

давления и КПМ. Характерно, что отрыв жидкости на верхней поверхности шара при $\omega = 0$ происходит при больших значениях глубины погружения H/R , чем в случае $\omega \rightarrow \infty$. Для тел вогнутой сложной формы соотношение между значениями КПМ при $\omega \rightarrow \infty$ и $\omega = 0$ остается прежним, однако в распределении импульсивного давления и в появлении отрыва жидкости могут быть аномалии от общей закономерности, поэтому в этом случае для новой конфигурации необходимо проведение расчетов.

Полученные гидродинамические характеристики осесимметричных тел могут быть использованы при определении сил, действующих на тело вращения, колеблющееся на поверхности жидкости.

Библіографічні посилання

1. **Кочин Н.Е.** Теоретическая гидромеханика. Часть 1/ Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Гостехиздат, 1948. – 684с.
2. **Берто О.Г.** Океанографические буи. / О.Г. Берто. – Л.: Судостроение, 1979. – 214 с.
3. **Седов Л.И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1980. – 448с.
4. **Железняк В.Д.** Применение функции Грина для решения ударных задач гидродинамики / В. Д. Железняк, В. А. Катан. – Днепр. гос. ун-т. Днепропетровск, 1984. – Библиогр. II назв. – Деп. в ВИНТИ 18 декабря 1984, № 8061-84 ДЕП. – 22 с.
5. **Катан В.А.** Ударные присоединенные массы некоторых осесимметричных буюв / В. А. Катан. – Днепр. гос. ун-т. – Днепропетровск, 1984.– Библиогр. 3 назв. – Деп. в ВИНТИ 28 марта 1984, № 1712-84 ДЕП – 13 с.
6. **Короткин А.И.** Присоединенные массы судна. / А. И. Короткин. – Л.: Судостроение, 1986. – 312с.

Надійшла до редколегії 25.06.2014

УДК 517.9

Т. С. Зеленська, А. В. Сяєв

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ПРО ПОШИРЕННЯ ПОЗДОВЖНИХ ХВИЛЬ У СТАЛЬНИХ КАНАТАХ ДЛЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА ЗІ ЗМІННОЮ ГРАНИЦЕЮ

Розглянуто початково-крайову задачу математичної фізики, яка описує поздовжні коливання каната змінної довжини з вантажем на нижньому кінці. Наведено порівняння розв'язання за допомогою модифікованого методу продовження та числового інтегрування.

Ключові слова: напруження, поздовжні переміщення.

Рассмотрена начально-краевая задача математической физики, описывающая продольные колебания каната переменной длины с грузом на нижнем конце. Приведены сравнения решений с помощью модифицированного метода продолжения и числового интегрирования.

Ключевые слова: напряжение, продольные перемещения.

Considered initial-boundary value problem of mathematical physics that describes the longitudinal fluctuations of the rope variable length with a weight at the lower end. Provides a comparison of solutions using a modified method of continuation and numerical integration.

Key words: stress, longitudinal movement.

© Зеленська Т. С., Сяєв А. В., 2014

Вступ. Під час конструювання механізмів для підняття та опускання вантажу за допомогою канатів велику увагу приділяють забезпеченню безпеки та безаварійності їх роботи, особливо в шахтних системах. Тому задачам позовжних пружних коливань канатів та методам розрахунків їх динамічної міцності присвячено велику кількість досліджень. В даній роботі наведено розв'язання початково-крайової задачі для хвильового рівняння про рух пружних хвиль в канатах змінної довжини.

Крайові умови враховують зміну межі області інтегрування рівняння динамічного стану канатів, а також характер взаємодії каната з вантажем. Межа області інтегрування змінюється з дозвуковою швидкістю, тобто повністю відповідає природним умовам роботи шахтної установки. Така постановка задачі дозволить більш точно визначити параметри міцності каната.

Постановка та розв'язання початково-крайової задачі. Динаміку позовжних коливань каната, який намотується на шахтну котушку, описуватимемо за допомогою хвильового рівняння. Сталевий канат, вважатимемо пружним, з мінімальними деформаціями, замінимо в математичній моделі на сталевий трос.

Розглянемо в області $0 < x < l + f(x), t > 0$, крайову задачу для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

з початковими та крайовими умовами

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u_x(0,t) = 0; \quad u_x(l + f(t),t) = \sigma(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

У рівнянні (1) a – швидкість поширення звуку в сталевому канаті.

Канат будемо зображати у вигляді троса, який в початковий момент часу $t = 0$ має довжину l , а за $t > 0$ верхній кінець цього тросу буде рухатися по функції $x(t) = l + f(t)$. В момент початку руху системи $f(0) = 0$.

Переміщення точки дотику буде змінюватись за законом

$$f(t) = R \cdot \int_0^t \int_0^s \beta(\tau) d\tau ds + R\omega(0)t, \quad (4)$$

де $\beta(t)$ – кутове прискорення котушки; $\omega(t)$ – кутова швидкість; R – середній радіус намотки; S – площа поперечного перерізу сталевго каната (тросу).

