Костюков, Н.Н. Лычагин // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2012. – С. 3 – 15.

1. **Голубенко Н.С.** О формулировании вариантов строительства ветровых электростанций по оптимальным значениям технико-экономических показателей / Н.С. Голубенко, С.И. Довгалюк, А.М. Фельдман, В.Б. Худик // Матеріали VI міжнар. наук. конф. «Відновлювана енергетика XXI століття». – Крим, 2005. – С. 111 – 114.

Надійшла до редколегії 22.10.2013.

УДК 532.5

Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА БЛОХА-ГИНЕВСКОГО

На основі аналогії між функціями Гріна та оберненими матрицями в методі граничних елементів запропоновано алгоритм, що узагальнює метод Блоха-Гіневського та дозволяє ефективно чисельно розв‘язувати крайові задачі для рівняння Лапласа у багатозв'язних областях складної геометричної форми. Запропонований алгоритм може бути застосовано для чисельного розв‘язку задач гідродинамічної взаємодії.

Ключові слова: Метод Блоха-Гіневського, потенціальна течія ідеальної нестисливої рідини, метод граничних елементів, функція Гріна.

На основе аналогии между функциями Грина и обратными матрицами в методе граничных элементов предложен алгоритм, обобщающий метод Блоха-Гиневского и позволяющий эффективно численно решать краевые задачи для уравнения Лапласа в многосвязных областях сложной геометрической формы. Предложенный алгоритм может быть применен для численного решения задач гидродинамического взаимодействия.

Ключевые слова: Метод Блоха-Гиневского, потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, метод граничных элементов, функция Грина.

On the base of simplicity of Green's functions and inverse matrices in boundary element method, it is proposed an algorithm, which generalizes Blokh-Ginevskiy's method and gives an opportunity to effectively, numerically solve boundary-value problems for Laplace equation in multiconnected complex geometrical shape domains. The proposed algorithm can be applied for numerical solution of hydrodynamic interaction problems.

Key words: Blokh-Ginevskiy's method, potential ideal incompressible fluid flow, boundary element method, Green's function.

Введение. Настоящая работа продолжает серию работ авторов [1–6], посвященных применению методов вычислительной теории потенциала к задачам гидродинамического взаимодействия. Задачи данного класса возникают всякий раз, когда в потоке присутствуют независимые объекты – обтекаемые тела, твердые стенки, вихревые образования, свободные поверхности, границы раздела несмешивающихся жидкостей, контактные разрывы скоростей, ударные волны, пограничные слои и т. д. Простое перечисление взаимодействующих объектов показывает степень сложности рассматриваемой проблемы, учитывая, что даже простой расчет каждого из гидродинамических эффектов, связанных с упомянутыми объектами, может вызвать определенные затруднения, а расчет их взаимодействия неизбежно потребует столь значительных усилий и ресурсов, что не всегда может быть осуще-

ствлен с приемлемыми затратами труда и машинного времени. В результате, общей тенденцией в задачах гидродинамического взаимодействия является максимальное упрощение используемых математических моделей. Разнообразие объектов гидродинамического взаимодействия не позволяет создать сколько-нибудь общую теорию, а, тем более, методику расчета этого класса гидродинамических явлений. Поэтому приходится довольствоваться методами расчета, развитыми для отдельных частных случаев гидродинамического взаимодействия или для нескольких частных случаев, объединенных общими свойствами. Так, например, в уже упоминавшихся работах [1–6] рассмотрены взаимодействия обтекаемых контуров, свободных поверхностей и уединенных вихревых структур в потоках несжимаемой жидкости при скоростях течения, соответствующих большим числам Рейнольдса, то есть, были рассмотрены случаи, которые успешно моделируются течением идеальной несжимаемой жидкости. В тех же работах практически и теоретически обоснована эффективность применения вычислительной теории потенциала для решения такого класса задач. Основными объектами рассмотрения данной работы будут те же группы задач гидродинамического взаимодействия, но наибольшее внимание будет уделено многоконтурному взаимодействию.

С вычислительной точки зрения задачи гидродинамического взаимодействия, и особенно многоконтурного взаимодействия – это, прежде всего, задачи, сформулированные в областях исключительно сложной геометрической формы. Наличие в потоке уединенных вихревых структур и свободных поверхностей вносит в задачу нестационарные и нелинейные эффекты (конвективные для вихревых структур и нелинейности, связанные с подвижностью или неизвестностью границы, для свободных поверхностей). При применении традиционных численных методов – метода конечных разностей и метода конечных элементов – к краевым задачам, сформулированным в областях сложной геометрической формы, возникает проблема построения расчетной сетки, обеспечивающей необходимую точность расчета при приемлемых затратах вычислительных ресурсов. К сожалению, эту проблему зачастую не удается разрешить даже в случае существенного упрощения математической модели – переходу к потенциальному течению идеальной несжимаемой жидкости. Очевидным выходом из этой затруднительной ситуации является не только максимальное упрощение математической модели, но и замена традиционных численных подходов численными методами теории потенциала, которые не столь чувствительны к сложности формы области решения. К сожалению, даже применение методов вычислительной теории потенциала не во всех случаях обеспечивает надлежащую эффективность численного решения. Необходимое повышение эффективности численного подхода может быть достигнуто как за счет применения приемов, улучшающих эффективность алгоритмов вычислительной теории потенциала, например, многосеточные алгоритмы, методы локализации и т.д., так и благодаря применению приближенных подходов, использовавшихся при приближенном аналитическом решении задач рассматриваемого класса. Развитию последнего направления и посвящена настоящая работа.

Актуальность выбранной тематики исследований. Вопрос об актуальности проблемы гидродинамического взаимодействия на современном этапе развития вычислительной гидромеханики и механики жидкости и газа в целом достаточно подробно рассмотрен в работах [1–6]. Остановимся здесь на проблеме взаимодействия множества материальных объектов, удаленных друг от друга на расстояния, достаточно большие или, по крайней мере, соизмеримые по сравнению с размерами

объекта. Эффекты взаимодействия в этом случае, как правило, невелики, и традиционно ими пренебрегали. Однако повышение требований к точности гидродинамического расчета вынуждает эти эффекты учитывать. Таким образом, актуальность рассматриваемой проблемы достаточно очевидна, поскольку ее разрешение является одним из ключевых условий повышения точности прикладных гидродинамических расчетов.

