

Из выражения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** для коэффициента интенсивности нормальных напряжений в случае однородной плоскости ( $\mu_2 = \mu_1$ ) при  $\alpha = 0^\circ$  и  $N_2 = 0$ , можно найти угол полураствора трещины  $\beta_0 = 77,05^\circ$ , при котором коэффициент интенсивности напряжений  $K_1 = 0$ , то есть трещина должна раскрываться плавно. На рис. 1 представлен график раскрытия трещины для указанного случая нагружения при  $\beta = \beta_0$ ; очевидно, что раскрытие трещины в окрестности ее вершины происходит плавно.

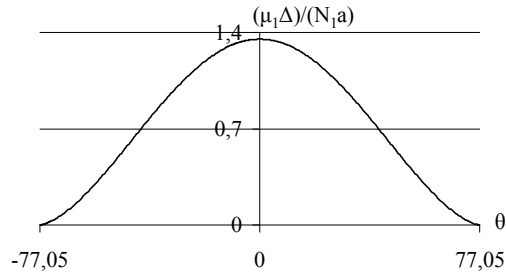


Рис. 1. Раскрытие трещины для случая плавного раскрытия

**Заключение.** Описанная в настоящей работе методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с круговым включением и дуговой трещиной на границе раздела сред в случае нагрузок, приложенных на бесконечности. Актуальным представляется применение данной методики к решению схожей задачи при наличии сосредоточенных сил. Еще одним направлением дальнейших исследований, как следует из рис. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, может быть решение задачи для дуговой трещины с учетом контакта ее берегов.

#### Библиографические ссылки

1. England A. H. An Arc Crack Around a Circular Elastic Inclusion / A. H. England // Journal of Applied Mechanics. – September 1966. – P. 637–640.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М., 1977. – 640 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1949. – 635 с.
4. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев, 1988. – 620 с.

Надійшла до редколегії 03.12.2012.

УДК 539.3

А. Є. Шевельова

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

#### РОЗРІЗ МІЖ ДВОМА ІЗОТРОПНИМИ РІЗНОРІДНИМИ МАТЕРІАЛАМИ В ПОЛІ СТИСКАЛЬНИХ ТА ЗСУВНИХ НАПРУЖЕНЬ

Досліджена тріщина між двома матеріалами з відкритими ділянками та зонами гладкого контакту її берегів під дією нормальних стискальних та зсувних напружень на віддаленні від

© А.Є. Шевельова, 2013

неї. Сформульована комбінована крайова задача Діріхле-Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. Дана графічна ілюстрація зон відкриття тріщини та областей контакту її берегів у залежності від співвідношення інтенсивності зсувних та нормальних напружень.

**Ключові слова:** тріщина між двома різнорідними матеріалами, зони відкриття, області контакту.

Исследована трещина между двумя материалами с открытыми участками и зонами гладкого контакта ее берегов под действием удаленных от нее нормальных сжимающих и сдвиговых напряжений. Сформулированная комбинированная краевая задача Дирихле-Римана, для которой получено точное аналитическое решение. Дана графическая иллюстрация зон открытия трещины и областей контакта ее берегов в зависимости от соотношения интенсивности касательных и нормальных напряжений.

