

Выводы. На основе нестационарной сопряжённой математической модели энергопереноса в фотоэлектрическом модуле создан численный алгоритм и проведены исследования по определению температурных полей в слое СЭ. В модели учтены наиболее существенные географические климатические и технологические факторы, что влияют на общий энергоперенос в системе. Расчётные уровни температур указывают на возможное снижение эффективности солнечных модулей в случае их плотного прилегания к фасадным элементам. Создание максимально широкого конструктивного зазора позволит существенно снизить температурный режим СБ, оптимизировать её энергетические показатели.

Библиографические ссылки

1. **Баранов Н. Н.** Прямое преобразование энергии для автономной энергетики / Н. Н. Баранов // Энергия: экономика, техника, экология. – 2000. – №8. – С. 23 –24.
2. **Юрченко А. В.** Статистическая модель кремниевых солнечных батарей, работающих под воздействием природных и аппаратных факторов / А. В. Юрченко, В. В. Волгин, С. А. Козлов // Изв. Томск. политех. ун –та. – 2009. – Т.314, №4. – С. 142 – 148.
3. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.,1984. – 152 с.
4. Климат Украины. Под ред. Г.Ф. Приходько. – Л., 1967. – 414 с.
5. **Михеев М. А.** Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия. – 1977. – 345с.
6. **Гуревич В. Л.** Выделение джоулева тепла при прохождении тока в наноструктурах: обзор / В. Л. Гуревич, М. И. Мурадов // Физика твердого тела. – 2012. – Т.54. – Вып.4. – С. 625 – 641.
7. **Кныш Л. И.** Влияние частичного затенения на тепловой режим солнечных модулей/ Л. И. Кныш // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки: зб.наук. пр. – Д.: 2013. – Т.16. – С. 62 – 68.

Надійшла до редколегії 20.04.2014

УДК 539.3

О.В. Комаров

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ВПЛИВ АНІЗОТРОПІЇ СКЛАДОВИХ МАТЕРІАЛІВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ОКОЛІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Досліджено напружено-деформівний стан в околі вершини тріщини, розташованої на межі поділу складових матеріалів в анізотропному біматеріальному просторі, під час дії зосередженого навантаження, прикладеного до берегів тріщини. Поставлену задачу зведено до системи задач лінійного спряження, розв'язок якої побудовано аналітично. Проаналізовано вплив анізотропії складових простору на напруження і переміщення.

Ключові слова: міжфазна тріщина, біматеріальний простір, задача лінійного спряження, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Исследовано напряженно-деформируемое состояние в окрестности вершины трещины, расположенной на границе раздела составляющих материалов в анизотропном биматериальном пространстве, при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной к берегам трещины.

© Комаров О.В., 2014

Поставлена задача сведена к системе задач линейного сопряжения, решение которой построено аналитически. Проанализировано влияние анизотропии составляющих пространства на напряжения и перемещения.

Ключевые слова: межфазная трещина, биматериальное пространство, задача линейного сопряжения, коэффициент интенсивности напряжений.

A stress and deformable state near interface crack tip situated in anisotropic bimaterial space under concentrated load on a crack faces is considered. System of Gilbert problems is obtained and solved analytically. An influence of anisotropy of consisted materials on stresses and deformations is investigated.

Key words: interface crack, bimaterial space, Gilbert problem, stress intensity factor.

На теперішній час дослідження міжфазної тріщини достатньо широко проведено для ізотропних і анізотропних біматеріальних просторів в рамках класичної теорії лінійної механіки руйнування. Об'єктами дослідження, як правило, виступають осциляційні особливості компонент плоского напруженого або деформівного стану в околі вершини тріщини. Задачу для "відкритої" тріщини було вперше поставлено та розв'язано в роботі [5], де показано, що в околі кінця тріщини існує взаємопроникнення її берегів, тобто переміщення мають осцилюючу особливість. В даній роботі автори сконцентрували увагу на випадку, коли тріщина розташована на межі поділу двох анізотропних матеріалів з урахуванням загального випадку анізотропії обох складових.