История вопроса. Поскольку большинство задач гидродинамического взаимодействия является очевидными элементарными обобщениями традиционных задач гидромеханики уединенного тела, формулировки задач из рассматриваемого класса были получены практически одновременно с формулировками классических задач, чего, однако, нельзя сказать о решениях. Первые решения задач гидромеханики были получены для областей канонической геометрической формы, а задачи гидродинамического взаимодействия, как правило, связаны с куда более сложными формами областей, поэтому в течение достаточно продолжительного времени эти задачи не вызывали ни теоретического, ни практического интереса. И лишь когда возникли прикладные задачи, связанные с эффектами гидродинамического взаимодействия, а именно, конструктивно-компоновочные схемы «биплан» и «тандем» в авиации, маневрирование судов в каналах и на близких расстояниях, расчет решетки профилей в турбомашине, проблему гидродинамического взаимодействия стали решать как теоретически, так и экспериментально. Поскольку первые попытки подобных исследований были не слишком успешными, сейчас затруднительно установить приоритеты в соответствующих исследованиях, но, очевидно, что эти исследования были начаты в начале XX века, и их результаты нашли отражение, как в классических учебниках [7; 8], так и в монографии [9], где было получено точное аналитическое решение задачи о биплане в плоской постановке в виде рядов по гипергеометрическим функциям. В книге Ф. Морса и Р. Фешбаха [10;11] задачи о взаимодействии двух цилиндров и двух сфер в потенциальном потоке были сформулированы в биполярной системе координат и также решены методом разделения переменных. Идеи и методы, изложенные в книгах [9 – 11], стимулировали появления множества работ, например, работы В.Ю. Мазура [12; 13] и В.С. Сабанеева [14 – 16]. Результаты аналитического этапа исследования гидродинамического взаимодействия были подытожены и систематизированы в первой и, к сожалению, практически единственной специализированной монографии по рассматриваемой проблеме [17].

Все упомянутые выше результаты теоретических исследований относились к случаю взаимодействия двух контуров. Возможности аналитических методов для случая большого числа взаимодействующих объектов были явно недостаточны. Поэтому авторами работы [18] был предложен приближенный аналитический метод расчета гидродинамического взаимодействия, впоследствии названный по именам авторов методом Блоха-Гиневского. Данный подход существенно расширил класс эффективно решаемых задач гидродинамического взаимодействия.

По мере развития авиации и с ростом скоростей дозвуковой авиации все большее значение приобретала проблема аэродинамической интерференции, которая, по сути дела, является частным случаем гидродинамического взаимодействия. Однако в отличие от вышеупомянутых задач аэродинамическая интерференция – взаимодействие крыло - фюзеляж, крыло - гондола двигателя, крыло - подвесной бак, крыло - хвостовое оперение, фюзеляж - хвостовое оперение и т.д. – предполагала близкое расположение взаимодействующих объектов и существенную трехмер-

ность задач. Очевидно, что задачи аэродинамической интерференции не могли быть решены ни аналитическими методами, ни методом Блоха-Гиневского, поэтому данный класс задач потребовал разработки специальных численных подходов. Применение традиционных численных методов – метода конечных элементов и метода конечных разностей – к задачам гидродинамического взаимодействия успеха не принесло, поэтому предпочтение было отдано численным реализациям методов теории потенциала, применение которых в аэродинамике началось с пионерской работы Дж. Хесса и А.М.С. Смита [19]. Данная работа стимулировала появление целой серии работ, результатом которых было появление и дальнейшее достаточно широкое использование так называемого панельного метода (существуют различные точки зрения на взаимосвязь панельного метода и метода граничных элементов, некоторые исследователи считают, что это один и тот же метод, а различия в них носят терминологический характер, другая группа специалистов усматривает в этих методах алгоритмические различия, которые, впрочем, весьма невелики, но большинство полагает метод граничных элементов естественным обобщением и развитием панельного метода). Обзор работ по панельным методам можно найти в основополагающих монографиях по методу граничных элементов [20; 21]. Панельный метод был реализован в нескольких комплексах прикладных программ, разработанных в 60-е - 70-е годы XX века. Первым значительным достижением панельного метода был расчет аэродинамики широкофюзеляжных самолетов фирмы Боинг. Как ни удивительно, но развитие панельных методов не привело к написанию итоговой монографии, и метод остался освещен только в отдельных статьях и отчетах.

Как альтернатива панельному методу развивался метод дискретных вихрей, предложенный С.М. Белоцерковским [22; 23]. В США аналогичные работы проводились под руководством А. Чорина [24]. Метод дискретных вихрей заметно проще панельного метода, но уступает ему в точности, с другой стороны, метод дискретных вихрей удобен для анализа взаимодействия с вихревыми структурами. Однако, поскольку метод дискретных вихрей не представляет особого интереса с точки зрения тематики данной работы, подробно останавливаться на его истории не будем.

Создание метода граничных элементов завершило начальный этап развития вычислительной теории потенциала. Однако метод граничных элементов позиционировался К. Бреббия как универсальный численный метод и не рассматривался как специализированное средство решения частных задач, в том числе задач гидродинамического взаимодействия, что привело к определенному застою в вопросах решения частных классов задач, требующих развития специализированных алгоритмов. Более подробный анализ развития метода граничных элементов можно найти в статье [5; 6].

С середины 70-х годов XX века в вычислительной гидромеханике стала превалировать точка зрения, согласно которой к определяющим факторам течения были отнесены вязкие эффекты, то есть, главной вычислительной проблемой гидроаэродинамики больших скоростей стала проблема малого параметра при старшей производной. Соответствующие формулировки задач оказались непригодными для эффективного применения существующих алгоритмов вычислительной теории потенциала. Быстрое развитие методов конечных разностей и конечных элементов практически вытеснило вычислительную теорию потенциала из основных расчетных алгоритмов вычислительной гидромеханики. И только в последнее десятилетие возможности вычислительной техники и развитие алгоритмической базы осно-

вных численных методов достигли такого уровня, что позволяют эффективно решать достаточно простые задачи гидродинамического взаимодействия на основе уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса. Что касается более сложных случаев гидродинамического взаимодействия, то речь идет о единичных расчетах, проведенных на уникальном вычислительном оборудовании (мощных кластерах или суперкомпьютерах). В результате в теории гидродинамического взаимодействия с середины 80-х годов XX века наблюдается застой. Эта ситуация подтверждает сделанный в работе [5; 6] вывод о неравномерности развития гидромеханики и механики сплошной среды в целом: области, к которым эффективно применимы основные численные методы, развиваются быстрее, а области, в которых эти методы применить не удается, отстают в развитии.