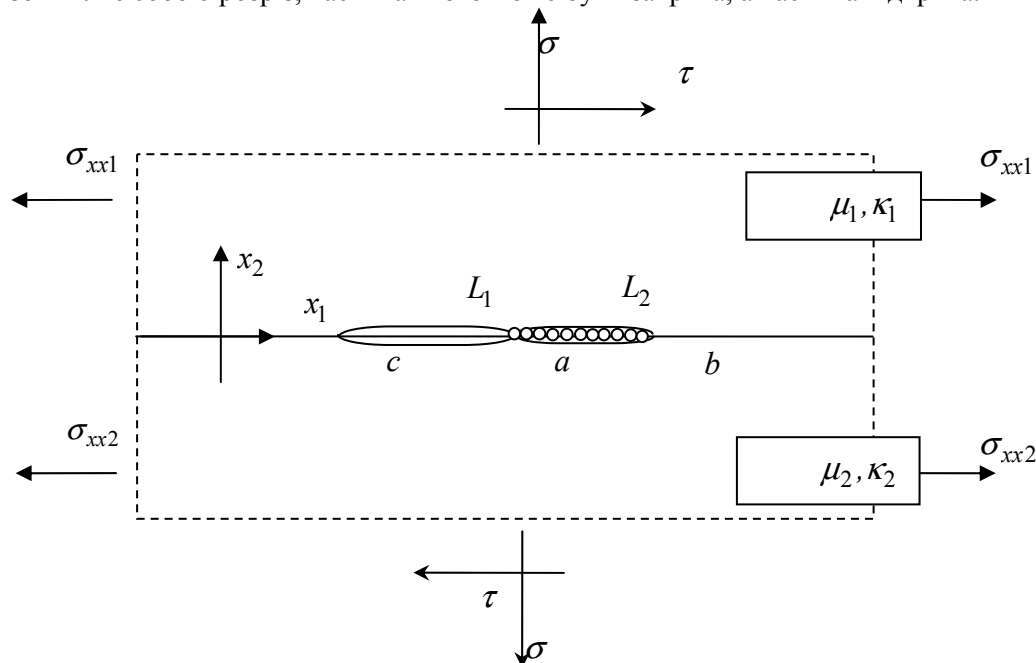
**Ключевые слова:** трещина между двумя разнородными материалами, зоны открытия, области контакта.

A crack between the two materials with open areas and areas of frictionless contact of crack surfaces under the action of remote normal compressive and shear stresses is investigated. Combined Dirichlet-Riemann problem is formulated and solved exactly. The numerical results of the normal displacement jumps and contact zone lengths with respect on the ratio of the intensity of shear and normal stresses are presented.

**Key words:** a crack between two materials, displacement jumps, contact zones.

**Вступ.** Проблема тріщини між двома матеріалами є виключно важливою для практики, тому вона визиває значну увагу дослідників. Для випадку розтяжних напружень на віддаленні від тріщини ця проблема розглядалась або в рамках «відкритої» моделі тріщини [10], або ж з врахуванням контакту її берегів [4; 6]. В той же час тріщини між двома матеріалами практично не вивчалась для випадку, коли нормальні напруження на її віддаленні є стискальними. Але, як показує чисельний аналіз [7] близької проблеми, наявність комбінації зсувних та стискальних напружень може призводити до появи відкритих ділянок тріщини та ділянок контакту її берегів. Вивчення цього питання і є основною метою даної роботи.

**Постановка задачі.** Розглянемо плоску задачу для біматеріальної площини і припустимо, що на границі розділу матеріалів вздовж відрізка  $c \leq x \leq b$ ,  $y = 0$  довшиною  $l = b - c$  порушено ідеальний зв'язок між матеріалами (рис. 1), тобто цей відрізок являє собою розріз, частина якого може бути закрыта, а частина відкрита.



**Рис. 1. Розріз між двома півплощинами в полі стискального та зсувного навантаження**

Півплощини  $y > 0$  та  $y < 0$  навантажені на нескінченості рівномірним напруженнями  $\sigma_{22}^{(j)} = \sigma$ ,  $\sigma_{12}^{(j)} = \tau$ ,  $\sigma_{11}^{(j)} = \sigma_{xy}^{\infty}$ , які забезпечують умови неперервності при переході через лінію поділу матеріалів [10].

Будемо вважати, що береги тріщини вільні від навантаження для  $x_1 \in [c, a] = L_1$  і контактують без тертя при  $x_1 \in (a, b) = L_2$ . Положення точки  $a$  вважається заздалегідь невідомим. Таке формулювання є справедливим для випадку, коли більша зона контакту виникає в околі правої вершини тріщини. У цьому випадку, відповідно з результатами роботи [8], осцилююча особливість в лівій вершині тріщини істотно не впливає на поля напружень і деформацій в правій вершині тріщини. Якщо навантаження викликає більше контактну зону в лівій вершині тріщини, то це може бути враховано простою перестановкою півплощин.

Таким чином, граничні умови на лінії поділу матеріалів можуть бути записані у вигляді:

$$[u_1] = [u_2] = 0, [\sigma_{22}] = [\sigma_{12}] = 0 \text{ для } x_1 \in L_1, \quad (1a)$$

$$\sigma_{12}^{\pm} = \sigma_{22}^{\pm} = 0, \text{ для } x_1 \in L_1, \quad (1б)$$

$$[u_2] = 0, \sigma_{12}^{\pm} = 0, [\sigma_{22}] = 0, \text{ для } x_1 \in L_2. \quad (1в)$$

де  $[f(x_1)] = f^{(1)}(x_1, 0) - f^{(2)}(x_1, 0)$  – стрибок функції на лінії поділу матеріалів; верхніми індексами  $(^1)$  і  $(^2)$  позначаються величини, що відносяться до верхньої та нижньої півплощин відповідно.