Розглянемо тріщину (a, b) в біматеріальному просторі на лінії поділу двох анізотропних матеріалів з пружними характеристиками $C_{ijkl}^{(1)}$ і $C_{ijkl}^{(2)}$ відповідно (рис. 1).

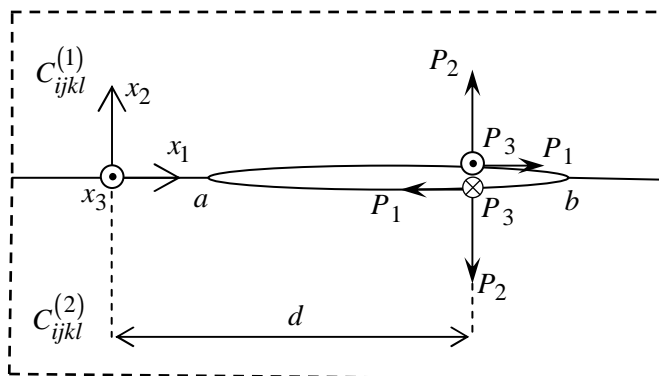


Рис. 1. Міжфазна тріщина в анізотропному біматеріальному просторі

До берегів тріщини прикладено навантаження, направлене вздовж напрямків осей координат і рівномірно розподілено вздовж осі x_3 . Рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$C_{ijsl} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_l \partial x_j} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1)$$

припускаючи додавання за індексами, що повторюються.

Визначальні співвідношення задамо узагальненим законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Граничні умови на лінії поділу матеріалів (інтерфейсі) запишемо в такий спосіб:

$$[u_1] = [u_2] = [u_3] = 0, \quad [\sigma_{21}] = [\sigma_{22}] = [\sigma_{23}] = 0, \quad x_1 \notin (a, b); \quad (3)$$

$$\sigma_{12}^{\pm} = -P_1 \delta(x_1 - d), \quad \sigma_{22}^{\pm} = -P_2 \delta(x_1 - d), \quad \sigma_{23}^{\pm} = -P_3 \delta(x_1 - d), \quad x_1 \in (a, b), \quad (4)$$

де $[f]$ – стрибок функції у разі переходу через інтерфейс, $f^{\pm}(x_1) = f(x_1 \pm i \cdot 0)$;

$\delta(x_1)$ – дельта-функція Дірака.

Для розв'язування поставленої задачі застосуємо підхід узагальнених комплексних потенціалів, запропонований у роботі [3]. Врахувавши, що за обраного навантаження переміщення не залежить від координати x_3 , зобразимо вектор переміщень \mathbf{u} через довільну функцію $f(x_1, x_2)$ у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} f(x_1 + p x_2), \quad (5)$$

де \mathbf{a} – вектор, а p – постійна, які поки що невідомі. Підставивши представлення (5) в рівняння (1), отримаємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора \mathbf{a} :

$$(c_{i1k1} + (c_{i1k2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2) a_k = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Ненульовий розв'язок цієї системи існує тільки за умови рівності нулеві визначника матриці коефіцієнтів:

$$\text{Det} \left[(c_{i1k1} + (c_{i1k2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2) \right] = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Останній вираз являє собою рівняння шостого порядку відносно p , яке в загальному випадку має три пари комплексно спряжених коренів і розв'язується числово. Вибравши три корені з додатною уявною частиною, запишемо найбільш загальний розв'язок системи (1) в такому вигляді:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (8)$$

де $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ – матриця, побудована з власних векторів системи (6); $\mathbf{f}(z) = (f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3))$ – вектор-функція узагальнених комплексних змінних $z_i = x_1 + p_i x_2$ ($i = 1, 2, 3$); риска зверху означає комплексне спряження.

Для визначення напружень, що діють на площині інтерфейсу, уведемо до розгляду вектор $\mathbf{t} = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$, вираз для якого через похідну від функції $\mathbf{f}(z)$ отримаємо, підставивши (8) в (2):

$$\mathbf{t} = \mathbf{B} \mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (9)$$

де $\mathbf{B} = (c_{i2j1} + p_k c_{i2j2}) A_{jk}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $\mathbf{f}'(z) = (f'(z_1), f'(z_2), f'(z_3))$.

