УДК 532.59

**В.А. Катан**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЗОНЫ ОТРЫВА ТЕЧЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

**В работе задача об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости сведена к решению трансцендентного уравнения относительно координаты начальной точки отрыва с использованием формул Адамара – Манглера для полученных расходящихся интегралов. Для случая удара горизонтальной пластинки проведено сравнение с аналитическим решением поставленной задачи.**

**Ключевые слова:** отрыв течения, удар, трансцендентное уравнение, формулы Адамара - Манглера, горизонтальная пластинка.

**В роботі задача про визначення положення зони відриву течії при ударній взаємодії твердого тіла та рідини зведена до розв´язання трансцендентного рівняння відносно координати початкової точки відриву з використанням формул Адамара-Манглера для отриманих розбіжних інтегралів. Для випадку удару горизонтальної пластини проведено порівняння з аналітичним розв´язком поставленої задачі.**

**Ключові слова:** відрив течії, удар, трансцендентне рівняння, формули Адамара-Манглера, горизонтальна пластина.

**In this paper, the problem of determining the position of the flow separation zone at the impact interaction of a solid and a liquid is reduced to the solution of the transcendental equation for the coordinates of the starting point of separation using Hadamard – Manglera formulas for obtained divergent integrals. The case of impact of horizontal plate compared with the analytical solution of the problem.**

**Keywords:** separation of flow, impact, transcendental equation, Hadamard-Manglera formulas, horizontal strike.

**Введение.** Пусть горизонтальная пластина длины $2b$ плавает на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей нижнее полупространство. Ось $Oy$ системы декартовых координат направлена по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутрь последней, а плоскость $xOz$ совпадает со свободной поверхностью. Предполагается, что ударные импульсы подействовали так, что тело после удара пластина имеет только компоненту скорости вдоль оси $Oy$, а также положительную угловую скорость вокруг оси $Oz$. Знак угловой скорости существенен для правильного моделирования положения зоны отрыва.

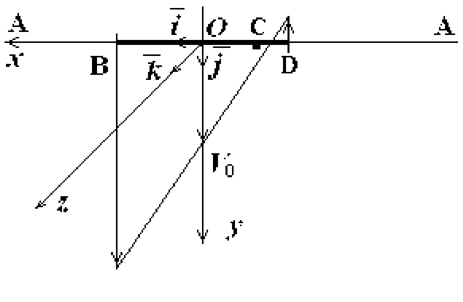


**Рис. 1. Схема течения в физической плоскости**

Возникшее в результате удара течение жидкости будет потенциальным и описывается комплексным потенциалом

$$w = \varphi(z) + i\,\psi(z),$$

где $\varphi(z)$ – потенциал течения; $\psi(z)$ – функция тока.

В результате удара тело приобретает скорость

$$\overline{V} = (V_0 + \omega_z x)\,\overline{j}\,,$$

где $V_0$ – поступательная скорость; $\omega_z$ – угловая скорость тела.

В предположении о наличии отрыва течения условие безотрывности течения распространяется только на контуре BC, причем положение точки C заранее неизвестно, и имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{BC} = \overline{V}\cdot\overline{n}\,.$$

Учитывая направление нормали на участке BC, оно сводится к выражению, а именно,

$$v_y = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{BC} = V_0 + \omega_z x\,.$$

На свободной границе – оси *Ox* и участке отрыва CD имеем условие равенство нулю импульсного давления, что приводит к условию

$$\varphi = 0\,.$$

**Постановка математической задачи**. Введем координату *s* вдоль контура пластинки, отсчитывая ее от точки B (Рис.2). На передней стороне пластинке BD, которая соприкасается с жидкостью, имеют место соотношения

$dx = -ds$ и $dy = 0$.

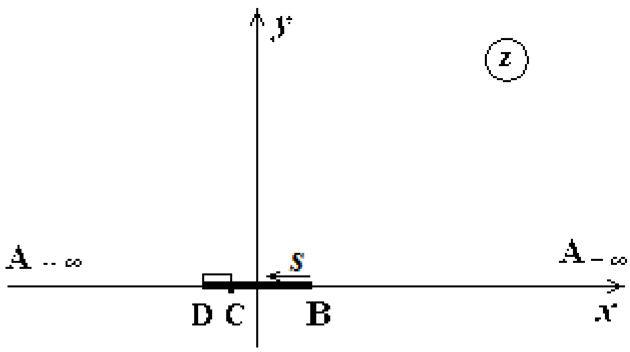


**Рис. 2. Введение координаты *s***

Учитывая связь между производными потенциала скорости и функции тока, граничные условия на поверхности в области безотрывного обтекания на участке CB имеем