Припустимо, що швидкість намотування троса на котушку є достатньо мала порівняно зі швидкістю поширення позовжних хвиль в сталевому канаті (тросі).

Розв'язок крайової задачі (1) – (3) шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = \chi(x + at). \quad (5)$$

Застосуємо модифікований метод продовження для знаходження $u(x,t)$. Отже, виконаємо продовження другої крайової умови (3) на всю вісь t :

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \sigma(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Запишемо умову невідродження області пошуку розв'язку

$$l + f(t) > 0, \quad t > 0,$$

де функція $f(t)$ неперервно диференційовна за $t > 0$.

Виконаємо заміну $q(t) = l + f(t) + at$, тоді, підставляючи форму розв'язку (5) в продовження (6), другу крайову умову (3) матимемо у вигляді

$$\chi'(q(t)) = \tilde{\sigma}(t)$$

або

$$\chi'(l + f(t) + at) = \tilde{\sigma}(t).$$

Рівняння (1) буде мати розв'язок, якщо буде існувати обернена функція $t_0(q)$ до функції $q(t)$.

Враховуючи обернену функцію $t_0(q)$, загальну форму розв'язку запишемо у вигляді

$$u(x, t) = \int_{q_0}^{x+at} \tilde{\sigma}(t_0(y)) dy + \chi(q_0),$$

де q_0 – деяка нижня фіксована точка, яка $q_0 \leq l$.

Для знаходження компенсуючої хвилі за $t > \frac{2l + f(t)}{a}$ будемо добувати найменший додатний корінь τ_0 рівняння

$$at = 2l + f(t),$$

тобто той момент, від якого рухома верхня межа починає впливати на подальший розв'язок рівняння (1).

Застосовуючи модифікований метод продовження для середовищ зі змінними межами, знаходимо розв'язок крайової задачі для

$$t < (2f(\tau_0) + f(t) + 4l) / a :$$

$$u(x, t) = \int_0^{t_0(x+at)} \tilde{\sigma}(y)(a + f'(y)) dy + \int_0^{t_0(at-x)} \tilde{\sigma}(y)(a + f'(y)) dy +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{t_0(x+at)} \tilde{\sigma}(t_0(ay - l - f(y))) dy.$$

Продовжуючи процес побудови відображених хвиль даним методом, отримаємо, що для всіх $t > 0$ розв'язок поставленої початково-крайової задачі буде мати вигляд

$$u(x,t) = \sum_{i=2l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^n \int_{x+at}^{\infty} \tilde{\sigma}(t_0(\xi(\xi(\dots\xi(y))))))dy + \sum_{i=2l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^n \int_{at-x}^{\infty} \tilde{\sigma}(t_0(\xi(\xi(\dots\xi(y))))))dy, \quad (7)$$

де τ_1, \dots, τ_n - найменші додатні корні рівнянь

$$at = a\tau_{n-1} + 2l + f(\tau_{n-1}) + f(t) \quad (8)$$

та

$$\xi(y) = at_0(y) - lf(t_0(y)). \quad (9)$$

Якщо врахувати, що функція $f(x)$ змінюється довільно і при цьому є неперервно диференційована за всіх $t \geq 0$, то для розв'язання поставленої крайової задачі додатну піввісь розіб'ємо на два інтервали, на кожному з яких буде виконуватися одна з двох нерівностей:

$$f'(t) \leq -a$$

або

$$f'(x) > -a.$$

Тоді функцію $u(x,t)$, яка є розв'язком рівняння (1), запишемо так:

$$u(x,t) = \sum_{i=2}^{N+1} \int_{l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^{x+at} \tilde{\sigma}(\xi(\xi(\dots(\xi(y))))))dy + \sum_{i=2}^{N+1} \int_{l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^{at-x} \tilde{\sigma}(\xi(\xi(\dots(\xi(y))))))dy + \quad (10)$$

$$+ \sum_{i=2}^{N+1} \sum_{i=2l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^N \int_{x+at}^{\infty} \tilde{\sigma}(\xi(\xi(\dots(\xi(y))))))dy + \sum_{i=2}^{N+1} \sum_{i=2l+f(\tau_{i-2})+a\tau_{i-2}}^N \int_{at-x}^{\infty} \tilde{\sigma}(\xi(\xi(\dots(\xi(y))))))dy,$$

де N - натуральне число додатних коренів рівнянь (8) і (9), для яких справедлива нерівність

$$\tau_{N-1} \leq \tau_N.$$

Числове інтегрування. Визначаємо швидкість поширення хвилі в тросі: так, $a = \sqrt{E/\rho}$; E – модуль Юнга; ρ – густина сталевого канату.