Скориставшись (8), (9), запишемо вирази для переміщень і напружень в біматеріальному просторі у вигляді

$$\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{z}^{(j)}) + \bar{\mathbf{A}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{\mathbf{z}}^{(j)}), \quad (10)$$

$$\mathbf{t}^{(j)} = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{f}'^{(j)}(\mathbf{z}^{(j)}) + \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}'^{(j)}(\bar{\mathbf{z}}^{(j)}), \quad (11)$$

де індекс $j=1$ для першого матеріалу; $j=2$ – для другого матеріалу. Вектор-функції $\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{z}^{(1)})$ і $\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{z}^{(2)})$ є аналітичними функціями у верхній ($x_2 > 0$) і нижній ($x_2 < 0$) комплексних півплощинах відповідно. Скориставшись граничними умовами (2) – (3) для напружень на інтерфейсі, можемо записати таке співвідношення:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0), \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad (12)$$

і, з урахуванням (11), отримаємо

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1, 0), \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (13)$$

Ліва частина співвідношення (13) являє собою межове значення аналітичної в області ($x_2 > 0$) функції, натомість права – межове значення аналітичної в області ($x_2 < 0$) функції. Рівність (13) означає, що обидві функції можуть бути аналітично продовжені на всю комплексну площину і дорівнювати деякій функції $\mathbf{M}(z)$, аналітичній у всій комплексній площині. Відсутність навантаження на нескінченності означає, що

$$\mathbf{M}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (14)$$

а це, згідно з теоремою Ліувіля, свідчить, що $\mathbf{M}(z) = 0$ у всій комплексній площині. Скориставшись (13), можемо записати

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1, 0) = 0, \quad x_2 > 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1, 0) = 0, \quad x_2 < 0. \quad (16)$$

У випадку некратних значень p_i ($i=1,2,3$) для обох матеріалів матриці $\mathbf{B}^{(j)}$ ($j=1,2$) є невідроджені, що дає змогу записати наступні співвідношення:

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(\bar{z}) = \left(\bar{\mathbf{B}}^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z), \quad x_2 > 0, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(\bar{z}) = \left(\bar{\mathbf{B}}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}'^{(2)}(z), \quad x_2 < 0. \quad (18)$$

Уведемо до розгляду вектор

$$[\mathbf{u}'(x_1)] = \mathbf{u}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{u}'^{(2)}(x_1, 0), \quad (19)$$

який являє собою стрибок похідних від переміщень у разі переходу через інтерфейс, і, скориставшись (8), (17) і (18), запишемо його в такому вигляді:

$$\left[u'(x_1) = D f^{(1)}(x_1, 0) + \bar{D} \bar{f}^{(1)}(x_1, 0) \right], \quad (20)$$

де $D = A^{(1)} - \bar{A}^{(2)} \left(\bar{B}^{(2)} \right)^{-1} B^{(1)}$.

Уведемо до розгляду вектор-функцію

$$W(z) = \begin{cases} D f'(z), & x_2 > 0, \\ \bar{D} \bar{f}'(\bar{z}), & x_2 < 0, \end{cases} \quad (21)$$

і, скориставшись (9) та (20), запишемо напруження і стрибок похідної від переміщень в термінах цієї функції:

$$t^{(1)}(x_1, 0) = G W^+(x_1, 0) - \bar{G} W^-(x_1, 0), \quad (22)$$

$$\left[u'(x_1) \right] = W^+(x_1, 0) - W^-(x_1, 0), \quad (23)$$

де $W^\pm(x_1, 0) = W(x \pm i0)$, $G = B^{(1)} D^{-1}$.

Відзначимо, що з рівняння (21) і (23) випливає, що функція $W(z)$ є аналітична у всій комплексній площині за винятком (a, b) .

