

5. Гоман О.Г. Математическое моделирование взаимодействия несжимаемой жидкости и вертикальной пластины, плавающей на ее поверхности при ударе с вращением в условиях отрыва / О.Г. Гоман, В.А. Катан // Вісник ДНУ, Серія Механіка. – 2012. – Т. 20, № 5. – Вип. 16, т.1. – С. 87 – 93.

Надійшла до редколегії 14.05.2014

УДК 536. 2

Р. О. Кириченко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Розглянуто задачу з визначення температури оболонки за різноманітних умов теплообміну, коли теплофізичні параметри не залежать від температури. Враховано залежність сумарного теплового потоку від температури та часу. Проведено уточнення апроксимації тонкої оболонки у вигляді теплової ємності. Визначено похибку розв'язку оберненої задачі теплопровідності для тонкої оболонки.

Ключові слова: тонкостінні елементи конструкцій, математична модель, температура оболонки, функціональні перетворення, градієнт температури, тепловий потік.

Рассмотрена задача по определению температуры оболочки при различных условиях теплообмена, когда теплофизические параметры не зависят от температуры. Учтена зависимость суммарного теплового потока от температуры и времени. Произведено уточнение аппроксимации тонкой оболочки в виде тепловой емкости. Определена погрешность решения обратной задачи теплопроводности для тонкой оболочки.

Ключевые слова: тонкостенные элементы конструкций, математическая модель, температура оболочки, функциональные преобразования, градиент температуры, тепловой поток.

We consider the problem of determining the shell temperature at different heat transfer conditions when thermal parameters do not depend on temperature. Is taken into account the dependence of the total heat flux of temperature and time. Refined approximation a thin shell in the form of heat capacity Error of the solution is determined by the inverse heat conduction problem for a thin shell.

Key words: thin-walled structural elements, mathematical model, cladding temperature, functional transformations, temperature gradient, heat flow.

Актуальність проблеми. У процесі проектування літальних апаратів виникає необхідність розрахунку нестационарного нагріву різноманітних елементів їх конструкцій. До них, як правило, належать підкріплені та непідкріплені тонкі металеві оболонки та обшивка. У ряді випадків (дуже мала товщина, високий коефіцієнт теплопровідності) температурним градієнтом всередині оболонки можна знехтувати і вважати, що процес нагріву можна визначасться виключно поверхневим опором.

Задачу визначення температури тонкої оболонки за різноманітних умов теплообміну, коли теплофізичні параметри не залежать від температури, детально розглянуто в [1; 2]. Однак у випадку, коли температура оболонки змінюється у дуже широкому діапазоні, залежність об'ємної теплоємності від температури може суттєво впливати на температурне поле самої оболонки. Тому задачу розв'язують у

більш складній постановці: з урахуванням залежності об'ємної теплоємності матеріалу оболонки від шуканої температури. Коли ж зміна температури оболонки відома з експерименту, то задачу визначення теплових потоків інтерпретують як обернену [3].

Метою даного дослідження є математичне моделювання та дослідження задач із визначення температури оболонки з урахуванням залежності сумарного теплового потоку від температури і часу, уточнення апроксимації тонкої оболонки у вигляді теплової ємності і визначення методичної похибки під час розв'язання оберненої задачі теплопровідності для тонкої оболонки.

Математична модель. У випадку високоінтенсивних процесів переносу тепла потоки тепла стають нелінійними, а визначення температури елементів конструкцій, до яких, як правило, відносять тонкі металеві оболонки та обшивку, пов'язано з розв'язанням нелінійного рівняння

$$C(T)\delta\frac{dT}{d\tau}=q(T,\tau) \quad , \quad (1)$$

де δ – товщина оболонки; $C(T)$ – теплоємність матеріалу оболонки; τ – час; $q(T,\tau)$ – сумарний тепловий потік до поверхонь оболонки; T – температура оболонки.

Отримати аналітичний розв'язок рівняння (1) за довільної залежності $C(T)$, $q(T,\tau)$ – від температури та часу неможливо. Числові методи розв'язання рівняння (1) детально викладено в [4].

Постановка задачі. Розглянемо задачу стосовно визначення температури оболонки, вважаючи, що у рівнянні (1) $q(T,\tau)$ відповідає

$$q(T,\tau)=\sum_{l=1}^2\{\alpha_l(T,\tau)[T_l(\tau)-T]-q_l(T)\} \quad (2)$$

де $q_l(T)$ – випромінювання Стефана з поверхні, $T_l(\tau)$ – температура середовища; $\alpha_l(T,\tau)$ – коефіцієнт тепловіддачі. Зобразимо $C(T)$ і $\alpha_l(T,\tau)$ у вигляді

$$C(T)=\sum_{j=0}^n C_j T^j \quad , \quad (3)$$

де $C_j = \text{const}$. Відтак маємо

$$\alpha_l(T,\tau)=\alpha_{0,l}+\alpha_l^*(T,\tau) \quad , \quad (4)$$

де $\alpha_{0,l} = \text{const}$.

