^+ + iK_2^+ = \sqrt{\pi a \sin \beta} \frac{1+\lambda}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} (2\gamma + i) \sqrt{-e^{-i\beta}} \left(\frac{D_2}{a^3} e^{-i\beta} - B_1 \right). \quad (32)$$

Если преобразовать выражения (31) и (32) для случая однородного материала ($\mu_1 = \mu_2$, $\kappa_1 = \kappa_2$) и одноосного растяжения $N_2 = 0$, $\alpha = 0$, то получатся формулы, приведенные в [4]:

$$K_1^\pm = \frac{N_1}{4} \sqrt{\pi a \sin \beta} \left(\frac{3 + \cos^2 \beta}{3 - \cos \beta} \cos \frac{\beta}{2} + 2 \cos \frac{3\beta}{2} \right), \quad (33)$$

$$K_2^\pm = \mp \frac{N_1}{4} \sqrt{\pi a \sin \beta} \left(\frac{3 + \cos^2 \beta}{3 - \cos \beta} \sin \frac{\beta}{2} + 2 \sin \frac{3\beta}{2} \right). \quad (34)$$

Результаты численного моделирования. Приведенные ниже результаты получены для упругих постоянных $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,8$ (соответствующих коэффициенту Пуассона $\nu = 0,3$ в случае плоского деформированного состояния).

На рис. 2, 3 представлены распределения нормальных и касательных напряжений соответственно по окружности радиуса $r = a$, на рис. 4, 5 – по окружности радиуса $r = 2a$ для угла полураствора трещины $\beta = 30^\circ$, угла приложения нагрузки

$\alpha = 45^\circ$ и отношения главных напряжений на бесконечности $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{2}$. Кривая I со-

ответствует соотношению модулей упругости второго рода $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{10}$, кривая II – от-

ношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$, кривая III – отношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$.

На рис. 6 представлен график раскрытия трещины для тех же геометрических характеристик и нагрузки, что и рис. 2–5. Кривая I соответствует соотношению мо-

дулей упругости второго рода $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$, кривая II – отношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$, кривая III – отношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$.

На рис. 7 представлен график раскрытия трещины для угла полураствора трещины $\beta = 60^\circ$, угла приложения нагрузки $\alpha = 45^\circ$ и второго главного напряжения на бесконечности $N_2 = 0$. Кривая I соответствует соотношению модулей упругости второго рода $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$, кривая II – отношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$, кривая III – отношению $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$.

Из рис. 7 следует, что для указанного соотношения угла полураствора трещины и угла приложения нагрузки принятая модель является неприменимой, поскольку не учитывает наличия макрозоны контакта берегов трещины.