**Зведення задачі до крайової задачі Діріхле-Рімана.** Використовуючи методику робіт [1, 5], одержуємо наступні представлення компонент тензора напружень та компонент вектора переміщень через одну функцію  $F(z)$

$$\frac{\sigma_{22} - i\sigma_{12}}{g} = \begin{cases} F(z) + (z - \bar{z})\bar{F}'(\bar{z}) + \gamma F(\bar{z}), y > 0 \\ \gamma F(z) + \gamma(z - \bar{z})\bar{F}'(\bar{z}) + F(\bar{z}), y < 0 \end{cases}, \quad (2a)$$

$$\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{4g} = \begin{cases} \operatorname{Re} F(z), y > 0 \\ \gamma \operatorname{Re} F(z), y < 0 \end{cases}, \quad (2b)$$

$$\frac{u_1' + iu_2'}{g} = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{2\mu_1} F(z) - \frac{1}{2\mu_1} (z - \bar{z})\bar{F}'(\bar{z}) - \frac{\gamma}{2\mu_1} F(\bar{z}), y > 0 \\ \frac{\gamma\kappa_2}{2\mu_2} F(z) - \frac{\gamma}{2\mu_2} (z - \bar{z})\bar{F}'(\bar{z}) - \frac{1}{2\mu_2} F(\bar{z}), y < 0 \end{cases}, \quad (2c)$$

$$\text{де } g = \frac{2\mu_1\mu_2}{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}, \gamma = \frac{\kappa_1\mu_2 + \mu_1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}.$$

Значення функції на нескінченності виводиться з (2a). Вважаючи навантаження урівноваженими, що приводить, як відомо з [2], до рівності нулеві коефіцієнта при  $1/z$  в розвиненні функції  $F(z)$ , для поведінки функції  $F(z)$  отримуємо наступну формулу

$$F(z)|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma} - i\tilde{\tau} + O(z^{-2}), \quad (3)$$

$$\text{де } \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{g(1+\gamma)}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{g(1+\gamma)}.$$

Підстановка одержаного виразу у (2b) приводить до наступних спряжених значень для напружень  $\sigma_{xxk}^{\infty}$ :

$$\sigma_{xx1}^{\infty} = \frac{\sigma(3-\gamma)}{1+\gamma}, \quad \sigma_{xx2}^{\infty} = \frac{\sigma(3\gamma-1)}{1+\gamma}. \quad (4)$$

Із формул (2a) та (2c) витікають наступні вирази для напружень і похідної від стрибка переміщень вздовж осі  $x$

$$\begin{cases} \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = g[F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1)], \\ [u_1'(x_1)] + i[u_2'(x_1)] = F^+(x_1) - F^-(x_1), \end{cases} \quad (5)$$

Задовольняючи граничним умовам (1б)–(1в) за допомогою формул (5), одержуємо

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1, \quad (6)$$

$$\text{Im}[F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)] = 0,$$

$$\text{Im}[F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1)] = 0, \quad \text{для } x_1 \in L_2. \quad (7)$$

Останні два рівняння можна записати у вигляді

$$\text{Im} F_j^{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_2. \quad (8)$$

Співвідношення (6), (8) являють собою комбіновану крайову задачу Діріхле-Рімана для функції  $F(z)$ , аналітичної у всій площині за винятком ділянки  $L_1 \cup L_2$ . Цю задачу треба розв'язувати при додатковій умові на нескінченності (3) та умові рівності нулевій коефіцієнта при  $1/z$  в розвиненні функції  $F(z)$  на нескінченності.