Рівняння (1), з урахуванням співвідношень (2) – (4), запишемо таким чином:

$$\frac{dT}{d\tau}+WT-f(\tau)=Y(T,\tau) \quad , \quad (5)$$

де

$$\begin{cases} W=\sum_{l=1}^2\frac{\alpha_{0,l}}{C_0\delta}; f(\tau)=\sum_{l=1}^2\frac{\alpha_{0,l}}{C_0\delta}T_l(\tau); \\ Y(T,\tau)=\sum_{l=1}^2\left\{\frac{\alpha_l^*(T,\tau)}{C_0\delta}[T_l(\tau)-T]-q_l(T)\right\}-\sum_{j=1}^n\frac{dT}{d\tau}\frac{C_j}{C_0}T^j. \end{cases}$$

Скористаємося тепер інтегральним перетворенням Лапласа. Тоді отримаємо

$$\bar{T}(P) = \frac{\bar{f}(P) + T_0}{P + W} + \frac{\bar{Y}(T, P)}{P + W}, \quad (6)$$

де P – змінна перетворення Лапласа; $\bar{T}(P)$, $\bar{f}(P)$, $\bar{Y}(T, P)$ – лапласові відображення функцій $T(\tau)$, $f(\tau)$, $Y(T, \tau)$.

Відображенню $\bar{T}(P)$ відповідає у просторі оригіналів функція

$$T(\tau) = T_0 \exp(-W\tau) + \exp(-W\tau) \int_0^\tau f(\eta) \exp(W\eta) d\eta + \exp(-W\tau) \int_0^\tau Y(T, \tau) \exp(W\eta) d\eta. \quad (7)$$

Вираз (7) являє собою нелінійне інтегральне рівняння, яке можна розв'язати методом послідовних наближень. Якщо знехтувати нелінійним членом $Y(T, \tau)$, то у першому наближенні отримаємо розв'язок лінійної задачі:

$$T_1(\tau) = T_0 \exp(-W\tau) + \exp(-W\tau) \int_0^\tau \exp(W\eta) f(\eta) d\eta. \quad (8)$$

Підставляючи цю функцію у праву частину рівняння (7), знайдемо такі наближення

$$T_n(\tau) = T_1(\tau) + \exp(-W\tau) \int_0^\tau Y(T_{n-1}, \tau) \exp(W\eta) d\eta. \quad (9)$$

Якщо функція $Y(T, \tau)$ досить регулярна, то розв'язок $T(\tau)$ отримано як $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\tau)$. На практиці можна обмежитися лише обчисленням декількох наближень. На рис. 1 – 2 наведено результати розрахунку температури на зовнішній поверхні оболонки за співвідношеннями (8) і (9) і такими початковими даними:

$$\varepsilon=0,8; G_0=5.77 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}; C_0=3,533 \text{ Дж/ м}^3 \text{ К}; T_{1,\text{сеп}}=900^\circ\text{К}; \\ T_0=300^\circ\text{К}; \alpha_{0,1}=392 \text{ Вт/ м}^2 \text{ К}; C_1=1.84 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/ м}^3 \text{ К}.$$

На рисунках, крім того, наведено значення температур, які розраховані методом числового інтегрування рівняння (1).

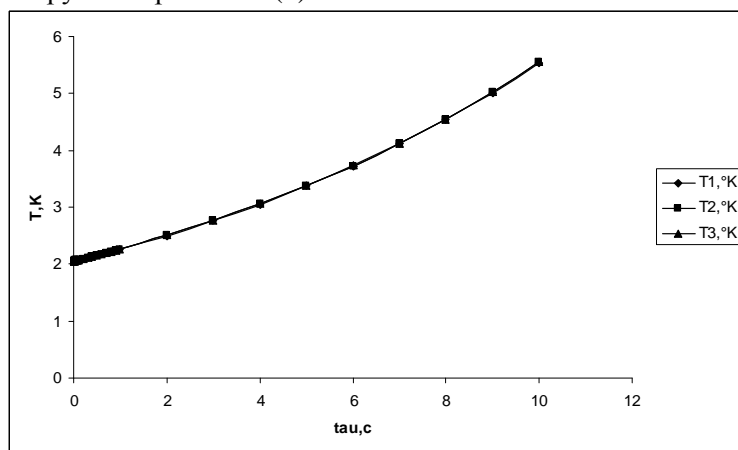


Рис. 1. Залежність температури на зовнішній поверхні оболонки від часу (експеримент 1)