Матриця G для випадку загальної анізотропії матиме таку структуру: елементи головної діагоналі g_{ii} – уявні, а $g_{ij} = g_{ji} (i \neq j)$ – комплексні. Розкривши вираз (22) за компонентами, отримаємо для напружень на інтерфейсі:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= g_{11} w_1^+ + g_{12} w_2^+ + g_{13} w_3^+ - \bar{g}_{11} w_1^- - \bar{g}_{12} w_2^- - \bar{g}_{13} w_3^-, \\ \sigma_{22} &= g_{21} w_1^+ + g_{22} w_2^+ + g_{23} w_3^+ - \bar{g}_{21} w_1^- - \bar{g}_{22} w_2^- - \bar{g}_{23} w_3^-, \\ \sigma_{23} &= g_{31} w_1^+ + g_{32} w_2^+ + g_{33} w_3^+ - \bar{g}_{31} w_1^- - \bar{g}_{32} w_2^- - \bar{g}_{33} w_3^-. \end{aligned} \quad (24)$$

Шляхом алгебраїчних перетворень отримаємо вирази для лінійних комбінацій напружень через нову комплексну функцію:

$$m_{k1} \sigma_{21} + \sigma_{22} + m_{k2} \sigma_{23} = T_k \left(F_k^+(x_1, 0) + \gamma_k F_k^-(x_1, 0) \right), k = 1, 2, 3, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} F_k(z) &= w_1(z) + s_{k1} w_2(z) + s_{k2} w_3(z), \quad T_k = g_{11} m_{k1} + g_{21} + g_{31} m_{k2}, \\ s_{k1} &= \frac{g_{12} m_{k1} + g_{22} + g_{32} m_{k2}}{T_k}, \quad s_{k2} = \frac{g_{13} m_{k1} + g_{23} + g_{33} m_{k2}}{T_k}, \\ \gamma_k &= \frac{-\bar{g}_{11} m_{k1} - \bar{g}_{21} - \bar{g}_{31} m_{k2}}{T_k}, \quad \text{а } m_{kj} \text{ – корені системи рівнянь} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{g_{12} m_1 + g_{22} + g_{32} m_2}{g_{11} m_1 + g_{21} + g_{31} m_2} = \frac{-\bar{g}_{12} m_1 - \bar{g}_{22} - \bar{g}_{32} m_2}{-\bar{g}_{11} m_1 - \bar{g}_{21} - \bar{g}_{31} m_2}, \\ \frac{g_{13} m_1 + g_{23} + g_{33} m_2}{g_{11} m_1 + g_{21} + g_{31} m_2} = \frac{-\bar{g}_{13} m_1 - \bar{g}_{23} - \bar{g}_{33} m_2}{-\bar{g}_{11} m_1 - \bar{g}_{21} - \bar{g}_{31} m_2}. \end{cases}$$

T_1, T_2 – комплексні, T_3 – уявне; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – дійсні, причому $\gamma_1 = 1/\gamma_2$ а $\gamma_3 = 1$; $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ – комплексні, причому $m_{21} = \bar{m}_{11}, m_{22} = \bar{m}_{12}$, m_{31}, m_{32} – дійсні; $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$ – комплексні, причому $s_{21} = \bar{s}_{11}, s_{22} = \bar{s}_{12}$, s_{31}, s_{32} – дійсні.

Задовольняючи граничні умови (3), (4) за допомогою (25), отримаємо незв'язану систему задач лінійного спряження для функцій $F_k(z)$:

$$F_k^+(x_1, 0) + \gamma_k F_k^-(x_1, 0) = f_k(x_1), k = 1, 2, 3, \quad (26)$$

де $f_k(x_1) = (1/T_k)(m_{k1}P_1\delta(x_1 - d) + P_2\delta(x_1 - d) + m_{k2}P_3\delta(x_1 - d))$.

Розв'язок одержаних задач побудуємо, скориставшись методикою Мусхелішвілі [1]:

$$F_k(z) = \frac{X_{k0}(z)^b}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_k(t)}{X_{k0}^+(t)(t-z)} dt, \quad (27)$$

де $X_{k0}(z) = (z-a)^{-1/2-i\epsilon_k} (z-b)^{-1/2+i\epsilon_k}$, $\epsilon_k = -(1/(2\pi)) \ln|\gamma_k|$ – частковий розв'язок відповідних однорідних задач лінійного спряження. Виходячи з взаємовідношення величин γ_k , для величин ϵ_k отримаємо: $\epsilon_1 = -\epsilon_2, \epsilon_3 = 0$.