**Результати аналітичного дослідження.** Проводячи аналіз, аналогічний [3; 9], розв'язок комбінованої граничної крайової задачі Діріхле-Рімана (6), (8) може бути представлений у вигляді:

$$F(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \quad (9)$$

де

$$P(z) = C_1 z + C_2, \quad Q(z) = D_1 z + D_2 \quad (10)$$

$$X_1(z) = ie^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-b)}, \quad X_2(z) = e^{i\phi(z)} / \sqrt{(z-c)(z-a)},$$

$$\phi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma.$$

Поведінка функцій  $X_1(z)$  та  $X_2(z)$  на нескінченності наступна:

$$X_1(z) = iz^{-2} e^{i\beta} \left( z + i\beta_1 + \frac{c+b}{2} \right) + O(z^{-3}), \quad (11)$$

$$X_2(z) = z^{-2} e^{i\beta} \left( z + i\beta_1 + \frac{c+a}{2} \right) + O(z^{-3}), \quad (12)$$

де  $\beta = \varepsilon \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}}$ ,  $\beta_1 = \varepsilon \sqrt{(a-c)(b-c)}$  та  $\lambda = \frac{b-a}{l}$ .

Використання представлення (9), (10) і умови (3) приводить до таких виразів для довільних констант  $C_1, C_2, D_1, D_2$ .

$$\begin{aligned} C_1 &= -\tilde{\tau} \cos \beta - \tilde{\sigma} \sin \beta, \quad D_1 = \tilde{\sigma} \cos \beta - \tilde{\tau} \sin \beta, \\ C_2 &= -\frac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2} D_1. \end{aligned} \quad (13)$$

З рівнянь (5), (9), (10), (13) можуть бути отримані наступні представлення напружень і стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів:

$$\text{для } x_1 \in L: \sigma_{22}^{(1)} - i\sigma_{12}^{(1)} = \left[ \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}} + i \frac{P(x_1)}{\sqrt{x_1-b}} \right] \frac{r \exp[i\phi(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{для } x_1 \in L_2: \sigma_{22}^{(1)} &= \frac{rP(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(b-x_1)}} \left[ \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \cosh \varphi_0(x_1) + \sinh \varphi_0(x_1) \right] + \\ &+ \frac{rQ(x_1)}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \left[ \cosh \varphi_0(x_1) + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \sinh \varphi_0(x_1) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$[u_1'] = \frac{2}{\sqrt{x_1-c}} \left[ \frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} \cosh \varphi_0(x_1) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1-a}} \sinh \varphi_0(x_1) \right], \quad (16)$$

$$\text{для } x_1 \in L_1: [u_1'] + i[u_2'] = 2\sqrt{\alpha} \left[ \frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - i \frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} \right] \frac{\exp[i\varphi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}}, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^*(x_1) &= 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{l(a-x_1)} + \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}, \quad r = g(1+\gamma), \quad \alpha = \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}, \\ \varphi_0(x_1) &= 2\varepsilon \tan^{-1} \sqrt{\frac{(a-c)(b-x_1)}{(b-c)(x_1-a)}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналіз формул (14), (15) показує, що нормальне напруження має кореневу особливість при  $x_1 \rightarrow a+0$  і зсувне напруження має таку ж особливість при  $x_1 \rightarrow b+0$ . Згідно з рівняннями (14), (15), відповідні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) може бути визначені як

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-a)} \sigma_{22}(x_1, 0),$$

$$k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{12}(x_1, 0), \quad (19)$$

і представлені у формі

$$k_1 = 2r \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{Q(a)}{\sqrt{a-c}}, \quad k_2 = \frac{r}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} P(b). \quad (20)$$

Далі, підстановка формул (13) приводить до таких виразів для цих КІН

$$k_1 = \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left[ \sqrt{1-\lambda} (\sigma \cos \beta + m\tau \sin \beta) - 2\varepsilon (\sigma \sin \beta - m\tau \cos \beta) \right], \quad (21)$$

$$k_2 = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left[ (\sigma \sin \beta - m\tau \cos \beta) + 2\varepsilon \sqrt{1-\lambda} (\sigma \cos \beta + m\tau \sin \beta) \right]. \quad (22)$$

Напружено-деформівний стан біля вершини  $c$  є осцилюючим. Тому коефіцієнт інтенсивності напружень біля цієї вершини вводиться наступним чином [11]:

$$K_1^c - iK_2^c = \lim_{x_1 \rightarrow c-0} \sqrt{2\pi(c-x_1)} (c-x_1)^{-i\varepsilon} \{ \sigma_{22}(x_1, 0) - i\sigma_{12}(x_1, 0) \}.$$