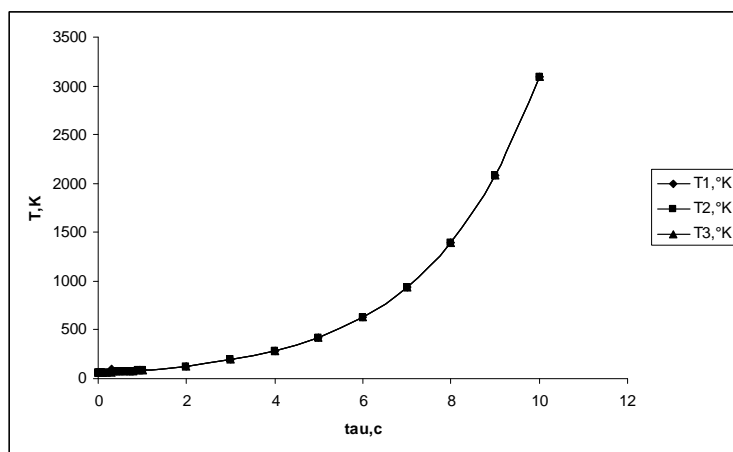


Рис. 2. Залежність температури на зовнішній поверхні оболонки від часу (експеримент 2)

Оболонки, застосовані в елементах конструкцій, мають кінцеву товщину і деякий градієнт температури, тому апроксимація тонкої оболонки у вигляді теплової ємності рівнянням (1) є наближена. Скориставшись точним розв'язком ОЗТ для пластини [5]

$$T(r, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^2}{a} \right) \left[\frac{T_0^{(n)}(\tau)}{(2n)!} - \frac{r}{\lambda} \frac{q_0^{(n)}(\tau)}{(2n+1)!} \right], \quad (10)$$

де a , λ – коефіцієнти температуропровідності та теплопровідності; r – поточна координата по товщині пластини; $T_0(\tau)$, $q_0(\tau)$ – температура і тепловий потік на поверхні пластини за $r = 0$, покажемо, що рівняння (1) є у ньому лише головним членом.

Введемо позначення

$$\mu = \frac{C\delta^2}{\lambda} \quad (11)$$

і визначимо із розв'язку (10) тепловий потік Фур'є до поверхні пластини за $r = \delta$:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = -q_\delta(\tau), \quad (12)$$

де

$$-q_\delta(\tau) = C\delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{n-1}}{(2n-1)!} T_0^{(n)}(\tau) + q_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(2n)!} q_0^{(n)}(\tau). \quad (13)$$

Враховуючи, що λ для матеріалів тонкостінних елементів конструкцій велике, маємо

$$\begin{aligned} \mu &\ll 1, \\ T_0 &\approx T(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Зберігаючи у (13) тільки члени за μ^0 , отримаємо рівняння

$$C\delta \frac{dT}{d\tau} = q_{\delta}(\tau) + q_0(\tau),$$

яке збігається з (1).

Зберігаючи в (1) члени більш високого порядку малості, отримаємо вираз

$$C\delta \left(\frac{dT}{d\tau} + \frac{1}{6} \mu \frac{d^2T}{d\tau^2} \right) = q_{\delta} + q_0 + 0.5 \mu q_0'(\tau), \quad (15)$$

який можна застосовувати замість рівняння (1) для більш точної апроксимації тонкої оболонки у вигляді теплової ємності.

Розглянемо рівняння (1) як розв'язок ОЗТ, припустивши, що температура оболонки, відома із експерименту, задана функцією

$$T(\tau) = T_H \exp(\beta\tau), \quad (16)$$

де T_H , β – константи.

Тоді з (1) знайдемо

$$q_{\text{кон}} - q_{\text{л}} = \frac{\lambda}{\delta} \mu \beta T_H \exp(\beta\tau), \quad (17)$$

де $q_{\text{кон}}$ – конвективний тепловий потік.

На рис. 3 – 4 наведено отриману залежність теплового потоку від часу на зовнішній поверхні оболонки.