Провівши необхідне інтегрування у виразі (27), одержимо:

$$F_k(z) = \frac{(m_{k1}P_1 + P_2 + m_{k2}P_3) e^{\pi\epsilon_k} (z-a)^{-1/2-i\epsilon_k} (z-b)^{-1/2+i\epsilon_k}}{2\pi(d-a)^{-1/2-i\epsilon} (b-d)^{-1/2+i\epsilon_k} (z-d)}, k = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Вирази (25), (28) дозволяють записати систему лінійних рівнянь для визначення напружень на інтерфейсі перед кінцем тріщини b ($x_1 > b$):

$$\begin{cases} m_{11}^R \sigma_{21} + \sigma_{22} + m_{12}^R \sigma_{23} = \Delta_1 e^{\pi\epsilon_1} (1 + \gamma_1) \eta(x_1) \sin(\varphi(x_1)), \\ m_{11}^I \sigma_{21} + m_{12}^I \sigma_{23} = -\Delta_1 e^{\pi\epsilon_1} (1 + \gamma_1) \eta(x_1) \cos(\varphi(x_1)), \\ m_{31} \sigma_{21} + \sigma_{22} + m_{32} \sigma_{23} = -\Delta_3 \eta(x_1), \end{cases} \quad (29)$$

де

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{(m_{11}^R P + P_2 + m_{12}^R P_3)^2 + (m_{11}^I P_1 + m_{12}^I P_3)^2}}{2|T_1|}, \Delta_3 = \frac{(m_{31} P_1 + P_2 + m_{32} P_3)}{2|T_3|},$$

$$\eta(x_1) = \frac{\sqrt{(d-a)(b-d)}}{\pi(x_1-d)\sqrt{(x_1-a)(x_1-b)}}, \quad m_{kj}^R = \operatorname{Re}(m_{kj}), \quad m_{kj}^I = \operatorname{Im}(m_{kj}),$$

Розв'язок системи (29) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \frac{(e^{\pi\varepsilon_1}(1+\gamma_1)\Delta_1 \sin(\varphi(x_1) + \mu_{21})M_{21} + m_{12}^I \Delta_3) \eta(x_1)}{m_{12}^I (m_{11}^R - m_{31}) + m_{11}^I (m_{32} - m_{12}^R)}, \\ \sigma_{22} &= \frac{(e^{\pi\varepsilon_1}(1+\gamma_1)\Delta_1 \sin(\varphi(x_1) + \mu_{22})M_{22} + (m_{11}^I m_{12}^R - m_{12}^I m_{11}^R) \Delta_3) \eta(x_1)}{m_{12}^I (m_{11}^R - m_{31}) + m_{11}^I (m_{32} - m_{12}^R)}, \quad (30) \\ \sigma_{23} &= -\frac{(e^{\pi\varepsilon_1}(1+\gamma_1)\Delta_1 \sin(\varphi(x_1) + \mu_{23})M_{23} + m_{11}^I \Delta_3) \eta(x_1)}{m_{12}^I (m_{11}^R - m_{31}) + m_{11}^I (m_{32} - m_{12}^R)}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= \arccos\left(\frac{m_{12}^I}{M_{12}}\right), \quad M_{21} = \sqrt{(m_{12}^I)^2 + (m_{12}^R - m_{32})^2}, \\ \mu_{12} &= \arccos\left(\frac{m_{11}^I m_{32} - m_{12}^I m_{31}}{M_{22}}\right), \quad M_{22} = \sqrt{(m_{11}^I m_{32} - m_{12}^I m_{31})^2 + (m_{12}^R m_{31} - m_{32} m_{11}^R)^2}, \\ \mu_{12} &= \arccos\left(\frac{m_{11}^I}{M_{23}}\right), \quad M_{12} = \sqrt{(m_{11}^I)^2 + (m_{11}^R - m_{31})^2}. \end{aligned}$$