Представляючи на основі (14) напруження у формі

$$\sigma_{22}^{(1)} - i\sigma_{12}^{(1)} = - \left[ \frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} + i \frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} \right] \frac{r \exp[i\phi(x_1)]}{\sqrt{c-x_1}}, \quad \text{для } x_1 < c,$$

одержуємо

$$K_1^c - iK_2^c = -r\sqrt{2\pi} \vartheta^\varepsilon \left[ \frac{Q(c)}{\sqrt{a-c}} + i \frac{P(c)}{\sqrt{b-c}} \right], \quad \vartheta = \frac{\lambda}{4l(1-\lambda)}. \quad (23)$$

Останню формулу можна також представити у наступній більш зручній формі:

$$K_1^c - iK_2^c = r \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2i\varepsilon) (\sqrt{1-\lambda} D_1 + iC_1) \exp(i\varepsilon \ln \vartheta). \quad (24)$$

Цікаво відзначити, що при  $a \rightarrow b$  формула (24) приймає вигляд

$$K_1^c - iK_2^c = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2i\varepsilon) (\sigma - i\tau) \exp(-i\varepsilon \ln l)$$

і співпадає з відповідною формулою для моделі відкритої тріщини [8].

**Визначення області відкриття тріщини та зони контакту її берегів.** Знайдений розв'язок показує, що в математичному сенсі він є коректним для будь-якого значення параметра  $a$  з інтервалу  $(c, b)$ , але цей розв'язок буде фізично коректним тільки при дотриманні наступних додаткових умов

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) \leq 0 \quad \text{для } x \in L_2, \quad [u_2(x, 0)] \geq 0 \quad \text{для } x \in L_1. \quad (25)$$

Ці нерівності виконуються, якщо  $k_1 = 0$ , що призводить до наступного рівняння відносно  $\lambda$ :

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{1-\lambda}\sigma - 2\varepsilon\tau}{2\varepsilon\sigma + \tau\sqrt{1-\lambda}}, \quad (26)$$

і, крім того, треба взяти максимальний корінь з інтервалу  $(0,1)$  для того, щоб задовольнити другу з нерівностей (25). Слід зазначити, що друга нерівність (25) не виконується в зоні осциляції поблизу лівої вершини тріщини. Тим не менш, ця зона є дуже незначною, порядку  $10^{-4}$  порівняно з довжиною тріщини і може не враховуватись.

Розв'язок рівняння (26) можна знайти чисельно. Але, якщо значення  $\lambda$  є малим в порівнянні з 1, можна припустити  $\sqrt{1-\lambda} \approx 1$ , що призводить до наступної асимптотичної формули:

$$\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0 = 4 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \tan^{-1} 2\varepsilon - \chi - \pi(n-0.5) \right] \right\}, \quad (27)$$

де  $\chi = \tan^{-1}(-\tau/\sigma)$ . Значення  $n$  підбирається таким чином, щоб знайдений корінь був найбільшим з можливих коренів у проміжку  $(0, 1)$ .

Для  $\lambda = \lambda_0$  КІН  $k_1$  обертається в 0 і тріщина закривається плавно. Швидкість звільнення енергії для  $\lambda = \lambda_0$  може бути записана у вигляді

$$G^b = \Omega k_{20}^2, \quad (28)$$

$$\text{де } k_{20} = k_2|_{\lambda=\lambda_0}, \quad \Omega = \frac{1}{16\alpha} \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right).$$

**Результати чисельного аналізу.** Чисельна реалізація одержаних результатів проведена для біматеріала скомпонованого з епоксиду з характеристиками  $\mu_1 = 1,12$  ГПа,  $\kappa_1 = 1,84$  (верхня півплощина) і скла з характеристиками  $\mu_2 = 29,92$  ГПа,  $\kappa_2 = 2,12$  (нижня). Тріщина вважалась розташованою на проміжку  $(-10, 10)$  мм. Дотичне напруження вважалось рівним -10 МПа, а нормальне задавалось по формулі  $\sigma = \delta \tau$ .