Анализ современного состояния вопроса и достижений по теме исследований. Основываясь на вышеизложенном, можно сделать следующий вывод: доминирующие в вычислительной гидромеханике численные методы конечных разностей и конечных элементов не обеспечивают надлежащих возможностей решения задач гидродинамического взаимодействия, а методы вычислительной теории потенциала предоставляют такие возможности только в рамках простейших математических моделей. При этом для простейших конфигураций расчеты проводились как теми, так и другими методами, а в рамках модели потенциального течения даже построен ряд аналитических решений. Но для многоконтурного взаимодействия эффективным оказался только метод Блоха-Гиневского, да и тот содержит ряд неоправданных упрощений.

Принципиально важным моментом для дальнейшего изложения является применение функций Грина в вычислительной теории потенциала. Методы функций Грина являются неотъемлемой частью классической теории потенциала. Использование функций Грина имеет многолетнюю историю, достаточно сказать, что это один из самых старых подходов к решению краевых задач математической физики. Рассмотрение истории развития методов функций Грина и их места в современной теории потенциала требует отдельного обширного исследования, которое, конечно, не может быть проведено в ограниченных рамках настоящей работы, поэтому ограничимся здесь только указанием некоторых тенденций, проявившихся в рассматриваемой области, а более подробную информацию относительно разных аспектов использования функций Грина в современном математическом моделировании и в вычислительной механике в частности можно найти в монографиях [25; 26] .

Применение функций Грина при решении краевых задач математической физики ограничено сложностью построения соответствующих функций Грина, поскольку оно требует аналитического решения краевой задачи примерно такого же уровня сложности, поэтому на практике широко используется только достаточно ограниченное количество функций Грина, построенных для областей простейшей геометрической формулы методом инверсии (отображений). Идея использования функций Грина вместо фундаментальных решений в численных методах теории потенциала достаточно очевидна и выдвигалась в различных работах неоднократно. Очевидны также достоинства такого подхода, позволяющего исключить из формулировки граничного интегрального уравнения часть границы области решения, которая совпадает с границей области определения функции Грина (разумеется, интегралы с известными из граничных условий функциями по этой части границы сохраняются). В то же время, поскольку структура функции Грина сложнее структуры соответствующего фундаментального решения, применение функций Грина не

всегда приводит к выигрышу в затратах вычислительных ресурсов, кроме того, применение функций Грина снижает алгоритмичность подхода. В результате, в практических расчетах используют те же самые функции Грина, построенные для простейших областей. Более подробный анализ этого вопроса можно найти в работе [27].

В той же работе [27] высказана мысль об аналогии матрицы системы линейных алгебраических уравнений в методе граничных элементов и функции Грина. Идея эта является естественным развитием классической теории Фредгольма. Обратные матрицы нередко использовались в различных алгоритмах вычислительной теории потенциала, особенно в методе дискретных вихрей, но только в монографиях [25; 26] высказана аналогичная мысль, однако также не конкретизирована. Далее рассмотрим этот вопрос подробнее.

Цель работы. Классический метод Блоха-Гиневского, кратко описанный ниже, был предназначен для конструирования решения задачи внешнего обтекания потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости в области, содержащей множество обтекаемых объектов, из решений аналогичных задач для уединенного тела. Данный метод позволял в рамках одного итерационного процесса объединить широкий спектр как точных аналитических решений, так и приближенных решений краевых задач обтекания, а также допускал использование решений, полученных инженерными методами, которые, строго говоря, не являются решениями соответствующих краевых задач, лишь бы они все были представлены в виде удобных для вычислений квадратур. По той же причине методы теории потенциала, в частности, методы функций Грина не получили распространения в практике применения классического метода Блоха-Гиневского из-за интегральной формы представления решения. Гибкость и универсальность рассматриваемого метода естественно побуждали интегрировать в метод Блоха-Гиневского численные решения соответствующих задач обтекания уединенных тел. К сожалению, ни метод конечных разностей, ни метод конечных элементов, ни любой другой алгоритм, основанный на дискретизации области решения, не могут быть эффективно использованы в итерационных процедурах метода Блоха-Гиневского. Но, в то же время, при численной реализации недостатки интегральных представлений теории потенциала оказываются не столь существенны, ведь даже в численных методах теории потенциала используются псевдоаналитические представления. Это обстоятельство послужило одной из основополагающих идей настоящей работы. Вторая идея, положенная в основу работы, заключается в известной аналогии функций Грина и определенных матриц в методе граничных элементов. Исходя из двух указанных идей, цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: обобщить метод Блоха-Гиневского на случай использования аналитических и численно-аналитических представлений теории потенциала и разработать численные реализации обобщенного метода Блоха-Гиневского.

Аналогия функций Грина и разрешающих матриц в методе граничных элементов. Перед тем, как формулировать обобщенный алгоритм, целесообразно рассмотреть упомянутую аналогию функций Грина и разрешающих матриц в методе граничных элементов, тем более, что, насколько известно авторам, ранее эта аналогия в литературе подробно не рассматривалась.

Будем использовать здесь классическое определение функции Грина [25; 26]. Поскольку в дальнейшем в данной работе основное внимание уделяется уравнению Лапласа, вопрос об использовании функции Грина был рассмотрен на примере кра-

евых задач для уравнения Лапласа, имея в виду, однако, что данный подход без труда может быть распространен на другие краевые задач и, прежде всего, линейные эллиптические задачи.