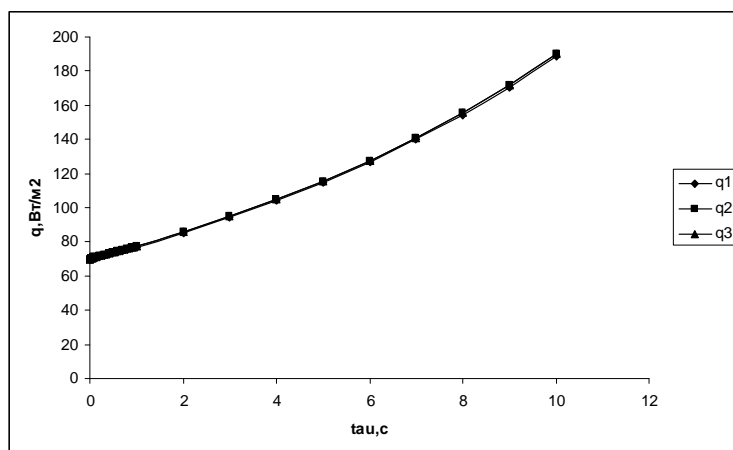


Рис. 3. Залежність теплового потоку на зовнішній поверхні оболонки від часу (експеримент 1)

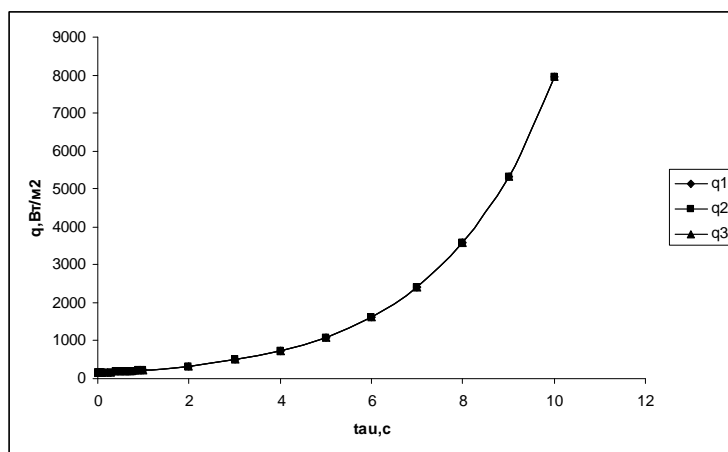


Рис. 4. Залежність теплового потоку на зовнішній поверхні оболонки від часу (експеримент 2)

Окрім того, скориставшись точним розв'язком ОЗТ для пластини у вигляді (13) з урахуванням (14), (16), отримаємо

$$q_{\delta} = q_{\text{кон}} - q_{\text{л}} = \frac{\lambda}{\delta} \sqrt{\mu\beta} T_H \exp(\beta\tau) \operatorname{sh} \sqrt{\mu\beta} \quad (18)$$

Тоді відносна похибка Θ визначення теплових потоків за формулою (17) набуде вигляду

$$\Theta = 1 - \frac{\sqrt{\mu\beta}}{\operatorname{sh} \sqrt{\mu\beta}}.$$

Аналіз показує, що похибка у визначенні теплових потоків за формулою (17) у випадку кінцевих δ і λ може бути значною.

Висновки. Встановлено, що відновлена температура та температура, яку заміряли на внутрішній поверхні пластини – збігаються, що підтверджує можливість апроксимації тонкої оболонки тепловою ємністю. Отримані результати можуть бути корисними в дослідженні температурних режимів тонкостінних елементів конструкцій, в роботі з експериментальними даними з метою визначити функції тепловиділення.

Бібліографічні посилання

1. Підстригач Я. С. Вибрані праці / Я. С. Підстригач. – К., 1995. – 460 с.
2. Веселовский В. Б. Математическое моделирование влияния полей различной физической природы на тепловые режимы элементов конструкций / В. Б. Веселовский // Техническая теплотехника. – 1993. – Вып. 1. – С. 114 – 117.
3. Веселовский В. Б. Контактное термическое сопротивление в многослойных элементах конструкции / В.Б. Веселовский // Гидрогазодинамика и процессы теплообмена. – К., 1986. – С. 120 – 125.
4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2 т. / Ю. М. Мацевитый. – К., 2003. – Т.1. – 460 с., Т.2. – 392 с.
5. Веселовский В. Б. Расчет температурных полей и восстановление граничных условий для составных элементов конструкций / В. Б. Веселовский, А. В. Берлов, Никульникова В. В. // Металлургическая теплотехника: Сб. науч. тр. Национальной металлургической академии Украины. – Д.: Пороги, 2004. – С. 238 – 249.

Надійшла до редколегії 16.05.2014