Таблиця 1

Довжини зони контакту  $\lambda_0$ , КІН  $k_2$ ,  $K_1^c$  та  $K_2^c$  і швидкість звільнення енергії  $G^b$  для  $\tau = -10$  МПа і різних значень нормального напруження  $\sigma$

$\delta$	$\lambda_0$	$k_2 \times 10^{-6}$	$K_1^c \times 10^{-6}$	$K_2^c \times 10^{-6}$	$G^b$
-0,3	0,0196261	-1,87844	-0,422325	-1,83034	539,789
-0,1	0,141785	-1,80425	-0,723658	-1,65277	497,995
0,0	0,31144	-1,78762	-0,859274	-1,56756	488,860
0,1	0,522003	-1,77971	-0,973960	-1,48955	484,540
0,3	0,800846	-1,77463	-1,13498	-1,36424	481,779
0,6	0,93018	-1,77313	-1,27129	-1,23605	480,965

В таблиці 1 наведені значення довжини зони контакту  $\lambda_0$ , КІН  $k_2$  дотичного напруження в вершині  $b$ , значення КІН  $K_1^c$  і  $K_2^c$  напружень  $\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0)$  в вершині  $c$ , а також швидкість звільнення енергії  $G^b$  в ве-

ршині  $b$ . Слід відзначити, що швидкість звільнення енергії в вершині  $c$  є такою ж.

З одержаних результатів видно, що зона розкриття берегів тріщини присутня для всіх наведених значень  $\delta$ . При цьому для досить великих стискальних напружень ця зона стає досить малою. В той же час ріст стискального нормального напруження веде до зменшення модулів КІН дотичних напружень і швидкості звільнення енергії.

На рис. 2 наведено графіки розкриття тріщини для тих же характеристик, що і в таблиці 1 для  $\delta = -0,3; -0,1; 0; 0,1; 0,3; 0,6$ , а на рис. 3 даються відповідні графіки нормального напруження в зоні контакту берегів тріщини. З цих графіків випливає, що нерівності (25) виконуються, а значить одержаний розв'язок є фізично коректним.

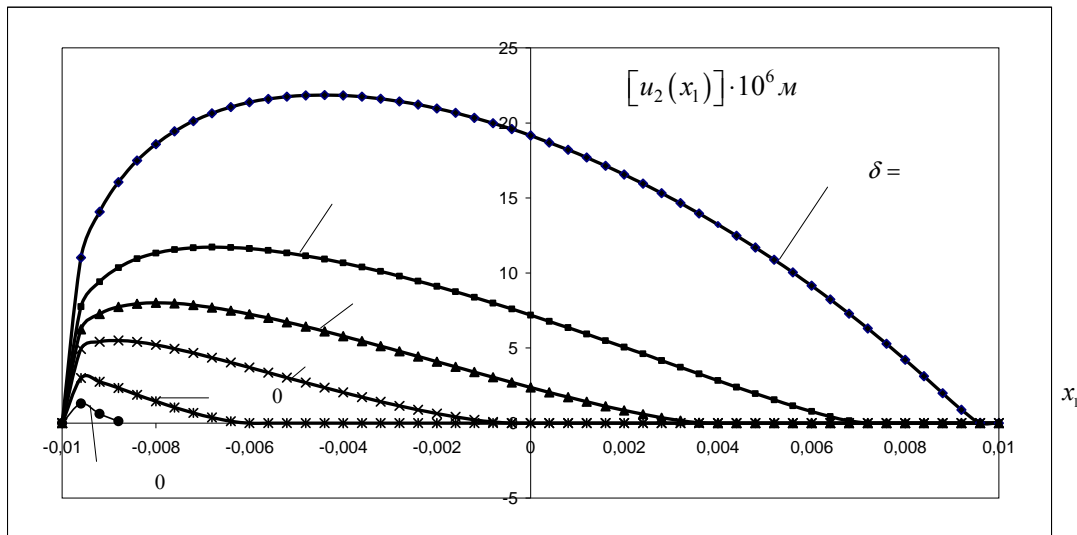


Рис. 2. Розкриття тріщини для  $\tau = -10$  МПа і різних значень нормального напруження  $\sigma$