Як видно з виразів (30), якісну відмінність функцій напружень від розв'язку аналогічної задачі про тріщину в однорідному матеріалі забезпечує наявність функції $\sin(\varphi(x_1) + \mu_{23})$. Структура цієї функції вказує на осциляцію напружень у разі безпосереднього наближення до кінців тріщини. Обчислюючи коефіцієнти інтенсивності напружень класичним способом $\left(K_i = \lim_{x \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x-b)} \sigma_{2i}(x, 0)\right)$, переконуємося, що відповідної межі не існує. Один із варіантів обчислення коефіцієнтів інтенсивності спеціального вигляду запропоновано в роботі [2].

Скориставшись виразом (23), сформуємо систему для визначення стрибків похідних від перемішень перед кінцем тріщини b ($x_1 < b$):

$$\begin{cases} s_{11}^R [u'_1] + [u'_2] + s_{12}^R [u'_3] = \Delta_{u1} e^{\pi\varepsilon_1} (1 + 1/\gamma_1) \eta_u(x_1) \sin(\varphi_u(x_1)), \\ s_{11}^I [u'_1] + s_{12}^I [u'_3] = -\Delta_{u1} e^{\pi\varepsilon_1} (1 + 1/\gamma_1) \eta_u(x_1) \cos(\varphi_u(x_1)), \\ s_{31} [u'_1] + [u'_2] + s_{32} [u'_3] = -\Delta_{u3} \eta_u(x_1), \end{cases} \quad (31)$$

де

$$\eta_u(x_1) = \frac{\sqrt{(d-a)(b-d)}}{\pi(x_1-d)\sqrt{(x_1-a)(b-x_1)}}, \quad s_{kj}^R = \operatorname{Re}(s_{kj}), \quad s_{kj}^I = \operatorname{Im}(s_{kj}),$$

$$\varphi_u(x_1) = \varepsilon_1 \operatorname{Ln} \frac{(d-a)(b-x_1)}{(b-d)(x_1-a)} - \arccos \left(\frac{m_{11}^I P_1 + m_{12}^I P_3}{2|T_1| \Delta_1} \right) - \operatorname{Arg}(T_1).$$

Розв'язок даної системи, з урахуванням її структури, легко отримати з виразів (30), виконавши відповідні заміни:

$$[u'_1] = \frac{\left(e^{\pi \varepsilon_1} (1+1/\gamma_1) \Delta_1 \sin(\phi_u(x_1) + \zeta_{21}) S_{21} + s_{12}^I \Delta_3 \right) \eta_u(x_1)}{s_{12}^I (s_{11}^R - s_{31}) + s_{11}^I (s_{32} - s_{12}^R)},$$

$$[u'_2] = \frac{\left(e^{\pi \varepsilon_1} (1+1/\gamma_1) \Delta_1 \sin(\phi_u(x_1) + \zeta_{22}) S_{22} + (s_{11}^I s_{12}^R - s_{12}^I s_{11}^R) \Delta_3 \right) \eta_u(x_1)}{s_{12}^I (s_{11}^R - s_{31}) + s_{11}^I (s_{32} - s_{12}^R)}, \quad (32)$$

$$[u'_3] = - \frac{\left(e^{\pi \varepsilon_1} (1+1/\gamma_1) \Delta_1 \sin(\phi_u(x_1) + \zeta_{23}) S_{23} + s_{11}^I \Delta_3 \right) \eta_u(x_1)}{s_{12}^I (s_{11}^R - s_{31}) + s_{11}^I (s_{32} - s_{12}^R)},$$