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_{CB} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{CB} = -V_0\frac{dx}{ds} - \omega_z x\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(V_0 x + \frac{\omega_z x^2}{2}\right).$$

Откуда, с точностью до несущественной константы, имеем

$$\psi = -V_0 x - \frac{\omega_z x^2}{2}.$$

**Аналитическое исследование**. Перейдем в комплексную плоскость *xOy* $z = x + iy$ и введем функцию $\chi = -iw = \psi - i\varphi$, для которой получим задачу Келдыша – Седова [1,2]. На границе $CB$ задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re}\chi\big|_{CB} = -V_0 x - \frac{\omega_z x^2}{2},$$

а на границах $A_{-\infty}D$, $DC$, $BA_{+\infty}$ известна ее мнимая часть, а именно,

$$\operatorname{Im}\chi\big|_{A_{-\infty}D} = 0, \ \operatorname{Im}\chi\big|_{DC} = 0, \ \operatorname{Im}\chi\big|_{BA_{+\infty}} = 0.$$

При этом точка граница зоны отрыва – точка С имеет абсциссу $-q$, которая подлежит определению, а точки В и D соответственно $b$ и – $b$.

Далее следуя Мусхелишвили [2], составим функцию граничных условий

$$h(\xi) = \begin{cases} f(\xi), & \xi \in D', \\ ig(\xi), & \xi \in D'', \end{cases},$$

где

$$f(\xi) = -\left(V_0\xi + \omega_z \frac{\xi^2}{2}\right), \quad z = \xi \in [-q, b] \quad (D');$$

$$g(\xi) = 0, \begin{cases} \xi \in (-\infty, -b), \\ \xi \in (-b, -q), \\ \xi \in (b, +\infty). \end{cases} \quad (D'').$$

Данная постановка содержит только один отрезок с известной вещественной частью $CB$ и два полубесконечных промежутка с известной мнимой частью, т.е. параметры задачи равны $a_1 = -q$ и $b_1 = b$. Тогда решение однородной задачи, играющего роль канонического решения класса $h_0$, имеет вид

$$Z(z) = \sqrt{R(z)},$$

где $R(z) = (z - a_1)(z - b_1) = (z + q)(z - b)$.

Ветвь $\sqrt{R(z)}$ принимает на оси *x* положительные значения при $x > b$.

Одно из частных решений $\Psi(z)$ поставленной задачи Келдыша – Седова, определяется формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\sqrt{(z+q)(z-b)}\int_L Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

где *L* – действительная ось плоскости *z*. Следовательно, решение задачи сводится к вычислению интеграла

$$I(z)=\int_L Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_{D'} Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{D''} Z^{-1}(\xi)\frac{h(\xi)}{\xi-z}d\xi=$$
$$=\int_{D'} Z^{-1}(\xi)\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{D''} Z^{-1}(\xi)\frac{ig(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

Учитывая выражение для функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$, приходим к выражению

$$I(z)=i\int_{-q}^{b}\frac{V_0\xi+\omega_z\frac{\xi^2}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-z}.$$

Представим интеграл в виде

$$I(z)=iJ(z),$$

где $J(z)=\int_{-q}^{b}\frac{V_0\xi+\omega_z\frac{\xi^2}{2}}{\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-z}$.

Введем обозначения

$$J_1(z)=\int_{-q}^{b}\frac{\xi}{\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-z}\ ,\quad J_2(z)=\int_{-q}^{b}\frac{\xi^2}{\sqrt{(\xi+q)(b-\xi)}}\frac{d\xi}{\xi-z}.$$

Тогда частное решение будет иметь вид

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{(z+q)(z-b)}\left[V_0J_1(z)+\frac{\omega_z}{2}J_2(z)\right].$$

Учитывая гидродинамический смысл полученного решения, имеем

$$\psi(z)-i\varphi(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{(z+q)(z-b)}\left[V_0J_1(z)+\frac{\omega_z}{2}J_2(z)\right].$$

Для определения положения отрыва – координаты $q$ – согласно принципа Огазо необходимо определить потенциал течения $\varphi(t)$ на участке безотрывного обтекания $z=\xi+i0, \xi\in(-q,b)$. Интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ являются интегралами типа Коши по отрезку действительной оси $\xi\in(-q,b)$. Тогда по формулам Племеля – Сохоцкого при переходе из верхней полуплоскости на отрезок в точку $\xi_0\in(-q,b)$ получим

$$J_1^+(\xi_0)=\pi i\frac{\xi_0}{\sqrt{(\xi_0+q)(b-\xi_0)}}+J_1(\xi_0),\qquad J_2^+(\xi_0)=\pi i\frac{\xi_0^2}{\sqrt{(\xi_0+q)(b-\xi_0)}}+J_2(\xi_0),$$

где $J_1(\xi_0)$ и $J_2(\xi_0)$ – особые интегралы.