Пусть необходимо найти функцию u, определенную, вообще говоря, в многосвязной области D с границей Γ, и удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 , \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа. Здесь и далее для простоты изложения будем предполагать искомую функцию u на границе гладкой вместе со своей нормальной производной, а границу Γ удовлетворяющей условиям Липшица (ляпуновская кривая в плоском случае и ляпуновская поверхность в пространственном). Хотя, несколько забегая вперед, следует отметить, что в классическом методе Блоха-Гиневского никаких общих ограничений ни на граничные условия, ни на формы границ не налагалось, ограничения могли возникать при решении частных задач обтекания уединенных объектов, но ограничения для одного объекта не обязательно распространялись на другой. Приведенные выше предположения относительно рассматриваемой задачи даже несколько жестче, чем традиционно используемые в теории потенциала при применении функций Грина. В вычислительной теории потенциала граничные условия предполагаются кусочно-непрерывными с конечным и относительно небольшим числом разрывов, а требования к форме границы на практике настолько легко обходятся, что, как правило, не упоминаются совсем. Сделанные же предположения позволяют применять методы функций Грина и метод граничных элементов в классических вариантах без каких-либо ограничений и модификаций.

На границе Γ поставим условия Дирихле или Неймана, простоты ради смешанные граничные условия рассматривать не будем.

Условие Дирихле:

$$u\big|_{\Gamma} = f_1 , \tag{2}$$

условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_2 , \tag{3}$$

Определим функцию Грина задач Дирихле и Неймана традиционным способом, как функцию, удовлетворяющую уравнению (поскольку оператор Лапласа – самосопряженный)

$$\Delta G = -\delta(X, X_0) , \tag{4}$$

(где δ – дельта-функция Дирака; X_0 – точка источника; X – точка наблюдения) и соответствующим граничным условиям:

функция Грина задачи Дирихле:

$$G\big|_{\Gamma} = 0 , \tag{5}$$

функция Грина задачи Неймана:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 . \tag{6}$$

В теории потенциала известен интегральный аналог уравнения (1)

$$C(X_0)u(X_0) = \int_\Gamma \frac{\partial u(X)}{\partial n(X)} G(X, X_0) ds(X) - \\ - \int_\Gamma u(X) \frac{\partial G(X, X_0)}{\partial n(X)} ds(X), \tag{7}$$

где

$$C(X_0) = \begin{cases} 1, X_0 \in D, \\ 1/2, X_0 \in \Gamma, \\ 0, X_0 \notin D, X_0 \notin \Gamma. \end{cases}$$

Подставляя в (7) соответствующие граничные условия, получим для задачи Дирихле:

$$C(X_0)u(X_0) = -\int_\Gamma u(X) \frac{\partial G_D(X, X_0)}{\partial n(X)} ds(X) \ . \tag{8}$$

Соответствующие производные по нормали на границе или вблизи границы:

$$C(X_0) \frac{\partial u(X_0)}{\partial n(X_0)} = -\int_\Gamma u(X) \frac{\partial^2 G_D(X, X_0)}{\partial n(X) \partial n(X_0)} ds(X) \ . \tag{9}$$

Аналогично для задачи Неймана:

$$C(X_0)u(X_0) = \int_\Gamma \frac{\partial u(X)}{\partial n(X)} G_N(X, X_0) ds(X) \ , \tag{10}$$

$$C(X_0) \frac{\partial u(X_0)}{\partial n(X_0)} = \int_\Gamma \frac{\partial u(X)}{\partial n(X)} \frac{\partial G_N(X, X_0)}{\partial n(X_0)} ds(X) \ . \tag{11}$$

В вычислительной практике при организации итерационных процессов аналитическое интегрирование в соотношениях (8) – (11) невозможно, поэтому в этих формулах проводят численное интегрирование, для чего необходимо определение граничных функций в некотором наборе узловых точек. Обозначим такой набор как $\{X_i\}$. Тогда дискретные аналоги соотношений (8), (9) на множестве точек $\{X_i\}$:

$$\{C(X_i)u(X_i)\} = \left(G^1_{Dij}\right)\{u(X_j)\}, \tag{12}$$

$$\left\{C(X_i)\frac{\partial u}{\partial n}(X_i)\right\} = \left(G^2_{Dij}\right)\{u(X_j)\}. \tag{13}$$

Дискретные аналоги соотношений (10), (11) на множестве точек $\{X_i\}$:

$$\{C(X_i)u(X_i)\} = \left(G^1_{Nij}\right)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_j)\right\}, \tag{14}$$

$$\left\{C(X_i)\frac{\partial u}{\partial n}(X_i)\right\} = \left(G^2_{Nij}\right)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_j)\right\}, \tag{15}$$

где матрицы с верхним индексом «2» получаются из матриц с верхним индексом «1» простым дифференцированием по направлению.

В классическом методе граничных элементов за основу выбирается интегральное уравнение (7) при условии, что $G = \varphi_0$, где φ_0 – фундаментальное решение,

то есть функция Грина для неограниченного пространства. Не будем останавливаться на различиях регулярных и сингулярных алгоритмов метода граничных элементов, определяемых расположением точек коллокации, которые будут отличаться лишь значением функции C в левой части. Классические коллокационные алгоритмы метода граничных элементов предполагают аппроксимацию известных и неизвестных (подлежащих определению) граничных значений при помощи одного и того же набора узловых точек. Как и ранее, обозначим такой набор как $\{X_i\}$. Тогда дискретный аналог граничного интегрального уравнения (7) имеет вид

$$\{C(X_i)u(X_i)\} = (F_{ij})\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_j)\right\} - (H^*_{ij})\{u(X_j)\}, \tag{16}$$

или

$$(F_{ij})\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_j)\right\} - (H_{ij})\{u(X_j)\} = 0\,, \tag{17}$$

где матрицы в правой части системы линейных алгебраических уравнений (16) иногда называются матрицами влияния и получаются в результате интегрирования по соответствующим граничным элементам произведений фундаментального решения или его нормальной производной и пробных функций. Очевидно, что одна из матриц влияния в (17) сворачивается с известным из граничных условий вектором и образует правую часть разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, а вторая, которая умножается на вектор неизвестных, оказывается матрицей искомой системы линейных алгебраических уравнений.