де

$$\zeta_{21} = \arccos \left(\frac{s_{12}^I}{S_{12}} \right), \quad S_{21} = \sqrt{\left(s_{12}^I \right)^2 + \left(s_{12}^R - s_{32} \right)^2},$$

$$\zeta_{12} = \arccos \left(\frac{s_{11}^I s_{32} - s_{12}^I s_{31}}{S_{22}} \right), \quad S_{22} = \sqrt{\left(s_{11}^I s_{32} - s_{12}^I s_{31} \right)^2 + \left(s_{12}^R s_{31} - s_{32} s_{11}^R \right)^2},$$

$$\zeta_{12} = \arccos \left(\frac{s_{11}^I}{S_{23}} \right), \quad S_{12} = \sqrt{\left(s_{11}^I \right)^2 + \left(s_{11}^R - s_{31} \right)^2}.$$

Очевидно, осциляційний ефект присутній і в похідних від стрибків переміщень. Проінтегрувавши вирази (30), можемо визначити стрибок переміщень у випадку переходу через інтерфейс, однак інтегрування отриманих функцій можна реалізувати тільки числовими методами.

Характер отриманих розв'язків вказує на необхідність використання іншої моделі міжфазної тріщини для уникнення осциляцій, з урахуванням зони контакту берегів поблизу вершини тріщини. Але модель відкритої тріщини для наближеного аналізу змін механічних характеристик має сенс для випадків, коли розміри зони взаємопроникнення берегів достатньо малі.

Числову реалізацію отриманого розв'язку проведено для анізотропного біматеріального простору, один із складових матеріалів якого є ортотропний, інший – абсолютно жорсткий півпростір. Головні напрями анізотропії першого матеріалу, жорсткості якого в ГПа наведено в табл.1, орієнтовані довільним чином, що призводить до ефекту загальної анізотропії матеріалу.

Таблиця 1

Пружні постійні анізотропного матеріалу (10^9 ГПа)

C_{1111}	C_{2222}	C_{3333}	C_{1122}	C_{1133}	C_{2233}	C_{2323}	C_{1313}	C_{1212}
23,2775	30,5428	14,3622	5,52542	2,41524	2,37960	7,0	7,2	7,8

На рис. 2 наведено графіки зміни напружень на лінії поділу матеріалів у безпосередній близькості від правого кінця тріщини b за таких значень навантажень і геометричних розмірів: $P_1 = P_2 = P_3 = 1 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$, $d = 1,1 \text{ см}$. За цих умов чітко простежується перетин осі x_1 графіком напруження σ_{21} , натомість осциляція σ_{22} і σ_{23} починається значно ближче до b .

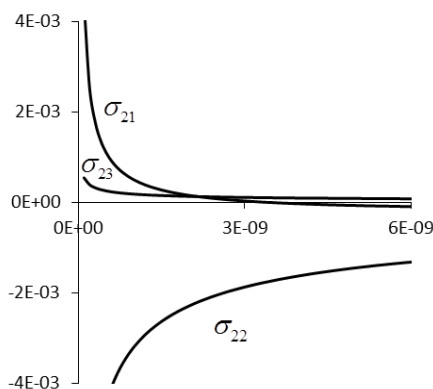


Рис. 2. Зміна напружень на інтерфейсі поблизу кінця тріщини.

Числові розрахунки розмірів зони взаємопроникнення берегів і їх аналіз показують, що вони дуже малі (10^{-9} м). Слід відзначити, що такий результат відповідає саме випадку сконцентрованого навантаження. Як показано в роботі [3], за рівномірно-розподіленого на нескінченності навантаження зони осциляції переміщення u_2 досягають розмірів, порівнянних із довжиною тріщини.

Бібліографічні посилання

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М., 1966. – 707 с.
2. Сулим Г. Т. Решение сингулярных интегральных уравнений плоской задачи об упругом равновесии составных тел с трещинами / Г. Т. Сулим, Д. В. Грилицкий // Физ.-хим. мех. материалов. – 1972. –Т. 8. –№11. – С. 58 – 65.
3. Herrmann K. P. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Archive of Appl. Mech. – 1999. –Vol. 69. – P. 311 – 335.
4. Ting T. C. T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites / T. C. T. Ting // Int. J. Solids Structures. – 1986. –Vol. 22. –P. 965 – 983.
5. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media / M. L. Williams. // Bulletin of the Seismological Society of America. –1959. –Vol. 49. –P. 199 – 204.

Надійшла до редколегії 16.05.2014