Выделяя действительные и мнимые части в решении, приходим к следующим формулам для функции тока и потенциала течения

$$\psi(\xi_0) = -V_0\xi_0 - \frac{\omega_z \xi_0^2}{2},$$

$$\varphi(\xi_0) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0 + q)(b - \xi_0)}\left[V_0 J_1(\xi_0) + \frac{\omega_z}{2} J_2(\xi_0)\right].$$

Согласно принципа Огазо найдем положение точки отрыва $q$ из условия $\lim\limits_{\xi_0 \to -q+0} \frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q} = 0$, которое означает, что действительное отрывное течение имеет экстремальный потенциал среди возможных решений смешанной ударной задачи.

Тогда

$$\frac{\partial \varphi(\xi_0)}{\partial q} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b-\xi_0}{\xi_0+q}}\left[V_0 J_1(\xi_0) + \frac{\omega_z}{2} J_2(\xi_0)\right] -$$
$$-\frac{1}{\pi}\sqrt{(\xi_0 + q)(b - \xi_0)}\left[V_0 \frac{\partial J_1(\xi_0)}{\partial q} + \frac{\omega_z}{2}\frac{\partial J_2(\xi_0)}{\partial q}\right].$$

И приходим к уравнению для определения $q$, переходя к пределу $\xi_0 \to -q + 0$.

При непосредственной подстановке $\xi_0 = -q$ в выражения для интегралов имеем

$$J_1(-q) = \int_{-q}^{b} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi+q)^3 (b-\xi)}}, \qquad J_2(-q) = \int_{-q}^{b} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(\xi+q)^3 (b-\xi)}},$$

которые являются расходящимися и их надо понимать в смысле конечного значения по Адамару [3,4]. Далее перейдем в интегралах к безразмерной переменной

$$\bar{\xi} = \xi/b \Rightarrow d\xi = bd\bar{\xi}; \quad \xi = b \Rightarrow \bar{\xi} = 1; \quad \xi = -q \Rightarrow \bar{\xi} = -q/b = -\bar{q},$$

и тогда

$$J_1(-q) = \int_{-\bar{q}}^{1} \frac{\bar{\xi} d\bar{\xi}}{\sqrt{(\bar{\xi}+\bar{q})^3 (1-\bar{\xi})}} = \bar{J}_1(-\bar{q}), \; J_2(-q) = b\int_{-\bar{q}}^{1} \frac{\bar{\xi}^2 d\bar{\xi}}{\sqrt{(\bar{\xi}+\bar{q})^3 (1-\bar{\xi})}} = b\bar{J}_2(-\bar{q}),$$

где $\bar{J}_1(-\bar{q})$ и $\bar{J}_2(-\bar{q})$ – безразмерные интегралы, зависящие от безразмерных переменных.

Уравнение для определения $q$ может быть записано в следующем виде

$$V_0 \bar{J}_1(-\bar{q}) + \frac{\omega_z b}{2}\bar{J}_2(-\bar{q}) = 0,$$

или представлено в виде зависимости кинематического параметра от неизвестного $\bar{q}$

$$\mathrm{K} = \frac{V_0}{\omega_z b} = -\frac{\bar{J}_2(-\bar{q})}{2\bar{J}_1(-\bar{q})}.$$

В дальнейшем знак безразмерности будем опускать. Прежде всего, для удобства применения формулы из [3] сделаем замену

$$\xi = -y \Rightarrow d\xi = -dy; \quad \xi = 1 \Rightarrow y = -1; \quad \xi = -q \Rightarrow y = q.$$

Тогда

$$\bar{J}_1(-\bar{q}) = -\int_{-1}^{q} \frac{ydy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}}, \qquad \bar{J}_2(-\bar{q}) = \int_{-1}^{q} \frac{y^2dy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}}.$$