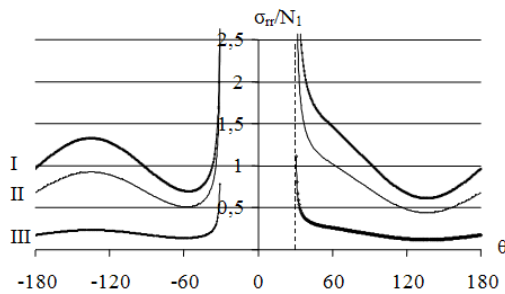


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений по окружности $r = a$

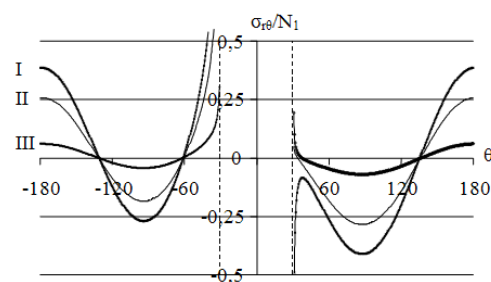


Рис. 3. Распределение касательных напряжений по окружности $r = a$

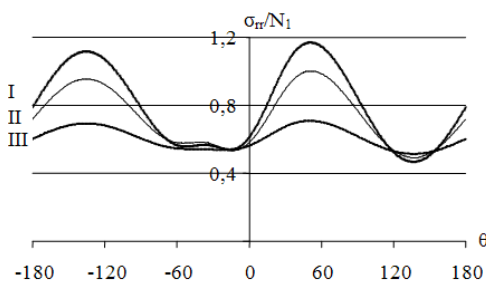


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений по окружности $r = 2a$

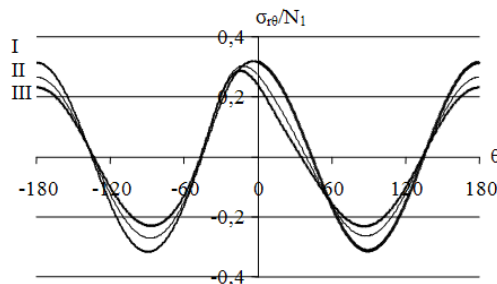


Рис. 5. Распределение касательных напряжений по окружности $r = 2a$

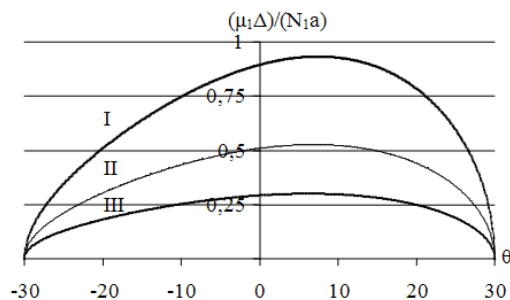


Рис. 6. Раскрытие трещины для угла $\beta = 30^\circ$

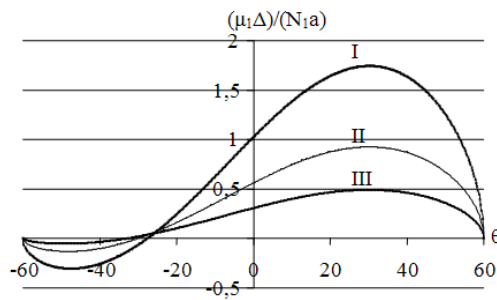


Рис. 7. Раскрытие трещины для угла $\beta = 60^\circ$

Из выражения (33) для коэффициента интенсивности нормальных напряжений в случае однородной плоскости ($\mu_2 = \mu_1$) при $\alpha = 0^\circ$ и $N_2 = 0$, можно найти угол полураствора трещины $\beta_0 = 77,05^\circ$, при котором коэффициент интенсивности напряжений $K_1 = 0$, то есть трещина должна раскрываться плавно. На рис. 8 представлен график раскрытия трещины для указанного случая нагружения при $\beta = \beta_0$; очевидно, что раскрытие трещины в окрестности ее вершины происходит плавно.

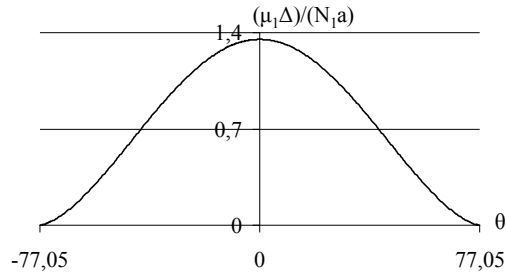


Рис. 8. Раскрытие трещины для случая плавного раскрытия

Заключение. Описанная в настоящей работе методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред в случае нагрузок, приложенных на бесконечности. Актуальным представляется применение данной методики к решению схожей задачи при наличии сосредоточенных сил. Еще одним направлением дальнейших исследований, как следует из рис. 7, может быть решение задачи для дуговой трещины с учетом контакта ее берегов.

Библиографические ссылки

1. England A. H. An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. – September 1966. – P. 637–640.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М., 1977. – 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1949. – 635 с.
4. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев, 1988. – 620 с.

Надійшла до редколегії 03.12.2012.

УДК 539.3

А. Є. Шевельова

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

РОЗРІЗ МІЖ ДВОМА ІЗОТРОПНИМИ РІЗНОРІДНИМИ МАТЕРІАЛАМИ В ПОЛІ СТИСКАЛЬНИХ ТА ЗСУВНИХ НАПРУЖЕНЬ

Досліджена тріщина між двома матеріалами з відкритими ділянками та зонами гладкого контакту її берегів під дією нормальних стискальних та зсувних напружень на віддаленні від