Малий параметр ε визначаємо за формулою $\varepsilon = V_{\max}/a$, V_{\max} – максимальна швидкість намотки каната на котушку. Числово задачу (1)-(3) досліджували за допомогою алгоритмів, заснованих на методах Рунге-Кутта, та кінцевих різниць для задач з рухомими межами. Для перевірки ефективності застосування модифікованого методу продовження проведемо порівняння результатів числового інтегрування крайової задачі (1-3) з результатами аналітичного розв'язку (з застосуванням кінцевої суми рядів (10)). Розрахунок проводили для таких значень параметрів:

$$S = 5 \cdot 10^{-6} \pi m^2, \quad E = 10^{11} H/m^2, \quad \rho = 4,9 \text{ кг}/m^3, \quad l = 60 \text{ м}, \quad \frac{dl}{dt} = Kt.$$

На рис.1 наведено графіки залежностей від часу функції $u(f(t),t)$ – зміна довжини висячого тросу в точці його сходження з барабана.

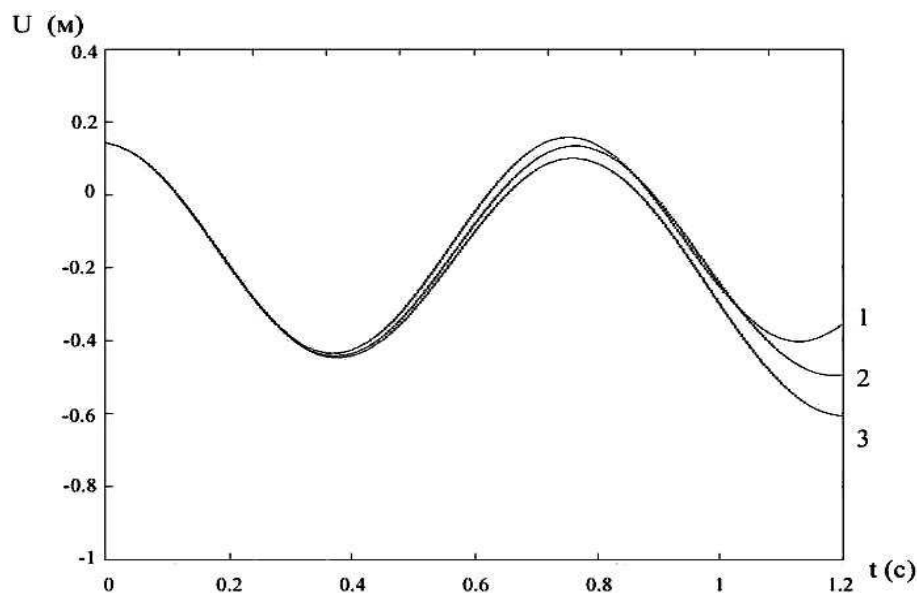


Рис. 1. Функція переміщення

Номером 1 відмічена крива, отримана числовим інтегруванням методом кінцевих різниць для рухомої межі, а номерами 2 та 3 – асимптотичні криві, які відповідають одній із сум рядів (10) відповідно. Параметр $K = 20$ ($\varepsilon \approx 0,01$) відповідає прискоренню, з яким трос намотується на барабан. Криві 1,2,3 з часом починають відхилятися від середнього значення, оскільки підсилюється вплив відбитих та залишкових хвиль від рухомого кінця.

Проведені дослідження показують, що зі збільшенням швидкості руху системи вплив характеру зміни переміщення поздовжніх хвиль випромінених рухомих кінцем на виробничі показники є суттєвий.

Висновки. Розв'язок отримано у вигляді суперпозиції початкової хвилі та хвиль, відображених від рухомого кінця. Характер відображених хвиль від рухомого та нерухомого кінців суттєво відрізняється один від одного. Розв'язок поставленої крайової задачі дозволяє побудувати більш коректну концепцію поширення пружних хвиль та динамічного поля напружень в канатах змінної довжини.

Бібліографічні посилання

1. **Воеводин В.В.** Численные методы в прикладном пакете sage / В.В. Воеводин. – Спб.: БХВ-Петербург, 2011. – 257 с.
2. **Ильин С.Р.** Математическая модель продольных колебаний струны и отвеса каната мобильной подъемной установки / С.Р. Ильин // Научные труды ДОННТУ. – 2011. – Вып. 16(143). – С. 122 – 138.
3. **Коряшкіна Л.С.** Чисельні методи / Л. С. Коряшкіна, М. М. Одновол. –Д.: Вид-во ДДУ. –2007. –219 с.
4. **Смоланов С.Н.** Аварийно-спасательная передвижная установка / С. Н. Смоланов, О. А. Колесов // Уголь Украины. –2008. –№1. –С. 43 – 45.
5. **Razdolsky A. G.** Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length / A. G. Razdolsky // International journal of solids and structures. – 2011. – Т. 48. – №. 24. – Р. 3359 – 3364.

Надійшла до редколегії 26.06.2014