По формуле Адамара – Манглера получим

$$\int_{-1}^{q} \frac{ydy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}} = \int_{-1}^{q} \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{1+y}} - \frac{q}{\sqrt{1+q}}\right)dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} - 2\frac{q}{1+q},$$

$$\int_{-1}^{q} \frac{y^2dy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}} = \int_{-1}^{q} \frac{\left(\frac{y^2}{\sqrt{1+y}} - \frac{q^2}{\sqrt{1+q}}\right)dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} - 2\frac{q^2}{1+q}.$$

С помощью замены $y = -\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi$ перейдем к интегралам с постоянными пределами интегрирования и тем самым неизвестный параметр $q$ убираем из пределов интегрирования, а именно,

$$dy = 2\sin\varphi\cos\varphi(1+q)d\varphi, \quad y = -1 \Rightarrow \varphi = 0, \quad y = q \Rightarrow \varphi = \pi/2, \quad 1+y = (1+q)\sin^2\varphi,$$
$$q - y = (1+q)\cos^2\varphi,$$

$$\tilde{J}_1(-\bar{q}) = \int_{-1}^{q} \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{1+y}} - \frac{q}{\sqrt{1+q}}\right)dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\left(\frac{-\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi}{\sqrt{1+q}\sin\varphi} - \frac{q}{\sqrt{1+q}}\right)2\sin\varphi\cos\varphi(1+q)d\varphi}{\sqrt{(1+q)^3}\cos^3\varphi} =$$
$$= \frac{2}{1+q}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\left(-\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi - q\sin\varphi\right)d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\tilde{J}_2(-\bar{q}) = \int_{-1}^{q} \frac{\left(\frac{y^2}{\sqrt{1+y}} - \frac{q^2}{\sqrt{1+q}}\right)dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\left(\frac{\left(-\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi\right)^2}{\sqrt{1+q}\sin\varphi} - \frac{q^2}{\sqrt{1+q}}\right)2\sin\varphi\cos\varphi(1+q)d\varphi}{\sqrt{(1+q)^3}\cos^3\varphi} =$$
$$= \frac{2}{1+q}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\left(\left(-\cos^2\varphi + q\sin^2\varphi\right)^2 - q^2\sin\varphi\right)d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

В полученных интегралах сделаем окончательную замену

$t = \cos\varphi \Rightarrow dt = -\sin\varphi d\varphi = -\sqrt{1-t^2}\,d\varphi, \quad \varphi = 0 \to t = 1, \quad \varphi = \pi/2 \Rightarrow t = 0,$

и тогда получим

$$\tilde{J}_1(-\bar{q}) = \frac{2}{1+q}\int_{1}^{0} \frac{\left(-t^2 + q(1-t^2) - q\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2}\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{2}{1+q}\int_{0}^{1} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt,$$

$$\tilde{J}_2(-\bar{q}) = \frac{2}{1+q}\int_{1}^{0} \frac{\left(-t^2 + q(1-t^2)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2}\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{2}{1+q}\int_{0}^{1} \frac{\left(q - t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Выделим окрестности особых точек

$$\tilde{\tilde{J}}_1(-\bar{q}) = \int_0^1 \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt,$$

$$\tilde{\tilde{J}}_2(-\bar{q}) = \int_0^1 \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt,$$

где $\varepsilon$ – малая величина.

В полученных выражениях первый и третий интегралы вычисляются непосредственно с учетом разложения подынтегральных функций в окрестности особых точек, второй интеграл вычисляется численно. Учитывая разложение в окрестности точки $t = 0$

$$\sqrt{1-t^2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 + O\left(t^6\right),$$

получим для первых интегралов

$$\tilde{\tilde{J}}_{11}(-\bar{q}) = \int_0^{\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{q\left(1-1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4+O\left(t^6\right)\right)-t^2(1+q)}{t^2\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+O\left(t^6\right)\right)}dt =$$

$$= -\int_0^{\varepsilon} \frac{q+2}{2}dt = -\frac{q+2}{2}\varepsilon,$$

$$\tilde{\tilde{J}}_{21}(-\bar{q}) = \int_0^{\varepsilon} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+O\left(t^6\right)\right)}{t^2\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+O\left(t^6\right)\right)}dt =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{q^2-2qt^2(1+q)+t^4(1+q)^2-q^2+\frac{q^2}{2}t^2+\frac{q^2}{8}t^4+O\left(t^6\right)}{t^2\left(1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4+O\left(t^6\right)\right)}dt = -\int_0^{\varepsilon} \frac{q(3q+4)}{2}dt = -\frac{q(3q+4)}{2}\varepsilon \cdot$$