В результате решение задачи Дирихле имеет вид

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_i)\right\} = (F^{-1}{}_{ik})(H_{kj})\{u(X_j)\}, \tag{18}$$

а задачи Неймана – вид

$$\{u(X_i)\} = (H^{-1}{}_{ik})(F_{kj})\left\{\frac{\partial u}{\partial n}(X_j)\right\}. \tag{19}$$

Сравнивая решения (18) и (19) с решениями (13) и (14), не трудно увидеть аналогию между матрицами, стоящими в правых частях, в чем и заключается рассматриваемая аналогия между функциями Грина и разрешающими матрицами метода граничных элементов. Данная аналогия намного шире и глубже, чем приведенные выше рассуждения, и может быть продолжена и развита, однако приведенных соображений вполне достаточно для целей данной работы. На практике это означает, что при программной реализации итерационных процессов вместо функций Грина можно хранить соответствующие разрешающие матрицы, в результате чего эффективность такой программной реализации резко возрастет.

Метод Блоха-Гиневского. Как отмечалось выше, метод Блоха-Гиневского основан на суперпозиции решений индивидуальных задач обтекания уединенных объектов. На нулевом шаге итерационного процесса решение ищется в виде суммы указанных индивидуальных течений. А на последующих шагах итерации предполагается, что каждое из тел обтекается потоком, генерируемым возмущениями, вносимыми остальными телами на предыдущем шаге итерации. При этом неявно делается предположение о том, что возмущения, вносимые в поток другими телами, генерируют тот же тип обтекания, что и первичное течение. Следует сказать, что подобная ситуация имеет место отнюдь не всегда. Наиболее распространенный случай – обтекание поступательным на бесконечности потоком – для удлиненных

удобообтекаемых тел под малыми углами атаки удовлетворяет требованиям метода Блоха-Гиневского только при очень специфических взаимных расположениях тел. Вызывает сомнение также и предположение о поступательном характере возмущенного течения. Такой характер возмущений оказывается достаточно точным лишь на существенных расстояниях. Учесть неравномерность поля возмущенного течения не удается, поскольку используется аналитическое решение для поступательного на бесконечности случая. К тому же очень значительным недостатком данного подхода является отсутствие вследствие парадокса Даламбера в построенных приближениях сил гидродинамического взаимодействия. (Строго говоря, в данном случае вследствие парадокса Даламбера не возникает только дополнительной силы лобового сопротивления, но дополнительная подъемная сила может возникнуть, а дополнительная сила лобового сопротивления может быть введена искусственно при помощи одного из распространенных инженерных приемов. Однако нельзя дать никаких гарантий достоверности таких результатов, поскольку инженерные подходы традиционно основывались на обширном экспериментальном материале, а для данной проблемы специальных экспериментов никогда не проводилось. Кроме того, сила гидродинамического взаимодействия отнюдь не сводится только к подъемной силе даже в случае потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости.) С точки зрения прикладной гидромеханики указанные недостатки, может быть, и не столь важны, поскольку возмущение быстро убывает с расстоянием, еще быстрее убывают производные от возмущения, определяющие возмущение скорости, а в формулы для силы взаимодействия скорости входят в квадрате, то есть, сила взаимодействия с расстоянием между объектами убывает очень быстро, поэтому метод Блоха-Гиневского дает удовлетворительные результаты для многих практически важных случаев.

Сформулируем классический метод Блоха-Гиневского для задачи (1) – (3), имея в виду, что под границей Γ подразумевается объединение границ обтекаемых контуров и, может быть, некоторых внешних границ течения $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$. То есть в области решения есть N границ, для каждой из которых известно решение $u_i^0(X, V(X_i))$, где параметр $V(X_i)$ определяет условия обтекания (движения) и отнесен к точке (X_i) – центру i-го объекта. В данном случае $V(X_i)$ – это просто скорость потока.

Нулевое приближение в методе Блоха-Гиневского имеет вид

$$U^0(X) = \sum_{i=1}^{N} u_i^0(X, V(X_i)). \qquad (20)$$

Первое приближение равно

$$U^1(X) = \sum_{i=1}^{N} u_i^0(X, V^1(X_i)), \qquad (21)$$

где

$$V^1(X_i) = L\left(\sum_{j=1,\, i\neq j}^{N} u_j^0(X, V(X_j)) \right), \qquad (22)$$

и так далее

$$U^k(X) = \sum_{i=1}^{N} u_i^0(X, V^k(X_i)), \tag{23}$$

где

$$V^k(X_i) = L\left(\sum_{j=1,\, i\neq j}^{N} u_j^0(X, V^{k-1}(X_j)) \right). \tag{24}$$

В (22) и (24) под L подразумевается некоторый, вообще говоря, дифференциальный оператор, определяемый как градиент, (если решение строится в терминах потенциала скоростей) или ротор (если решение строится в терминах функции тока), или как единица, (если решение строится непосредственно в скоростях).

Обобщенный метод Блоха-Гиневского. Предлагаемый в настоящей работе обобщенный метод Блоха-Гиневского отличается от исходного варианта тем, что влияние других объектов на данный определяется не в центре, а на поверхности объекта. Это, в свою очередь, на каждом шаге итерации для каждого объекта заставляет решать отдельную внешнюю краевую задачу, зато позволяет определять силы гидродинамического взаимодействия, и предложенный метод не столь чувствителен к расстоянию между объектами. Частные краевые задачи для отдельных обтекаемых объектов, разумеется, могут быть решены любым численным или аналитическим методом, но возможности численных методов, основанных на дискретизации области решения, настолько ограничены в этом случае, что эффективно только применение методов теории потенциала, процесс решения в которых локализован на границе. Разумеется, это не первая попытка применить теорию потенциала в задачах гидродинамического взаимодействия, – первым подобную попытку предпринял М. Лагалли [28], близкие идеи построения граничноэлементных алгоритмов были сформулированы в работе [29].

Пусть в области решения есть N границ, для каждой из которых $u_i^0(X, V(X_i))$ находится из краевой задачи:

$$\Delta\, u_i^k = 0, \tag{25}$$

$$\left. u_i^k \right|_{\Gamma_i} = V(X_i), \tag{26}$$

или

$$\left. \frac{\partial u_i^k}{\partial n} \right|_{\Gamma_i} = L(V(X_i)), \tag{27}$$

где параметр $V(X_i)$ определяет условия обтекания (движения) и отнесен к точкам границы i-го объекта. Параметр k в дальнейшем будет изменяться от 1 до требуемого числа итераций.