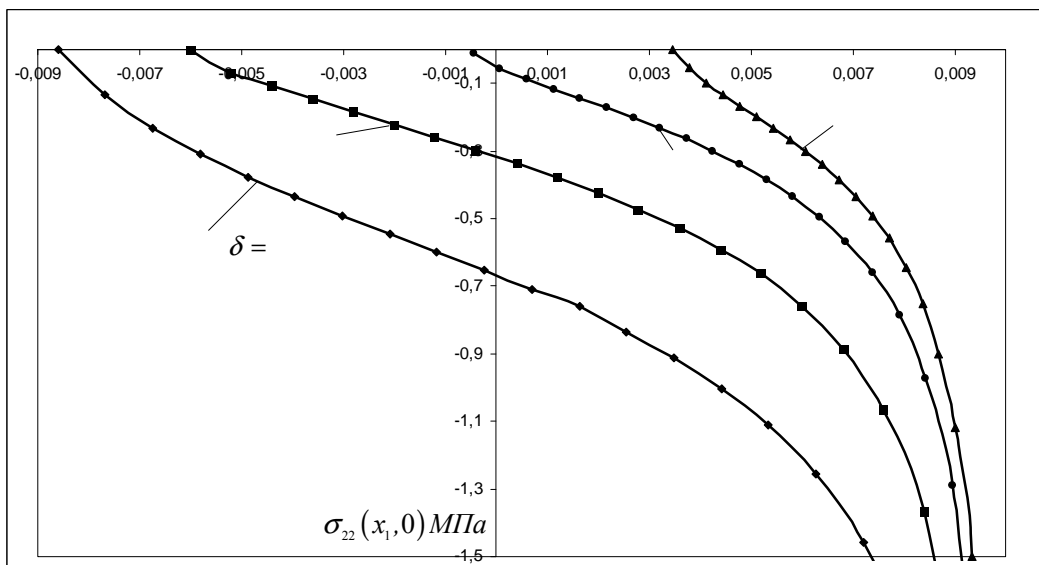


Рис. 3. Нормальне напруження в зоні контакту для  $\tau = -10$  МПа і різних значень нормального напруження  $\sigma$



**Висновки.** Розглянута тріщина між двома матеріалами під дією нормальних та зсувних напружень на віддаленні від неї. Основна увага приділена випадку, коли поле нормальних напружень є стискальним. Вважається, що в цьому випадку мають місце відкриті ділянки тріщини та ділянки контакту її берегів.

З використанням представлень переміщень та напружень через одну кусково-аналітичну функцію поставлена проблема зведена до комбінованої крайової задачі Діріхле-Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. З цього розв'язку отримано вирази для напружень та стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів, а також отримано досить просте трансцендентне рівняння (26), що визначає границю поділу відкритої і закритої ділянок тріщини.

Проведений чисельний аналіз отриманих аналітичних результатів. Встановлено, при наявності зсувних напружень, навіть при стискальних нормальних напруженнях значна частина розрізу виявляється відкритою. Продемонстрована графічна ілюстрація зон відкриття тріщини та областей контакту її берегів у залежності від співвідношення інтенсивності зсувних та нормальних напружень. Представлені коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкість вивільнення енергії для вершин тріщини.

### Бібліографічні посилання

1. **Лобода В. В.** Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів / В. В. Лобода, І. В. Харун // Мат. методи та фізико-механічні поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 103 – 113.
2. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 707 с.
3. **Нахмевин Е.Л.** Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом / Е.Л. Нахмевин, Б. М. Нуллер // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, вып. 4. – С. 663 – 673.
4. **Симонов И. В.** Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений / И. В. Симонов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969 – 976.
5. **Черепанов Г.П.** О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами / Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1.
6. **Comninou M.** The interface crack / M. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44. – P. 631 – 636.
7. **Dorogoy A.** Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution / A. Dorogoy, L. Banks-Sills // Engineering Fracture Mechanics – 2005. – 72. – P. 2758 – 2773.
8. **Dundurs J.** An opportunistic analysis of the interface crack / J. Dundurs, A.K. Gautesen // Int. J. Fract. – 1988 – 36 – P. 151 – 159.
9. **Loboda V. V.** The quasi-invariant in the theory of interface crack / V.V. Loboda // Engineering Fracture Mechanics. – 1993. – Vol. 44, No 4. – P. 573 – 580.
10. **Rice J.R.** Plane problem of cracks in dissimilar media / J.R. Rice, G.C. Sih // J. Appl. Mech. – 1965. – 32. – P. 418 – 423.
11. **Rice J.R.** Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks / J.R. Rice // J. Appl. Mech. – 1988. – 55. – P. 98 – 103.

*Надійшла до редколегії 22.10.2013.*