Для вычисления третьих интегралов в подынтегральной функции проинтегрируем выделенную интегрируемую особенность

$$\tilde{\tilde{J}}_{13}(-\bar{q}) = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)-t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t}\Big|_{1-\varepsilon}^{1} = -\sqrt{2\varepsilon},$$

$$\tilde{\tilde{J}}_{23}(-\bar{q}) = \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\left(q-t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1-\varepsilon}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-t}\Big|_{1-\varepsilon}^{1} = \sqrt{2\varepsilon}.$$

Собирая полученные формулы, имеем

$$\bar{J}_1(-\bar{q}) = -\int_{-1}^{q} \frac{ydy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}} = -\left\{ \int_{-1}^{q} \frac{\left( \frac{y}{\sqrt{1+y}} - \frac{q}{\sqrt{1+q}} \right) dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} - 2\frac{q}{1+q} \right\} = 2\frac{q}{1+q} -$$

$$-\frac{2}{1+q}\left[ -\frac{q+2}{2}\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt - \sqrt{2\varepsilon} \right] = \frac{2}{1+q}\left( q + \frac{(q+2)\varepsilon}{2} + \sqrt{2\varepsilon} \right) -$$

$$-\frac{2}{1+q}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2q + (q+2)\varepsilon + 2\sqrt{2\varepsilon}}{1+q} - \frac{2}{1+q}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt,$$

$$\bar{J}_2(-\bar{q}) = \int_{-1}^{q} \frac{y^2dy}{\sqrt{(q-\xi)^3(1+y)}} = \int_{-1}^{q} \frac{\left( \frac{y^2}{\sqrt{1+y}} - \frac{q^2}{\sqrt{1+q}} \right) dy}{\sqrt{(q-\xi)^3}} - 2\frac{q^2}{1+q} = -2\frac{q^2}{1+q} +$$

$$+\frac{2}{1+q}\left[ -\frac{q(3q+4)}{2}\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\left(q - t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt + \sqrt{2\varepsilon} \right] =$$

$$= \frac{2}{1+q}\left( -q^2 - \frac{q(3q+4)}{2}\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon} \right) + \frac{2}{1+q}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\left(q - t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{2\varepsilon} - q(3q+4)\varepsilon - 2q^2}{1+q} + \frac{2}{1+q}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\left(q - t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt \cdot$$

Следовательно, зависимость кинематического параметра от неизвестного параметра $q$ имеет вид

$$\mathrm{K} = \frac{V_0}{\omega_z b} = -\frac{JJ_2(-\bar{q})}{2JJ_1(-\bar{q})},$$

где

$$JJ_1(-\bar{q}) = 2q + (q+2)\varepsilon + 2\sqrt{2\varepsilon} - 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{q\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - t^2(1+q)}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt;$$

$$JJ_2(-\bar{q}) = 2\sqrt{2\varepsilon} - q(3q+4)\varepsilon - 2q^2 + 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\left(q - t^2(1+q)\right)^2 - q^2\sqrt{1-t^2}}{t^2\sqrt{1-t^2}} dt.$$

С другой стороны, одно из частных решений $\Psi(t)$ поставленной задачи Келдыша – Седова, может быть получено в аналитическом виде [5]

$$\Psi(z) = -\sqrt{(z+q)(z-b)}\left( \frac{V_0 z + \omega_z \frac{z^2}{2}}{\sqrt{(z-b)(z+q)}} - \omega_z\frac{z}{2} - V_0 - \omega_z\frac{b-q}{4} \right) =$$

$$=-\left(V_0\left(z-\sqrt{(z+q)(z-b)}\right)+\frac{\omega_z}{2}\left(z^2-\left(z+\frac{b-q}{2}\right)\sqrt{(z+q)(z-b)}\right)\right).$$

Для определений интегралов $J_1(z)$ и $J_2(z)$ представим решение в виде

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{(z+q)(z-b)}\left(V_0\pi\left(1-\frac{z}{\sqrt{(z-b)(z+q)}}\right)+\frac{\omega_z}{2}\pi\left(z+\frac{b-q}{2}-\frac{z^2}{\sqrt{(z-b)(z+q)}}\right)\right).$$

Тогда

$$J_1(z)=\pi\left(1-\frac{z}{\sqrt{(z-b)(z+q)}}\right), \qquad J_2(z)=\pi\left(z+\frac{b-q}{2}-\frac{z^2}{\sqrt{(z-b)(z+q)}}\right).$$

Аналитическое решение и решение, полученное через интегралы в смысле Адамара, сравнивались по зависимости кинематического параметра $\mathrm{K}=\dfrac{V_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва $q/b$. Результаты расчетов представлены на рис. 3.