Дальнейшие действия аналогичны методу Блоха-Гиневского:

$$U^k(X) = \sum_{i=1}^{N} u_i^k(X, V_{\Gamma_i}^k), \tag{28}$$

где

$$V_{\Gamma_i}^k(X) = L\left(\sum_{j=1,\, i\neq j}^{N} u_j^{k-1}(X, V_{\Gamma_j}^{k-1}) \right). \tag{29}$$

Алгоритмические аспекты обобщенного метода Блоха-Гиневского. Как отмечалось выше, краевые задачи (25), (26) и (25), (27) должны решаться либо аналитически методом функций Грина, либо численно методом граничных элементов, при этом в одном и том же итерационном процессе для разных тел могут использоваться как аналитические, так и численные решения, что выделяет предлагаемый подход среди существующих расчетных технологий. В принципе для удаленных объектов может использоваться и традиционная методика Блоха-Гиневского, поскольку удаленные объекты дают очень незначительный вклад в силы гидродинамического взаимодействия.

Выделим три случая взаимодействия объектов – на близких, средних и дальних дистанциях. На дальних дистанциях гидродинамическое взаимодействие будем учитывать по классическому методу Блоха-Гиневского. В нулевом приближении считаем, что каждый объект движется индивидуально с некоторой заданной скоростью. Определим средние дистанции как такие, на которых распределение скорости, индуцированной другими объектами, по поверхности рассматриваемого объекта существенно для гидродинамического взаимодействия. В этом случае уже нет элементарных аналитических решений в квадратурах (однако, например, для сферы может быть построена функция Грина), и приходится на всех этапах прибегать к решению задач (25), (26) или (25), (27). Дальнейшие действия соответствуют описанному выше обобщенному методу Блоха-Гиневского с той лишь разницей, что в данном случае число итерации будет заметно больше.

Наконец, в случае малых дистанций, то есть, на расстояниях, меньших характерных размеров объектов применение метода Блоха-Гиневского представляется нецелесообразным, поэтому приходится решать граничные интегральные уравнения (7) для всех близкорасположенных взаимодействующих тел.

Сегментированные многосвязные границы очень широко представлены в современной гидромеханике, поскольку фактически к этому классу границ следует отнести все границы, возникающие в задачах гидро- и аэродинамики сложных полипланных компоновок и в лагранижевых формулировках гидромеханики многофазных сред. Результаты, которые дает как классический метод Блоха-Гиневского, так и обобщенный метод Блоха-Гиневского, как правило, используются не напрямую, а опосредованно через какую-то расчетную гидродинамическую схему. Поясним последний тезис. Если в простейшем случае летательного аппарата с полипланной конфигурацией несущих поверхностей в стационарном поступательном на бесконечности потоке интерес представляют поправки к подъемной силе и силе лобового сопротивления (последняя рассчитывается по инженерным формулам), то есть, обобщенный метод Блоха-Гиневского обеспечивает практически полный ответ задачи, то, скажем, в задаче о всплывании ансамбля пузырей поправки метода Блоха-Гиневского входят в уравнения движения пузырей, откуда получаются поправки для скорости (кстати говоря, вычислительная практика показывает, что именно в случае всплывающего ансамбля пузырей чаще всего наблюдается расходимость метода Блоха-Гиневского). Гидродинамические задачи, подлежащие решению методом Блоха-Гиневского, могут быть как стационарными, так и нестационарными, причем нестационарность может быть следствием как зависимости от времени скорости набегающего потока, так и результатом взаимного движения обтекаемых тел. С точки зрения теории течений идеальной несжимаемой жидкости, эти случаи отличаются только применением интегралов Бернулли или Коши-Лагранжа, но с алгоритмической точки зрения случай подвижных объектов исклю-

чительно сложен. Подробное исследование указанных случаев достаточно громоздко и не может поместиться в ограниченных рамках настоящей статьи, а должно быть реализовано в отдельной и, возможно, не одной, работе.

Сохранение и повторное применение разрешающих матриц метода граничных элементов позволяет добиться для алгоритмов обобщенного метода Блоха-Гиневского, основанных на граничноэлементных локальных решениях, практически такой же эффективности, как у алгоритмов, основанных на использовании функций Грина. Разумеется, оба подхода существенно уступают по экономичности классическому методу Блоха-Гиневского, но превосходят его по универсальности и дополнительным возможностям в определении сил гидродинамического взаимодействия. Оба подхода оказываются эффективнее прямого применения метода граничных элементов, если не всегда по количеству операций, то по экономии памяти компьютера всегда и весьма существенно. Когда же обтекаемые тела имеют одинаковую геометрическую форму, преимущества обобщенного метода Блоха-Гиневского заметно возрастают.

Вопрос о сходимости метода Блоха-Гиневского, как традиционного, так и предложенного здесь обобщенного, представляет определенный интерес, скорее, с теоретической точки зрения. Сходимость итерационного процесса существенно зависит от взаимного расположения обтекаемых тел. В принципе, возможно в нулевом приближении найти максимальное значение возмущения, задать его на всех контурах, пересчитать максимальное значение возмущения в первом приближении и, если оно окажется меньше, чем максимальное значение в нулевом приближении, то очевидно, что итерационный процесс сходится, поскольку для него можно составить мажорантную последовательность, сходящуюся как геометрическая прогрессия. Данные рассуждения справедливы для любого варианта метода Блоха-Гиневского. К сожалению, такая оценка окажется весьма грубой, точнее была бы оценка, построенная на некоторой средней скорости, используемой в традиционном методе Блоха-Гиневского, но подобная оценка не будет строгой. Скорее всего, гидродинамическое взаимодействие на средних дистанциях – одна из основных побудительных причин разработки обобщенного метода Блоха-Гиневского – окажется вне построенных таким образом оценок. Отметим, однако, что практического смысла ни одна, ни другая оценка не имеют (поэтому они здесь и не приводятся), ведь обе эти оценки строятся с применением тех же приемов, что и расчетная схема, их просто нельзя построить без использования той же численной реализации. Поэтому вычислительный контроль сходимости в актуальном процессе решения оказывается и надежнее, и точнее. Кроме того, на каждом шаге итерации для каждого обтекаемого тела в любом варианте метода Блоха-Гиневского приходится осуществлять куда как более жесткий контроль соответствия параметров возмущенного решения используемой математической модели обтекания данного тела.

Достоверность полученных результатов. Традиционно в подобных исследованиях достоверность результатов обеспечивается благодаря сравнению с результатами экспериментальных исследований, сравнению с результатами расчетов других авторов, теоретическим оценкам точности и сходимости алгоритмов, решению тестовых задач. В рассматриваемом случае ситуация более сложная, поскольку экспериментальные работы для более чем двух тел, расположенных произвольным образом, не проводились (к тому же при экспериментальном исследовании неизбежно встанет вопрос соответствия математических моделей и выделения специфических эффектов взаимодействия); расчеты других авторов, отраженные в монографии [17]

также ориентированы не более чем на два тела, можно упомянуть лишь отдельные попытки применить метод граничных элементов [3; 5; 6]; теоретические оценки сходимости и точности метода явно неудовлетворительны; а тестовых задач просто не существует. Поэтому достоверность результатов обобщенного метода Блоха-Гиневского приходится подтверждать путем численного эксперимента, проводимого по специально разработанной методике. Как отмечалось выше, для достаточно ограниченного числа обтекаемых объектов может быть напрямую применен метод граничных элементов. К сожалению, затруднительно сказать что-то определенное по поводу точности граничноэлементного решения в области столь сложной геометрической формы, поскольку тестовых задач (имеющих известное аналитическое решение) обтекания многих объектов не существует. В практике проведения граничноэлементных расчетов был эмпирически установлен следующий факт: аналогичные краевые задачи (с одинаковыми дифференциальными операторами и совпадающими типами граничных условий) в одной и той же «достаточно хорошей» области, имеющие один и тот же порядок норм функций, входящих в граничные условия, дают погрешности одного порядка. Строго доказать этот факт, разумеется, невозможно, более того, можно привести опровергающие примеры для отдельных случаев областей специфической формы, но для подавляющего большинства областей, особенно областей с гладкими границами, данный факт имеет место. Основываясь на указанном факте, была предложена следующая методика тестирования. Ограничим рассмотрение случаями областей, в которых краевые задачи допускают эффективное прямое применение метода граничных элементов. Сформулируем в одной из таких областей вспомогательную задачу, имеющую известное аналитическое решение, желательно представленное в квадратурах. При этом граничные условия вспомогательной задачи сформулируем таким образом, чтобы они совпадали по типу с граничными условиями актуальной задачи обтекания и имели такой же порядок максимальной или среднеквадратичной нормы (поскольку задачи линейны, выполнения последнего условия легко добиться простым умножением на константу). При применении метода граничных элементов к вспомогательной задаче получим некоторые погрешности, определенные прямым сравнением численного и аналитического решений в заранее заданном наборе точек. Полученные погрешности предположительно имеют тот же порядок, что и погрешности численного решения актуальной задачи при прямом применении к ней метода граничных элементов. Затем актуальная задача решается обобщенным методом Блоха-Гиневского, и в дальнейшем под погрешностью обобщенного метода Блоха-Гиневского подразумевается погрешность расчета этим методом по сравнению с прямым применением метода граничных элементов.

В качестве тестовой была выбрана следующая задача

$$\Delta u = 0, \tag{30}$$

$$u\big|_{\Gamma_i} = C_i, \tag{31}$$

сформулированная в квадратной области с четырьмя симметрично расположенными круговыми вырезами. Вспомогательная задача была сформулирована в той же области, но для тестовой гармонической функции

$$u(x, y) = x^2 - y^2. \tag{32}$$

Было проведено два варианта тестовых расчетов: первый в единичном квадрате с размерами круговых вырезов 0,1, а второй с размерами вырезов 0,2. Результаты расчетов (максимальная погрешность в контрольных точках границы) приведены

в табл. 1. Приведенные результаты наглядно показывают достаточно быструю сходимость итерационного алгоритма и приемлемую точность приближенного решения в целом.

Таблица 1

Результаты тестовых расчетов

Вариант расчета	Погрешность решения вспомогательной задачи	Погрешность нулевого приближения	Погрешность первого приближения	Погрешность второго приближения
1	0,0035%	1,2%	0,15%	0,009%
2	0,011%	3,4%	0,85%	0,032%

Было проведено еще несколько аналогичных расчетов в областях иной геометрической формы, но все они показали результаты, сходные с приведенным выше примером.

Хотя приведенные выше результаты численного эксперимента не могут служить строгим доказательством сходимости и точности предложенного алгоритма, с эмпирической точки зрения они являются достаточно убедительным доказательством его эффективности.

Выводы. В настоящей работе удалось предложить численно-аналитический подход к решению линейных эллиптических задач в специфических областях сложной геометрической формы и путем численного эксперимента подтвердить его высокую эффективность для ряда частных случаев. По мнению авторов на сегодняшний день предложенный подход является наиболее эффективным и мощным из всех методов численного решения подобного рода задач. Поскольку задачи рассмотренного класса непосредственно связаны с актуальными проблемами современной теоретической и прикладной механики жидкости и газа, следует ожидать, что предложенный подход получит дальнейшее развитие в ходе проведения массовых расчетов.

Хотелось бы остановиться на особенностях предложенной расчетной схемы, в которой впервые в рамках одного алгоритма объединены аналитические и численные методы решения. Хотя сходимость итерационных процессов доказать не удалось, более того, непонятно в каких случаях процесс может расходиться, предложенные приемы практического контроля сходимости в процессе расчета представляются достаточно убедительными для использования в инженерных приложениях. Учитывая гибкость формирования итерационного процесса в обобщенном методе Блоха-Гиневского и возможности метода граничных элементов, следует заключить, что при ограниченном числе обтекаемых объектов для предложенного подхода практически нет неподдающихся расчету конфигураций. Ограничения на метод могут быть наложены только по числу обтекаемых объектов.