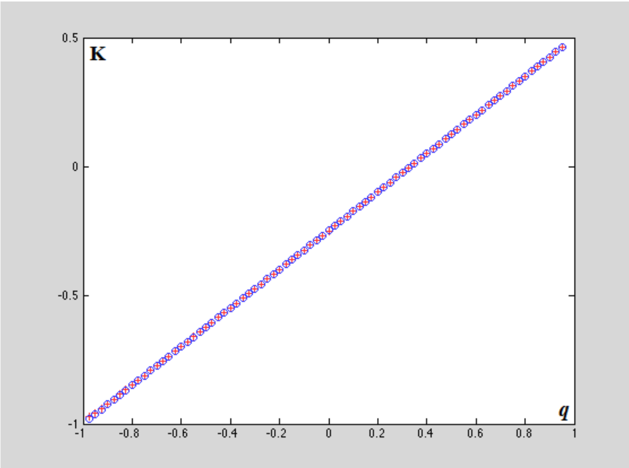


**Рис. 3. Зависимость кинематического параметра от положения точки отрыва:**
**+ расчет по формулам Адамара – Манглера (ε=0.001),**
**o аналитическое решение.**

**Выводы.** Хорошее совпадение данных аналитического решения и решения, полученного через интегралы в смысле Адамара, позволяет сделать вывод о применимости данного подхода к определению характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости.

## Библиографические ссылки

1. **Седов Л.И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. / Л.И. Седов – М.: Наука. – 1980. – 448 с.

2. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Наука. – 1966. –707с.

3. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией У.Р. Сирса – М.: Воениздат. – 1962. – 300 с.

4. А**дама**р Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. / Ж.Адамар – М.: Наука. – 1978. – 352 с.

5. **Гоман О.Г.** Математическое моделирование взаимодействия несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности при ударе с вращением в условиях отрыва ,/ О.Г Гоман, В.А. Катан // Вісник ДНУ, Серія Механіка. – 2012. – Т. 20, № 5. – Вип. 16, т.1. – С. 87 – 93.

*Надійшла до редколегії 14.05.2014*

УДК 536. 2

**Р. О. Кириченко**

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

**Розглянуто задачу з визначення температури оболонки за різноманітних умов теплообміну, коли теплофізичні параметри не залежать від температури. Враховано залежність сумарного теплового потоку від температури та часу. Проведено уточнення апроксимації тонкої оболонки у вигляді теплової ємності. Визначено похибку розв'язку оберненої задачі теплопровідності для тонкої оболонки.**

**Ключові слова:** тонкостінні елементи конструкцій, математична модель, температура оболонки, функціональні перетворення, градієнт температури, тепловий потік.

**Рассмотрена задача по определению температуры оболочки при различных условиях теплообмена, когда теплофизические параметры не зависят от температуры. Учтена зависимость суммарного теплового потока от температуры и времени. Произведено уточнение аппроксимации тонкой оболочки в виде тепловой емкости. Определена погрешность решения обратной задачи теплопроводности для тонкой оболочки.**

**Ключевые слова:** тонкостенные элементы конструкций, математическая модель, температура оболочки, функциональные преобразования, градиент температуры, тепловой поток.

**We consider the problem of determining the shell temperature at different heat transfer conditions when thermal parameters do not depend on temperature. Is taken into account the dependence of the total heat flux of temperature and time. Refined approximation a thin shell in the form of heat capacity Error of the solution is determined by the inverse heat conduction problem for a thin shell.**

**Key words:** thin-walled structural elements, mathematical model, cladding temperature, functional transformations, temperature gradient, heat flow.

**Актуальність проблеми.** У процесі проектування літальних апаратів виникає необхідність розрахунку нестаціонарного нагріву різноманітних елементів їх конструкцій. До них, як правило, належать підкріплені та непідкріплені тонкі металеві оболонки та обшивка. У ряді випадків (дуже мала товщина, високий коефіцієнт теплопровідності) температурним градієнтом всередині оболонки можна знехтувати і вважати, що процес нагріву можна визначається виключно поверхневим опором.

Задачу визначення температури тонкої оболонки за різноманітних умов теплообміну, коли теплофізичні параметри не залежать від температури, детально розглянуто в [1; 2]. Однак у випадку, коли температура оболонки змінюється у дуже широкому діапазоні, залежність об'ємної теплоємності від температури може суттєво впливати на температурне поле самої оболонки. Тому задачу розв'язують у