Хотя предложенный подход тесно связан с гидроаэродинамикой сложных компоновок и гидродинамикой многофазных течений, в данной работе не рассматривались специфические особенности гидродинамических задач, а предполагалось, что такой анализ будет проведен в рамках специальных исследований.

Библиографические ссылки

1. **Yevdokymov, D.V.** Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations / D.V. Yevdokymov // in D. Durban and A.R.J. Pearson (Eds.) «Non-linear singulari-

ties in deformation and flow». Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17 – 21 March, 1997. Kluwer Academic Publisher. – P. 217 – 230.

2. **Бразалук, Ю.В.** Применение комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения некоторых задач гидродинамического взаимодействия в плоских потоках / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // Вестник Харьковского национального университета. Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2003. – Вып. 1, № 590. – С. 55 – 60.

3. **Бразалук, Ю.В.** Расчет гидродинамического взаимодействия в произвольной системе объектов, обтекаемых потенциальным бесциркуляционным потоком / Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, Е.С. Петрусев // «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу». Матеріали III міжнародної наукової конференції, Дніпропетровськ, 4-6 листопада 2010 р. – С. 90 – 91.

4. **Поляков, Н.В.** Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания / Н.В. Поляков. – Днепропетровск, 2005. – 356 с.

5. **Поляков, Н.В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 1. Линейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 2006. – №2/1. – С. 7 – 25.

6. **Поляков, Н.В.** Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. Часть 2. Нелинейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія «Механіка». – 2006. – №2/1. – С. 25 – 42.

7. **Кочин, Н.Е.** Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М., 1965. – Ч. 1. – 758 с., Ч. 2. – 772 с.

8. **Ламб, Г.** Гидродинамика / Г. Ламб. – М.-Л., 1947. – 928 с.

9. **Седов Л.И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М., 1966. – 448 с.

10. **Морс Ф.** Методы теоретической физики / Ф. Морс, Г. Фешбах. – М., 1958. – Т. 1. – 930 с.

11. **Морс Ф.** Методы теоретической физики / Ф. Морс, Г. Фешбах. – М., 1960. – Т. 2 – 886 с.

12. **Мазур В.Ю.** Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки / В.Ю. Мазур // Изв. АН СССР «Механика жидкости и газа». – 1966. – № 3.

13. **Мазур В.Ю.** Плоская задача о движении тела вблизи вертикальной стенки / В.Ю. Мазур // АН УССР «Прикладная механика». – 1969, – Т. 5, вып. 12.

14. **Сабанеев В.С.** О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой /В.С. Сабанеев //Вестник ЛГУ. – 1958. – № 13, вып. 3.

15. **Сабанеев В.С.** Присоединенные массы эллипсоида вращения, движущегося в жидкости, ограниченной плоской стенкой / В.С. Сабанеев // Вестник ЛГУ. – 1958. – № 19, вып. 4.

16. **Сабанеев В.С.** Присоединенные массы эллиптического цилиндра при движении в жидкости, ограниченной плоской стенкой или свободной поверхностью / В.С. Сабанеев // Вестник ЛГУ. – 1963. – № 1, вып. 1.

17. **Костюков А.А.** Взаимодействие тел, движущихся в жидкости / А.А. Костюков. – Л., 1972. – 312 с.

18. **Блох Э.Л.** О движении системы тел в идеальной жидкости / Э.Л. Блох, А.С.. Гиневский // Качка и управляемость судна. – Л., вып. 47. – 1963.

19. **Hess J.L.** Calculation of potential flow about arbitrary bodies / J.L. Hess, A.M.O. Smith // Progress in aeronautical sciences. – New York: Pergamon Press, 1966. – Vol. 8. – P. 1–138.

20. **Бенерджи, П.** Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.

21. **Бреббия, К.** Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.

22. **Белоцерковский С.М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Ништ, П.М. Федоров. – М., 1988. – 309 с.

23. **Белоцерковский С.М.** Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей / С.М. Белоцерковский, А.С. Гиневский. – М., 1995. – 355 с.

24. **Chorin A.** Vorticity and Turbulence / A. Chorin. – New York, Springer-Verlag, 1994. – 173 p.

25. **Melnikov Yu.A.** Influence Function and Matrices / Yu.A. Melnikov. – New York, Boston: Marcel Dekker, 1999. – 470 p.

26. **Melnikov Yu.A.** Influence Function Approach / Yu.A. Melnikov. – Southampton, Boston: WIT Press, 2008. – 369 p.

27. **Евдокимов Д.В.** Использование функций Грина в методах сингулярных граничных интегральных уравнений / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков // «Метод дискретных особенностей в задачах аэродинамики, электродинамики и теории дифракции». Труды VII Международного симпозиума «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики», 26 – 29 июня 1997, Феодосия. – С. 62 – 65.

28. **Лагалли М.** Идеальные жидкости / М. Лагалли // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Под редакцией Ф. Франка и Р. Мизеса. Ч. 2. – М., 1937. – С. 346 – 438.

29. **Дидинская Е.О.** Гомотетичный рост ансамбля пузырей (капель) / Е.О. Дидинская, А.В. Дидинский, Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей // Вестник ХНТУ. – 2010, № 3 (39). – С. 153 – 158.

Надійшла до редколегії 22.10.13.

УДК 532.517

А.А. Кочубей, Е.В. Кравец

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ КАВЕРНАХ

Проведено аналіз експериментальних і чисельних досліджень нестисливих течій в'язкої рідини в просторових кавернах різних конфігурацій. Розглянуто особливості проведення експериментів і застосування чисельних методів. Показано вплив торцевого ефекту і утворення специфічних тривимірних вихорових структур. Приведено результати розрахунку методом скінченних елементів течії в'язкої нестисливої рідини між призмами над екраном у випадку відкритого міжторцевого простору і за наявності перемички між торцями, що моделюють течію в міжвагонному проміжку при русі швидкісного залізничного складу.

Ключові слова: тривимірна каверна, в'язка нестислива рідина, циркуляційна течія, експеримент, чисельні методи, торцевий ефект, міжторцевий простір (каверна) над екраном відкритий і з перемичкою.